

## О ВЛИЯНИИ МОДЕЛЕЙ КРИВОЙ СОДЕРЖАНИЯ НЕЗАМОРОЖЕННОЙ ВОДЫ НА ТОЧНОСТЬ ПРОГНОЗА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ИСКУССТВЕННО ЗАМОРАЖИВАЕМОМ ПОРОДНОМ МАССИВЕ

Бублик С.А., Горный институт УрО РАН, Пермь  
Семян М.А., Горный институт УрО РАН, Пермь

В работе рассмотрены три различные модели содержания незамороженной воды, используемые при описании замораживания влажных горных пород: степенная модель; модель ван Генухтена-Муалема; модель Козловского. Проведен анализ применимости моделей для описания данных лабораторных измерений образцов песка и глины. Установлено, что все модели с приемлемой точностью описывают лабораторные данные, однако модель ван Генухтена-Муалема дает в целом наилучшие результаты, особенно в случае глины. Адекватность применения этой модели в натуральных условиях подтверждена результатами математического моделирования искусственного замораживания пород в условиях шахтного ствола калийного рудника. Выявлено, что в течение длительного периода (шесть месяцев и более) расхождения между расчетными и экспериментальными температурами в контрольных скважинах остаются незначительными. Это позволяет рекомендовать модель ван Генухтена-Муалема для моделирования искусственного замораживания различных типов пород в задачах мониторинга и формирования ледопородного ограждения.

*Ключевые слова:* искусственное замораживание пород, содержание незамороженной воды, математическое моделирование, шахтный ствол, калийный рудник

### Введение

Строительство подземных сооружений в условиях обводненных пород требует использования специальных способов. Одним из таких распространенных способов является искусственное замораживание пород. Суть этого способа заключается в возведении вокруг будущего подземного сооружения защитной конструкции из замороженных пород – ледопородного ограждения (ЛПО) (Рис. 1). При проходке горной выработки ЛПО не допускает ее затопления, а также сдерживает внешнюю нагрузку на стенки выработки до возведения постоянной крепи.

Для температурного мониторинга состояния ЛПО проводят как экспериментальные измерения, так и теоретические расчеты. Первые связаны с замерами температуры по всей глубине замораживаемого массива с помощью установленных с поверхности контрольно-термических (КТ) скважин (Рис. 1). Замеры температуры в КТ скважинах можно осуществлять различными способами, например, с помощью DTS системы [1]. Далее проводятся теоретические расчеты параметров ЛПО, основанные на математическом моделировании искусственного замораживания во всем объеме замораживаемых пород. Параметры математической модели калибруются до получения наилучшего соответствия модельных и экспериментальных температур в местах установки КТ скважин [2]. По результатам моделирования определяется временная динамика основных параметров ЛПО – его толщины, средней температуры и несущей способности.

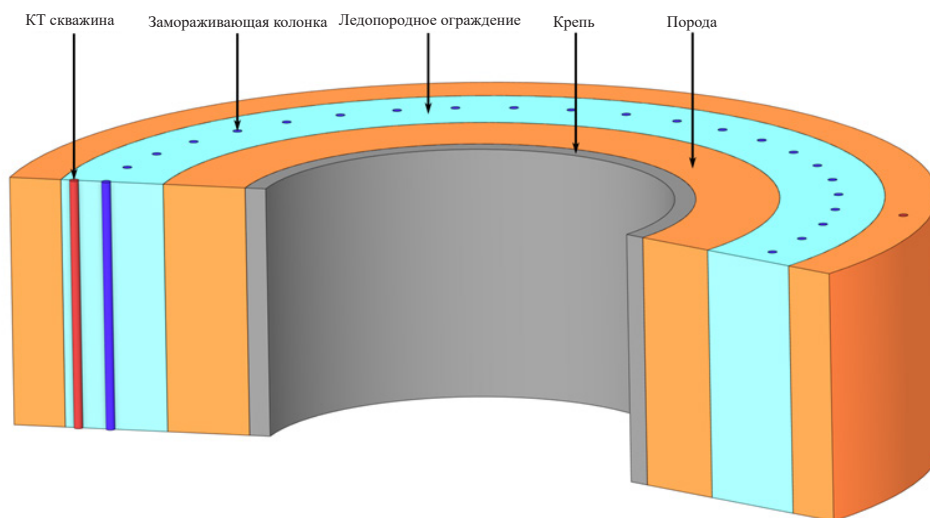


Рис. 1. Схематическое изображение ледопородного ограждения с расположением замораживающих колонок и контрольно-термических (КТ) скважин

Поскольку при мониторинге состояния ЛПО зачастую требуется выдавать ежесуточные отчеты, то для оперативного математического моделирования обычно используют модели с большим количеством допущений. Многие допущения достаточно оправданны, однако определенные могут привести к необходимости частых калибровок параметров модели, направленных на компенсирование возрастающей со временем ошибки модели.

Например, с помощью программы искусственного замораживания пород Frozen Wall, разработанной в Горном институте УрО РАН при участии авторов, проводился мониторинг формирования ЛПО при строительстве скипового и клетового стволов на одном калийном руднике в Республике Беларусь. В ходе мониторинга возникала необходимость в частых калибровках коэффициентов теплопроводности и влагосодержания пород. Без калибровок отклонения между температурами в модели и КТ скважинах достигали более 1 °С, что в случае определения состояния ЛПО является критическим. Значения модельных коэффициентов в различные моменты времени представлены на рисунке 2.

На отклонении модельных и экспериментальных температур сказывается множество факторов: недостаточно точное определение положения замораживающих колонок и КТ скважин; неучтенные факторы при определении исходных теплофизических свойств пород в лабораторных условиях; использование в математической модели упрощенных или неподходящих для определенного типа пород зависимостей теплофизических свойств от температуры. Минимизация первого фактора возможна только при проведении повторных замеров положения замораживающих колонок и КТ скважин для корректировки предыдущих значений. Величина второго фактора напрямую зависит от используемого экспериментального оборудования и постановки эксперимента. Однако в целом лабораторное определение теплофизических свойств мерзлых пород затруднено из-за перераспределения и миграции влаги в породах при их замораживании [3, 4]. При этом общие закономерности замораживания и зависимости теплофизических свойств пород от температуры сохраняются. В этом смысле закладываемые теоретические зависимости

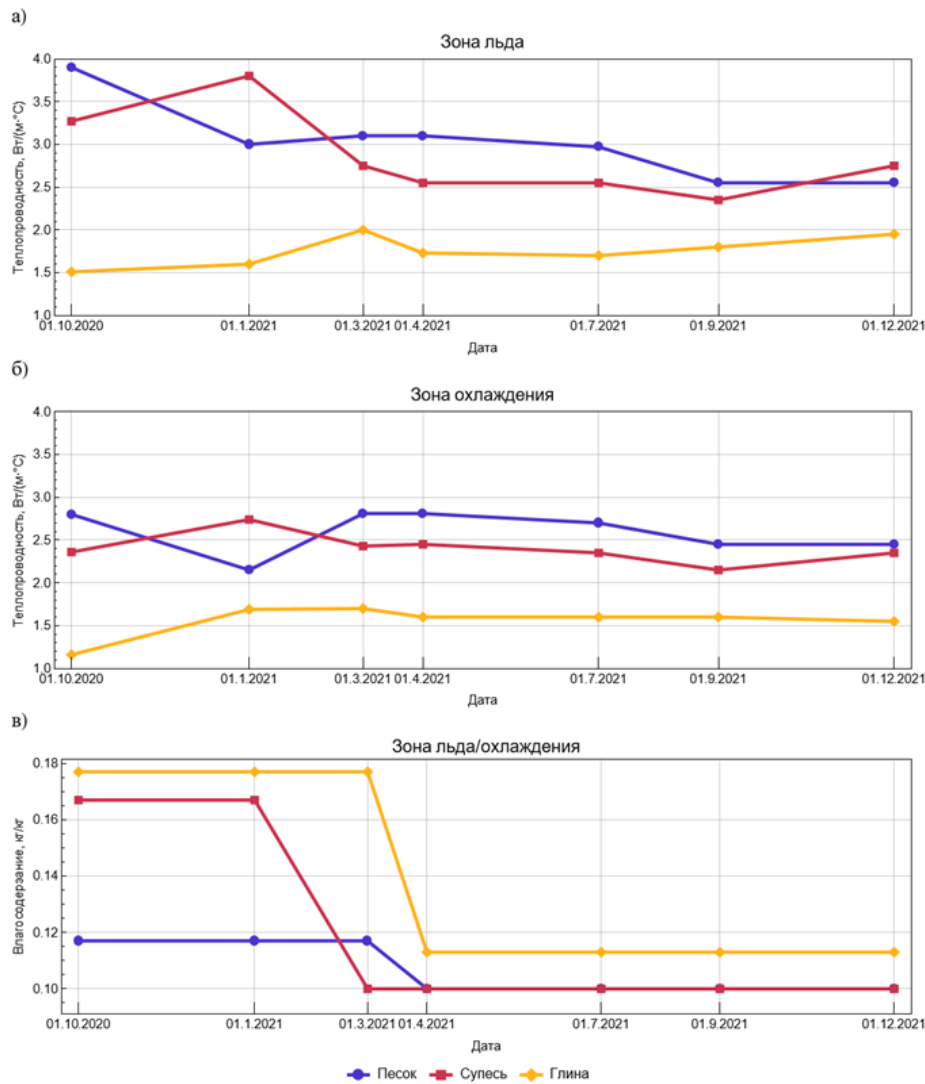


Рис. 2. Калибровка теплопроводности (а, б) и влагосодержания (в) некоторых пород при моделировании их искусственного замораживания для случая мониторинга формирования ЛПО вокруг клетового ствола калийного рудника в Республике Беларусь

теплофизических свойств пород от температуры являются наиболее значимым фактором при формировании математической модели замораживания пород. Важно подобрать такие зависимости, которые позволяют описывать данные натурных измерений во всем диапазоне температур замораживания пород не только качественно, но и количественно, с минимальной погрешностью. С теоретической точки зрения, наиболее важным теплофизическим свойством замораживаемых пород является кривая содержания незамороженной воды, определяющая характер изменения теплофизических и прочностных свойств пород с понижением температуры [5, 6].

В современных исследованиях в области искусственного замораживания пород при проходке стволов шахт практически не затрагивается вопрос обоснованного выбора и настройки моделей, описывающих изменение содержания незамороженной воды. Однако, на наш взгляд, этот вопрос является важным и требует детального анализа. В связи с этим в настоящей работе проведён сравнительный анализ моделей,

количественно описывающих эффект снижения содержания незамороженной воды с понижением температуры. На примере данных мониторинга ЛПО одного строящегося ствола показано, насколько возрастает прогностическая способность теплофизической модели замораживаемых пород при учёте этого эффекта в рамках одной из рассматриваемых моделей.

### Анализ известных в литературе моделей кривой содержания незамороженной воды

Содержание незамороженной воды представляет собой физическую величину, которая при заданной температуре численно равна доле поровой воды в жидком состоянии. Данная величина может определяться в объемных или массовых долях и описывается функциональной зависимостью как минимум от температуры. В рамках данной работы содержание незамороженной воды будет определяться как объем жидкой фазы, отнесенный к  $1 \text{ м}^3$  порового пространства.

В литературе для описания кривой содержания незамороженной воды используется множество различных моделей. Чаще всего применяют эмпирическую степенную функцию [7, 8]:

$$\gamma = \gamma_{res} + (1 - \gamma_{res}) \left[ a |T - T_l|^b \right], \quad (1)$$

где  $\gamma$  – содержание незамороженной воды,  $\text{м}^3/\text{м}^3$ ;  $\gamma_{res}$  – остаточное содержание незамороженной воды,  $\text{м}^3/\text{м}^3$ ;  $T$  – температура влажной породы,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $T_l$  – температура начала замораживания воды,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $a$ ,  $b$  – материальные константы (определяются экспериментально). Следует отметить, что под остаточным содержанием незамороженной воды подразумевается то количество воды, которое никогда (условно) не замерзнет даже при значительно низких температурах.

В последнее десятилетие, помимо степенной функции (1), активно используется модель ван Генухтена-Муалема [9, 10]:

$$\gamma = \gamma_{res} + (1 - \gamma_{res}) \left[ 1 + \left( \frac{T_l - T}{\omega} \right)^{\frac{1}{1-m}} \right]^{-m}, \quad (2)$$

где  $\omega$ ,  $m$  — материальные константы (определяются экспериментально). По своему физическому смыслу параметр  $\omega$  (измеряемый в  $^{\circ}\text{C}$ ) является характерной температурой охлаждения, связанной с наиболее часто встречающимся радиусом пор  $R_{ch}$ , а  $m$  – индекс, указывающий распределение радиусов пор вокруг  $R_{ch}$ . Традиционно  $\gamma$  с помощью модели (2) записывается не в терминах температуры, а в терминах фазовых давлений. Однако в работах [11, 12] показано, что разница фазовых давлений может быть выражена через разницу между температурой начала замораживания воды и фактической температурой породы.

Помимо формул (1) и (2), для описания содержания незамороженной воды иногда применяются экспоненциальные зависимости. Наиболее известными моделями, использующими экспоненциальную функцию, являются модели Михаловского [13], Маккензи [14], Козловского [15]. Они отличаются степенным показателем под экспонентой. Так, к примеру, в рамках модели Козловского разница температур в показателе экспоненты фигурирует в степени  $\varepsilon$ :

$$\gamma = \gamma_{res} + (1 - \gamma_{res}) \exp \left[ - \left( \frac{T_l - T}{\omega} \right)^\varepsilon \right], \quad (3)$$

а в моделях Михаловского и Маккензи – соответственно в первой и во второй степенях.

Иногда содержание незамороженной воды описывается как кусочно-линейная функция от температуры [16]. В некоторых случаях при моделировании теплопереноса в замораживаемых породах предполагается существование четкого фронта фазового перехода поровой воды, что упрощает теоретические выкладки. Такой подход применим, когда в породе содержится малое количество воды, или же когда температурный интервал фазовых превращений воды очень узкий (на несколько порядков меньше характерного перепада температур в решаемой задаче). Это допущение справедливо для песков, однако для глин, суглинков, супесей, мела температурный диапазон замерзания поровой воды обычно очень сильно растянут.

В рамках программы FrozenWall кусочно-линейная зависимость содержания незамороженной воды в породе от температуры задается следующим образом [17]:

$$\gamma = \begin{cases} 1, & T \geq T_l, \\ \frac{T - T_i}{T_l - T_i}, & T_i < T < T_l, \\ 0, & T_i \geq T, \end{cases} \quad (4)$$

где  $T_i$  – температура полной кристаллизации воды, °С. Величина  $T_i$  условна, в действительности при данной температуре может оставаться значительное количество незамороженной воды, но принятой величины может быть достаточно для инженерных расчетов.

Возникает закономерный вопрос: какие зависимости являются более подходящими при описании искусственно замораживаемых пород? Для ответа на этот вопрос был проведен сравнительный анализ моделей 1–3. Модель (4) в сравнительном анализе не участвовала, поскольку, как было указано ранее, ее применимость ограничивается случаем песчаных пород и малого температурного интервала фазовых превращений.

Для анализа было рассмотрено 12 образцов пород (6 образцов глины и 6 образцов песка). Керновый материал был отобран из геологоразведочных скважин на различных глубинах в интервале замораживаемых пород на участке строительства стволов одного калийного рудника в Республике Беларусь. Основные характеристики образцов сведены в таблицу 1.

Экспериментальные данные по содержанию незамороженной воды в рассмотренных образцах пород при девяти различных температурах в интервале от +10 до –20 °С взяты из [18]. Измерения проводились по методике, описанной в источниках [19, 20]. Параметры моделей (1)–(3) определялись методом наименьших квадратов с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 10.

**Основные характеристики образцов пород для анализа моделей зависимости содержания незамороженной воды от температуры**

№ образца	Влагосодержание, кг/кг	Глубина, м	Температура начала замораживания воды, °С
<b>Песок</b>			
1	0,12	15,0	-0,1
2	0,15	23,0	-0,3
3	0,15	32,4	-0,3
4	0,12	35,0	-0,1
5	0,19	71,5	-0,1
6	0,24	73,0	-0,4
<b>Глина</b>			
1	0,35	62,0	-0,3
2	0,36	86,0	-0,5
3	0,36	132,0	-0,4
4	0,22	146,0	-0,1
5	0,33	157,0	-0,7
6	0,26	160,5	-1,0

На рисунке 3 приведено сравнение экспериментально измеренных значений содержания незамороженной воды  $\gamma$  и их прогнозных значений по степенной модели для образцов песка и глины. По оси абсцисс отмечено абсолютное значение температуры  $|T|$  – это сделано для возможности использования логарифмических координат, при этом исследуемый температурный диапазон был в области отрицательных температур. На рисунке 4 сделан такой же анализ модели ван Генухтена-Муалема. На рисунке 5 анализировалась модель Козловского. В целом из рисунков видно, что все три зависимости с приемлемой точностью описывают данные экспериментальных измерений. Для большей части исследуемых образцов пород зависимости на рисунках 3–5, выполненные в логарифмических осях, имеют линейный вид – это указывает на степенной характер зависимости содержания незамороженной воды от температуры. Тем не менее, для некоторых образцов вблизи температуры начала замораживания воды линейный закон искажается.

Наиболее значительные отклонения от линейного вида демонстрируют аппроксимирующие кривые для модели (3), где зависимость  $\gamma(T)$  предполагается экспоненциальной. В этом случае наклон кривых сильно изменяется с понижением температуры породы. Например, для песка (Рис. 5) вблизи точки  $T=T_f$  кривые почти параллельны оси ординат, но при дальнейшем понижении температуры они выполаживаются, формируя протяжённый участок с примерно постоянным наклоном. При температурах ниже  $-5$  °С наклон кривых уменьшается ещё сильнее, и они становятся практически параллельны оси абсцисс.

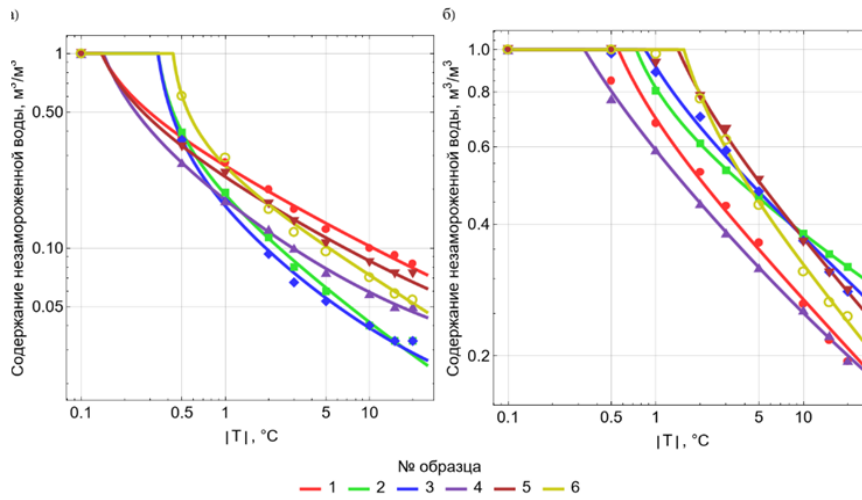


Рис. 3. Зависимость содержания незамороженной воды песка (а) и глины (б) от модуля температуры, степенная модель

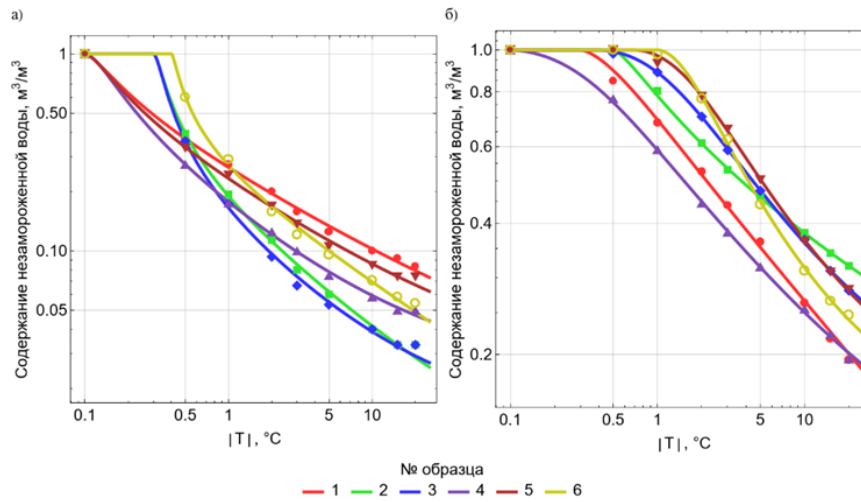


Рис. 4. Зависимость содержания незамороженной воды песка (а) и глины (б) от модуля температуры, модель ван Генухтена-Муалема

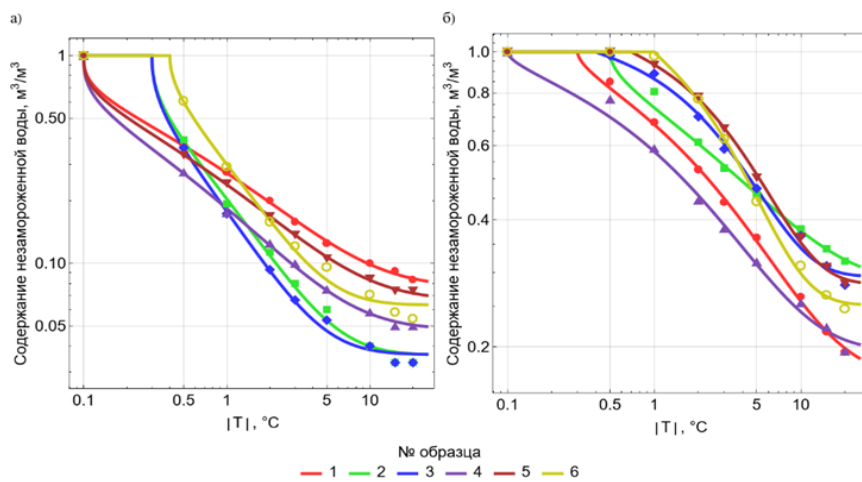


Рис. 5. Зависимость содержания незамороженной воды песка (а) и глины (б) от модуля температуры, модель Козловского

Представленное на рисунке 5 выполаживание кривых  $\gamma(T)$  при температурах ниже  $-5\text{ }^\circ\text{C}$  является типичным для экспоненциальных зависимостей, описывающих содержание незамороженной воды. Характер выполаживания значительно зависит от параметра  $\varepsilon$  в формуле (3). Согласно полученным результатам, для образцов песка этот параметр варьируется в диапазоне от 0,363 до 0,504, а для глины – от 0,511 до 0,920. Модели с фиксированными степенными показателями, представленные в литературе [13, 14], не могут с достаточной точностью аппроксимировать экспериментальные данные для исследуемых типов пород, вероятно, потому что они предназначены для ситуаций с небольшими колебаниями температуры около нуля. В то время как для условий искусственного замораживания пород интерес представляет более широкий диапазон отрицательных температур.

Для глины погрешность аппроксимации в среднем немного выше, чем для песка. Это также подтверждается сравнительным анализом ошибок аппроксимации экспериментальных данных для каждой из моделей, представленным на рисунке 6. В качестве количественных индикаторов использовались среднее абсолютное (MAE) и среднеквадратическое (RMSE) отклонения:

$$\text{MAE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - y_i^*|, \quad (5)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_i^*)^2}, \quad (6)$$

где  $N$  – количество точек;  $y_i^*$  – измеренное значение;  $y_i$  – модельное значение.

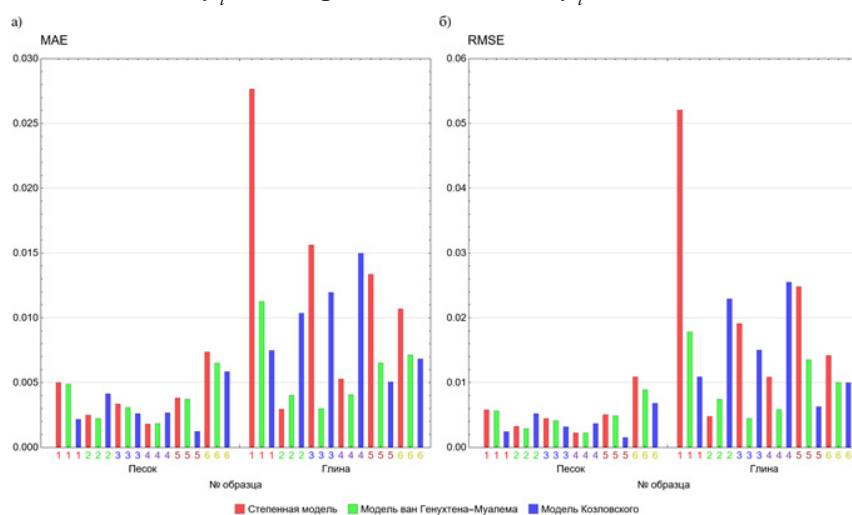


Рис. 6. Средние абсолютные (а) и среднеквадратические (б) ошибки аппроксимирующих выражений для содержания незамороженной воды в породах в рамках степенной модели, модели ван Генухтена-Муалема и модели Козловского

Индикатор RMSE для образцов песка в среднем составляет 0,00528 при применении степенной модели, 0,00477 при применении модели ван Генухтена-Муалема и 0,00381 при применении модели Козловского. Для образцов глины индикатор RMSE в среднем равен 0,021 для степенной модели, 0,00983 для модели ван Генухтена-Муалема и 0,0151 для модели Козловского.

В среднем для глины наибольшая погрешность наблюдается при использовании степенной модели, а наименьшая – при использовании модели ван Генухтена-Муалема. Основное различие между степенной моделью и моделью ван Генухтена-Муалема заключается в степени плавности снижения функции  $\gamma(T)$  при переходе в область температур ниже точки замораживания. Из рисунков 3–4 видно, что модель ван Генухтена-Муалема лучше описывает плавное снижение содержания незамороженной воды, характерное для глин при переходе через область начала замораживания воды. В то время как при степенной модели наблюдается резкий скачок производной  $dy/dT$  в точке начала замораживания воды, что больше характерно для песков, содержащих относительно большое количество свободной воды. Однако при низких температурах ( $-5^\circ\text{C}$  и ниже) значимых различий в характере уменьшения содержания незамороженной воды между моделями нет. При этом модель Козловского при надлежащем подборе ее параметров способна описать как скачкообразное изменение, так и плавное уменьшение  $\gamma(T)$  при переходе в область температур ниже точки замерзания.

В целом проведенный анализ показывает, что все три исследованные модели приемлемо описывают температурную зависимость содержания незамороженной воды. При этом для глин предпочтительнее использование модели ван Генухтена-Муалема. Это закономерно, поскольку материальные параметры данной модели подобраны таким образом, чтобы соответствовать теории Муалема, которая описывает относительную проницаемость пород. Теория Муалема лучше всего подходит для пород с мелкой и средней текстурой (таких как глины, илы и суглинки), которые обладают однородной и четко выраженной пористой структурой. В случае песков, несмотря на относительно небольшие различия между моделями, также предпочтительнее использование модели ван Генухтена-Муалема. Данное утверждение обосновано тем, что из полученных результатов данная модель лучше удовлетворяет экспериментальным данным при температурах ниже  $-5^\circ\text{C}$ . Таким образом, на основании описанных причин можно сделать вывод, что модель ван Генухтена-Муалема наиболее пригодна для описания замораживания пород различного типа. Для подтверждения данного утверждения далее проводится математическое моделирование искусственного замораживания пород различного типа с использованием модели ван Генухтена-Муалема.

### **Математическое моделирование искусственного замораживания пород различного типа**

В качестве объекта исследования рассматривался замораживаемый породный массив вокруг скипового ствола калийного рудника в Республике Беларусь. Геометрически массив представлялся в виде кругового цилиндра. При этом массив разбивался на 17 слоев в вертикальном направлении, каждый из которых соответствовал определенному типу пород. Однако в данной работе рассмотрены только три слоя – песок (глубина залегания 2,1–18 м), мел (глубина залегания 97,3–109,3 м) и глина (глубина залегания 182,1–187,1 м). Замораживание массива осуществлялось 39 замораживающими колонками, которые также представлены в виде круговых цилиндров с одинаковым радиусом (Рис. 7). Отклонения колонок от вертикального направления учитывались в соответствии с результатами проведенных инклинометрических исследований.

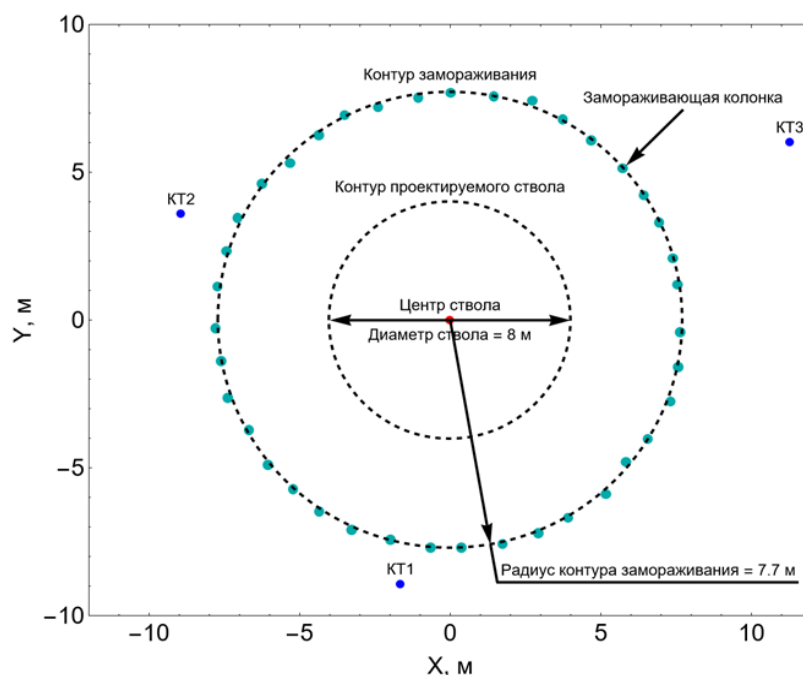


Рис. 7. Расположение замораживающих колонок и КТ скважин вокруг скипового ствола моделируемого рудника в слое мела

Принималось, что в замораживающих колонках циркулирует с постоянной скоростью и температурой хладоноситель рассольного типа. График изменения со временем суммарного по всем колонкам расхода и температуры рассола представлен на рисунке 8. Также на этом графике определен рассмотренный временной период замораживания: от 0 до 180 суток с начала замораживания. Следует отметить, что рассмотренный период включал две стадии замораживания: активную (от 0 до 100 суток), при которой температура рассола постепенно понижалась до проектных значений, и пассивную (времена более 100 суток), при которой происходило поддержание сформированного ЛПО.

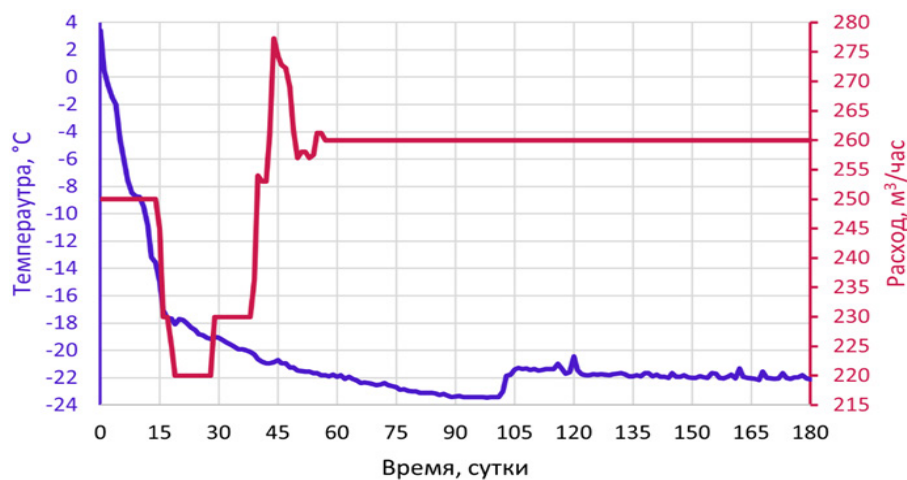


Рис. 8. Температура и расход рассола в замораживающих колонках

Мониторинг за состоянием формируемого ЛПО осуществлялся с помощью трех КТ скважин, расположение которых представлено на рисунке 7. Как и в случае с замораживающими колонками, отклонение КТ скважин от вертикального направления учитывалось в соответствии с результатами инклинометрических исследований.

При разработке математической модели искусственного замораживания пород делалось допущение о локальном термодинамическом равновесии фаз (сухого скелета, воды и льда) в каждом элементарном объеме породы. При этом перенос тепла осуществляется только за счет кондуктивного теплопереноса. Конвективный теплоперенос за счет движения поровой воды не рассматривался, т.к. исследуемые грунты являются слабопроницаемыми. Вертикальные теплоперетоки также не рассматривались в силу допущения о достаточной протяженности слоев в вертикальном направлении и однородности теплофизических свойств по вертикали для каждого отдельного слоя породы. Выделение скрытой теплоты учитывалось за счет процесса фазового перехода поровой воды в лед. Однако эффект переохлаждения поровой воды, характерный при замораживании пород [3, 21], в работе не рассматривался. Также не учитывались теплопритоки, создаваемые от проходки ствола, которая началась через 90 суток после начала замораживания. Данное допущение связано с тем, что теплопритоки от ствола оказывают слабое влияние на температуры в местах расположения КТ скважин. Породы принимались влагонасыщенными.

В силу принятых допущений, задача о замораживании пород была сведена к рассмотрению плоского горизонтального среза слоя породы, а распределение нестационарного поля температуры описывалось уравнением баланса энергии в срединном в следующем виде:

$$\left( \rho c + \rho_w L n \frac{\partial \gamma}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (7)$$

где  $\rho, \rho_w$  – плотность влажной породы и воды, кг/м<sup>3</sup>;  $c$  – удельная теплоемкость влажной породы при постоянном давлении, Дж/(кг·°C);  $L$  – скрытая удельная теплота фазового перехода воды в лед, Дж/кг;  $n$  – пористость породы, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $T$  – температура породы, °C;  $t$  – время, с;  $\lambda$  – теплопроводность влажной породы, Вт/(м·°C).

Теплопроводность и удельная теплоемкость влажной породы определялись из следующих формул:

$$\lambda = \lambda_s^{1-n} \lambda_w^{n\zeta} \lambda_i^{n\zeta(1-\gamma)}, \quad (8)$$

$$\rho c = (\rho c)_s (1-n) + n [(\rho c)_i \gamma + (\rho c)_l (1-\gamma)], \quad (9)$$

где индекс «s» соответствует сухому скелету, индекс «w» – воде, а индекс «i» – льду. Величина  $\zeta$  в (8) представляет из себя поправочный коэффициент, учитывающий перераспределение влаги в породе при ее замораживании. Ранее аналог формулы (8) был представлен авторами в работе [20]. Данный аналог отличался от формулы (8) тем, что поправочный коэффициент также входил в степень у теплопроводности сухого скелета  $\lambda_s$ . Однако в данной работе при калибровке модели замораживания пород было установлено, что наилучшее соответствие между модельными и экспериментальными температурами достигается при расчете теплопроводности в форме (8).

Полученные зависимости содержания незамороженной воды, теплопроводности и удельной теплоемкости влажных пород от температуры представлены на рисунках 9–11. Остальные параметры пород представлены в таблице 2. Следует отметить, что на рисунке 9 маркерами также отмечены экспериментальные замеры содержания незамороженной воды.

Таблица 2

**Параметры пород, используемые для моделирования искусственного замораживания**

Параметр	Песок	Мел	Глина
<b>Теплофизические свойства пород</b>			
Плотность влажной породы ( $\rho$ ), кг/м <sup>3</sup>	2100	2180	2070
Плотность сухого скелета ( $\rho_s$ ), кг/м <sup>3</sup>	2467	2710	2814
Плотность воды ( $\rho_w$ ), кг/м <sup>3</sup>	1000		
Плотность льда ( $\rho_i$ ), кг/м <sup>3</sup>	918		
Теплопроводность сухого скелета ( $\lambda_s$ ), Вт/(м·°С)	3,4	3,9	2,55
Теплопроводность воды ( $\lambda_w$ ), Вт/(м·°С)	0,56		
Теплопроводность льда ( $\lambda_i$ ), Вт/(м·°С)	2,2		
Удельная теплоемкость сухого скелета ( $c_s$ ), Дж/(кг·°С)	692	798	757
Удельная теплоемкость воды ( $c_w$ ), Дж/(кг·°С)	4200		
Удельная теплоемкость льда ( $c_i$ ), Дж/(кг·°С)	2100		
Влагосодержание ( $w$ ), кг/кг	0,12	0,14	0,2
Пористость ( $n$ ), м <sup>3</sup> /м <sup>3</sup>	0,25	0,31	0,41
Скрытая удельная теплота фазового перехода, Дж/кг	333500		
Поправочный коэффициент теплопроводности ( $\zeta$ )	0,7	1	0,6
<b>Параметры модели ван Генухтена-Муалема</b>			
Температура начала замораживания воды ( $T_l$ ), °С	-0,08	-0,1	-0,65
Остаточное содержание незамороженной воды ( $\gamma_{res}$ ), м <sup>3</sup> /м <sup>3</sup>	0,03	0,02	0,10
Характерная температура охлаждения ( $\omega$ ), °С	0,088	0,19	1,13
Индекс распределения радиусов пор ( $m$ )	0,55	0,47	0,44

Уравнение (7) замыкается начальными и граничными условиями:

$$T|_{t=0} = T_0 \quad , \quad (10)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_{fp}} = a_{fp} (T - T_{fp}) \quad , \quad (11)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Omega_{out}} = 0 \quad , \quad (12)$$

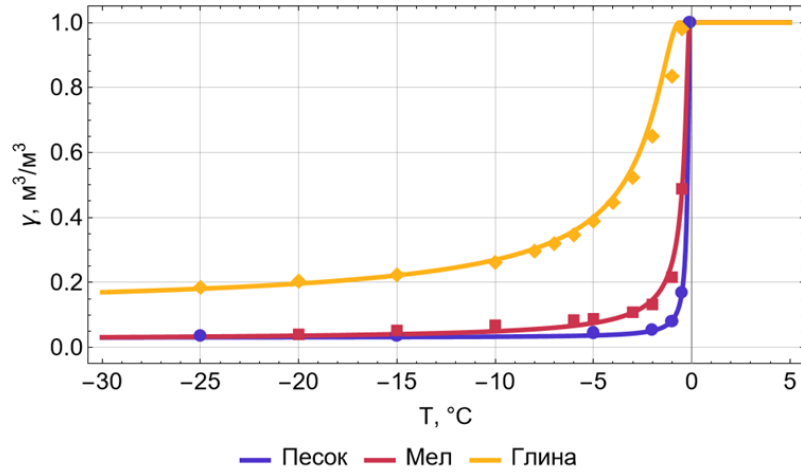


Рис. 9. Зависимость содержания незамороженной воды от температуры для моделируемых пород (маркерами отмечены экспериментальные замеры)

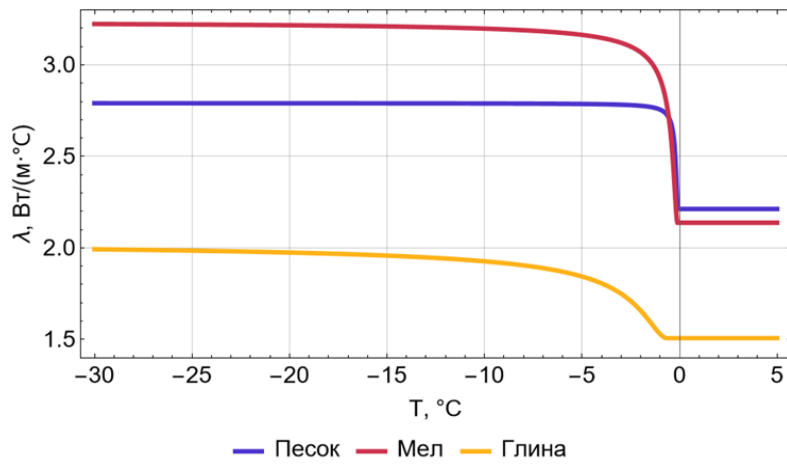


Рис. 10. Зависимость теплопроводности влажной породы от температуры для моделируемых пород

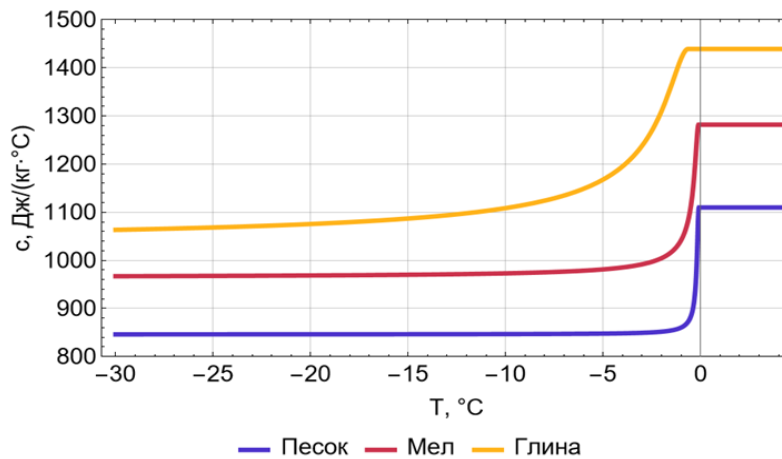


Рис. 11. Зависимость удельной теплоемкости влажной породы от температуры для моделируемых пород

где  $T_0$  – температура породы до начала замораживания, °С;  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к границе, м;  $a_{fp}$  – коэффициент теплоотдачи на границе с замораживающими колонками, Вт/(м<sup>2</sup>·°С);  $T_{fp}$  – температура рассола в замораживающих колонках, °С;  $\Omega_{fp} = \cup \Omega_{fpi}$  – границы всех замораживающих колонок  $i = 1, \dots$ ;  $\Omega_{out}$  – внешняя граница области моделирования.

Необходимо отметить, что для подачи и отвода рассола в замораживающих колонках использовались коаксиальные трубки, состоящие из внутренней и внешней проточной областей [22]. В этом случае для расчета коэффициента теплоотдачи на границе с замораживающими колонками афр использовались следующие формулы [23]:

$$a_{fp} = (a_{fp1}^3 + a_{fp2}^3)^{1/3}, \quad (13)$$

$$a_{fp1} = \frac{\lambda_b}{d_e} (3,66 + 1,2a^{0,5}), \quad (14)$$

$$a_{fp2} = \frac{\lambda_b}{d_e} 1,615 (1 + 0,14a^{1/3}) \sqrt{\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot d_e / L_{fp}}, \quad (15)$$

$$d_e = d_{out} - d_{in}, \quad (16)$$

$$a_e = \frac{d_{in}}{d_{out}}, \quad (17)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_b v_b d_e}{\mu_b}, \quad (18)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu_b \tilde{n}_b}{\lambda_b}, \quad (19)$$

где  $\lambda_b$  – теплопроводность рассола (теплоносителя), Вт/(м·°С);  $d_e$  – эквивалентный (гидравлический) диаметр, м; Re – число Рейнольдса; Pr – число Прандтля;  $L_{fp}$  – длина замораживающей колонки, м;  $\rho_b$  – плотность рассола, кг/м<sup>3</sup>;  $v_b$  – скорость рассола, м/с;  $\mu_b$  – динамическая вязкость рассола, Па·с;  $c_b$  – удельная теплоемкость рассола, Дж/(кг·°С). Следует отметить, что формулы (13)–(15) справедливы только для ламинарного режима течения, которое характерно для данного случая. В таблице 3 представлены задаваемые параметры замораживающих колонок.

Численная реализация модели основана на пространственной дискретизации методом конечных объемов и временной дискретизации неявной схемой Эйлера. Численные схемы реализованы в рамках разработанного программного комплекса TES, позволяющего решать уравнения переноса произвольного типа. Вычислительные сетки состояли из треугольных элементов со сгущением вблизи замораживающих колонок. Шаг сетки на замораживающих колонках составлял 0,02 м, между замораживающими колонками и центром ствола – 0,6 м, на удалении от замораживающих колонок – 3 м, количество элементов сетки – 30 тыс.

### Результаты моделирования

На рисунках 12–13 представлены модельные ( $T_m$ ) и экспериментальные ( $T_e$ ) температуры в КТ скважинах. Температуры  $T_e$  на данных рисунках отмечены

Параметры замораживающей колонки

Параметр	Значение
Длина колонки ( $L_{fp}$ ), м	190
Диаметр подающей (внутренней) области ( $d_{in}$ ), м	0,146
Диаметр питающей (внешней) области ( $d_{out}$ ), м	0,103
Плотность рассола ( $\rho_b$ ), кг/м <sup>3</sup>	1280
Теплопроводность рассола ( $\lambda_b$ ), Вт/(м·°C)	0,49
Удельная теплоемкость рассола ( $c_b$ ), Дж/(кг·°C)	2659
Динамическая вязкость теплоносителя ( $\mu_b$ ), Па·с	0,02128

маркерами. Также на рисунках 12–13 представлены рассогласования между  $T_m$  и  $T_e$ . На рисунках не представлены первые 49 суток замораживания, т.к. в этот период КТ скважины еще не были смонтированы.

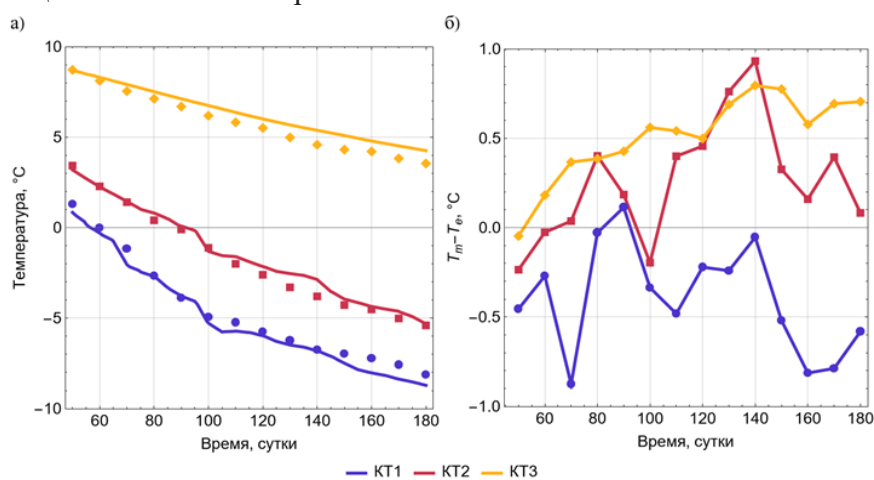


Рис. 12. Экспериментальные и модельные температуры в КТ скважинах (а) и их отклонение (б) для песка

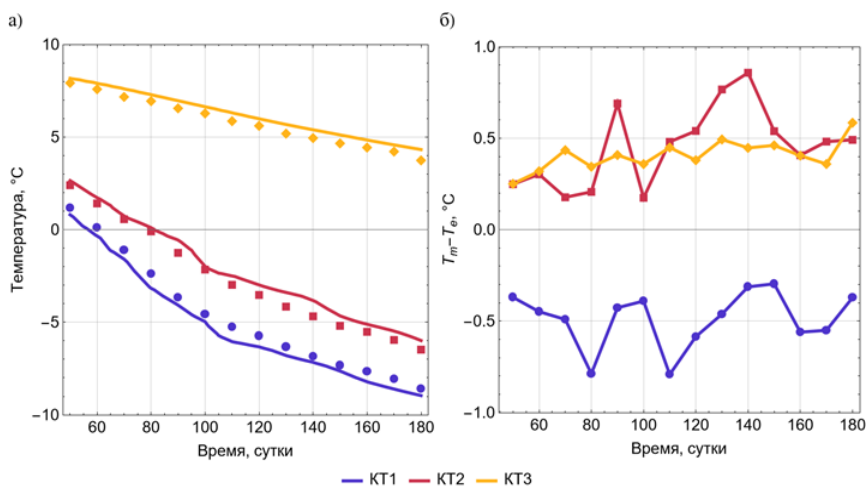


Рис. 13. Экспериментальные и модельные температуры в КТ скважинах (а) и их отклонение (б) для мела

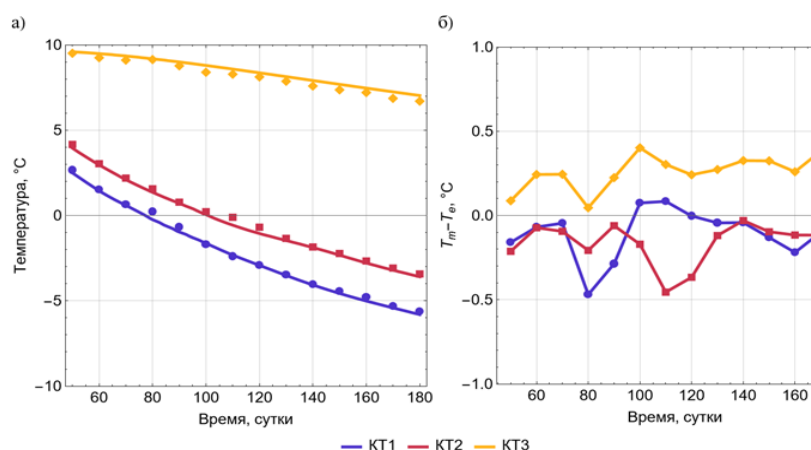


Рис. 14. Экспериментальные и модельные температуры в КТ скважинах (а) и их отклонение (б) для глины

Как упоминалось во введении, при моделировании ЛПО критическим рассогласованием модельных и экспериментальных температур принимается величина более 1 °С. Из полученных результатов можно видеть, что для всех моделируемых пород удалось достичь рассогласования менее 1 °С по всем КТ скважинам. При этом в случае глины на всех КТ скважинах наблюдается рассогласование менее 0,5 °С. Следует уточнить, что данные результаты получены без каких-либо промежуточных калибровок модели по ходу расчета (ранее при использовании программы FrozenWall требовалось до 6 промежуточных калибровок). Средние значения отклонений за весь временной период для каждой КТ скважины представлены в таблице 4. Из данной таблицы видно, что по средним значениям рассогласование модели и эксперимента для песка и мела близко, тогда как у глины рассогласование значительно меньше. Полученные результаты подтверждают, что модель ван Генухтена-Муалема лучше всего описывает глинистые породы. Также необходимо прокомментировать наличие разного знака рассогласования у различных КТ скважин. Предполагается, что это связано с локальными неоднородностями теплофизических свойств породы в местах установки скважин. Поэтому фактические свойства породы вблизи скважин могут отличаться от задаваемых однородных свойств в модели в большую или меньшую сторону. В зависимости от этого и получается различный знак на каждой КТ скважине.

Таблица 4

Среднее рассогласование модельных и экспериментальных температур

Порода	КТ-1	КТ-2	КТ-3
Песок	-0,40 °С	0,26 °С	0,51 °С
Мел	-0,39 °С	0,45 °С	0,41 °С
Глина	-0,11 °С	-0,16 °С	0,26 °С

При этом следует отметить, что для всех пород характерны значительные скачки рассогласования между моделью и экспериментом. Наибольшие скачки наблюдаются на КТ-1 и КТ-2, поскольку на данных КТ поровая вода проходит через фазовый переход, вследствие чего изначальная неоднородность свойств пород усиливается

перераспределением влаги в них. При этом картина замораживания приобретает сложный характер. Однако важным результатом является то, что после прохождения точки начала фазового перехода рассогласования не имеют тенденции к постепенному росту и колеблются около некоторого среднего значения. Однако интересна ситуация с КТ-3 у песка. Для данной КТ характерен монотонный рост рассогласования первые 100 суток, несмотря на то что данная КТ находится вдали от зоны активного фазового превращения воды в лед. Ожидалось, что у песка на КТ-3 рассогласование, как и в случае с мелом и глиной, будет колебаться около среднего значения на всем временном промежутке. Такое поведение рассогласования на КТ-3 у песка можно объяснить более интенсивным перераспределением влаги при замораживании (в сравнении с мелом и глиной), которое не удастся корректно учесть с помощью упрощенного подхода в формуле (8). Это косвенно подтверждается тем, что после 100 суток рассогласование на КТ-3 у песка приобретает колебательный характер, как и у других пород. Это можно связать с завершением процесса интенсивного перераспределения влаги вблизи КТ-3 и переходом системы замораживания на пассивный режим работы.

Обобщая полученные результаты, можно сказать, что математическую модель искусственного замораживания пород с использованием модели ван Генухтена-Муалема для описания зависимости содержания незамороженной воды от температуры рекомендуется применять для практических случаев замораживания пород вокруг строящихся шахтных стволов рудников. Представленная модель является модификацией ранее использованной модели в программе FrozenWall. В данной программе содержание незамороженной воды ранее моделировалось с помощью кусочно-линейной модели. Смена кусочно-линейной модели на модель ван Генухтена-Муалема позволило без дополнительных калибровок начальных параметров в процессе расчета достичь приемлемого рассогласования между модельными и экспериментально замеренными температурами на длительном промежутке времени (более 180 суток). Тем самым было в несколько раз увеличено «время жизни» теплофизических моделей замораживаемых слоев породного массива и сокращены временные затраты инженеров и исследователей на перенастройку моделей.

### **Заключение**

В работе были рассмотрены три различные модели содержания незамороженной воды, используемые при описании замораживания влагонасыщенных пород: степенная модель; модель ван Генухтена-Муалема; модель Козловского. Проведен сравнительный анализ применимости моделей для описания лабораторных данных содержания незамороженной воды в образцах глины и песка. По результатам анализа установлено, что все рассмотренные модели при должном подборе их параметров могут с приемлемой точностью использоваться для описания данных лабораторных измерений. Однако в случае глины модель ван Генухтена-Муалема дает наилучшее соответствие с замерами. В случае песка при температурах ниже  $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$  модель ван Генухтена-Муалема также является наиболее предпочтительной.

Преимущества применения модели ван Генухтена-Муалема для описания замораживания влагонасыщенных пород также показаны в работе при рассмотрении практической задачи по расчету искусственного замораживания песка, мела и глины для условий шахтного ствола калийного рудника. Полученные модельные температуры сравнивались с данными экспериментальных измерений. Для всех рассмотренных

слоев пород удалось обеспечить рассогласования модельных и измеренных температур не более 1 °С по абсолютной величине на продолжительном временном интервале (180 суток) без дополнительных калибровок модели.

Основной практический вывод работы заключается в следующем: показана важность учета фактических особенностей кривой остаточной влажности замораживаемых пород. Модель ван Генухтена-Муалема способна адекватно воспроизводить эти особенности для широкого круга типов пород в интервалах замораживания. Учет данного фактора позволяет существенно увеличить срок актуальности теплофизических моделей замораживаемых сред и сократить временные затраты на их повторную калибровку по данным натурного мониторинга формирования ледопородного ограждения.

### Библиографический список

1. *Levin L., Golovaty I., Zaitsev A., Pugin A., Semin M.* Thermal monitoring of frozen wall thawing after artificial ground freezing: Case study of Petrikov Potash Mine // *Tunnelling and Underground Space Technology* – 2021 – Vol. 107 – article № 103685. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2020.103685>
2. *Левин Л. Ю., Семин М. А., Паршаков О. С.* Совершенствование методов прогнозирования состояния ледопородного ограждения строящихся шахтных стволов с использованием распределенных измерений температуры в контрольных скважинах // *Записки Горного института* – 2019 – Т. 237 – С. 268–274. <https://doi.org/10.31897/PMI.2019.3.274>
3. *Цытович Н. А.* Механика мерзлых грунтов: Общая и прикладная. М.: Высшая школа, 1973. – 446 с.
4. *Чеверев В. Г., Брушков А. В., Половков С. А., Покровская Е. А., Сафронов Е. В.* Анализ представлений о механизме криогенной миграции воды в промерзающих грунтах // *Криосфера Земли* – 2021 – Т. 25 – № 5 – С. 3–12. <https://doi.org/10.15372/KZ20210501>
5. *Nishimura S., Gens A., Olivella S., Jardine R. J.* THM-coupled finite element analysis of frozen soil: formulation and application // *Géotechnique* – 2009 – Vol. 59 – № 3 – P. 159–171. <https://doi.org/10.1680/geot.2009.59.3.159>
6. *Semin M., Levin L., Bublik S., Brovka A., Dedyulya I.* Influence of soil salinity on the bearing capacity of the frozen wall // *Frattura ed Integrità Strutturale* – 2024 – Vol. 18 – № 69. P. 106–114. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.69.08>
7. *Anderson D. M., Tice A. R.* Predicting unfrozen water contents in frozen soils from surface area measurements // *Journal of Terramechanics* – 1972 – Vol. 393 – № 2 – P. 12–18.
8. *Jin X., Yang W., Gao X., Zhao J., Li Z., Jiang J.* Modeling the Unfrozen Water Content of Frozen Soil Based on the Absorption Effects of Clay Surfaces // *Water Resources Research* – 2020 – Vol. 56 – № 12 – article № e2020WR027482 <https://doi.org/10.1029/2020WR027482>
9. *Van Genuchten M. Th.* A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils // *Soil science society of America journal* – 1980 – Vol. 44, № 5 – P. 892–898. <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x>
10. *Mualem Y.* A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media // *Water Resources Research* – 1976 – Vol. 12 – № 3 – P. 513–522. <https://doi.org/10.1029/WR012I003P00513>
11. *Zhou M. M., Meschke G.* A three-phase thermo-hydro-mechanical finite element model for freezing soils // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* – 2013 – Vol. 37 – № 18 – P. 3173–3193. <https://doi.org/10.1002/nag.2184>
12. *Vitel M., Rouabhi A., Tijani M., Guérin F.* Modeling heat and mass transfer during ground freezing subjected to high seepage velocities // *Computers and Geotechnics* – 2016 – Vol. 73 – P. 1–15. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2015.11.014>

13. *Michalowski R. L.* A constitutive model of saturated soils for frost heave simulations // *Cold Regions Science and Technology* – 1993 – Vol. 22 – № 1 – P. 47–63. [https://doi.org/10.1016/0165-232X\(93\)90045-A](https://doi.org/10.1016/0165-232X(93)90045-A)
14. *McKenzie J. M., Voss C. I., Siegel D. I.* Groundwater flow with energy transport and water–ice phase change: Numerical simulations, benchmarks, and application to freezing in peat bogs // *Advances in Water Resources* – 2007 – Vol. 30 – № 4 – P. 966–983. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2006.08.008>
15. *Kozłowski T.* A semi-empirical model for phase composition of water in clay–water systems // *Cold Regions Science and Technology* – 2007 – Vol. 49 – № 3 – P. 226–236. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2007.03.013>
16. *Zueter A. F., Xu M., Alzoubi M. A., Sasmito A. P.* Development of conjugate reduced-order models for selective artificial ground freezing: Thermal and computational analysis // *Applied Thermal Engineering* – 2021 – Vol. 190. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2021.116782>
17. *Семин М. А., Зайцев А. В., Левин Л. Ю.* Численное решение обратной задачи Стефана при анализе искусственного замораживания породного массива // *Математическое моделирование* – 2021 – Т. 33 – № 2 – С. 93–108. <https://doi.org/10.1016/10.20948/mm-2021-02-07>
18. Отчет о НИР № 60557/85/2017 по объекту «Строительство горно-обоганительного комплекса мощностью от 1.1 до 2.0 млн. тонн хлорида калия в год на сырьевой базе Нежинского (восточная часть) участка Старобинского месторождения калийных солей. Пермь, ГИ УрО РАН, 2017. 85 с.
19. *Бровка Г. П.* Взаимосвязанные процессы тепло- и массопереноса в природных дисперсных средах. Минск: Беларус. навука, 2011 – 363 с.
20. *Bublik S., Semin M., Levin L., Brovka A., Dedyulya I.* Experimental and Theoretical Study of the Influence of Saline Soils on Frozen Wall Formation // *Applied Sciences* – 2023 – Vol. 13 – № 18 – article № 10016. <https://doi.org/10.3390/app131810016>
21. *Kozłowski T.* Some factors affecting supercooling and the equilibrium freezing point in soil–water systems // *Cold Regions Science and Technology* – 2009 – Vol. 59 – № 1 – P. 25–33. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2009.05.00>
22. *Семин М. А., Головатый И. И., Бородавкин Д. А.* Анализ методов расчета теплоотдачи между хладоносителем в замораживающей колонке и окружающими породами // *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов* – 2022 – Т. 333 – № 3 – С. 154–163. <https://doi.org/10.18799/24131830/2022/3/3032>
23. *Семин М. А., Левин Л. Ю.* Методы расчета искусственного замораживания пород при строительстве шахтных стволов. М.: Научный мир, 2021 – 152 с.

**Благодарности:**

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (рег. номер НИОКТР: 126012716039-2).

**Для цитирования:**

Бублик С.А., Семин М.А. О влиянии моделей кривой содержания незамороженной воды на точность прогноза температурного поля в искусственно замораживаемом породном массиве // *Вестник Пермского федерального исследовательского центра*. – 2026. – № 2. – С. 63–82. <https://doi.org/10.7242/2658-705X/2026.2.5>

**Сведения об авторах:**

*Бублик Сергей Анатольевич*, младший научный сотрудник, Горный институт УрО РАН – филиал Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН («ГИ УрО РАН»), 614007, г. Пермь, ул. Сибирская, д. 78а; e-mail: [serega-bublik@mail.ru](mailto:serega-bublik@mail.ru), ORCID: 0000-0002-2084-0002

*Семин Михаил Александрович*, доктор технических наук, заведующий лабораторией Математического моделирования геотехнических процессов, ученый секретарь, «ГИ УрО РАН»; e-mail: [seminma@inbox.ru](mailto:seminma@inbox.ru), ORCID: 0000-0001-5200-7931

**ON THE INFLUENCE OF UNFROZEN WATER CONTENT CURVE MODELS  
ON THE ACCURACY OF TEMPERATURE FIELD PREDICTION  
IN ARTIFICIAL GROUND FREEZING**

**Bublik S.A., Semin M.A.**

*Mining Institute UB RAS, Perm*

Three different models of the content of unfrozen water used in the description of freezing of water-saturated rock masses are considered in the work: the power-law model; the van Genuchten-Mualem model; and the Kozlovsky model. An analysis of the applicability of these models for interpreting laboratory measurement data from sand and clay samples was conducted. It was established that all models describe the experimental data with acceptable accuracy; however, the van Genuchten-Mualem model generally yields the best results, particularly for clay. The validity of applying this model under field conditions was confirmed by mathematical simulation of artificial ground freezing in the shaft of a potash mine. It was found that, over extended periods (six months or more), the discrepancies between the calculated and experimental temperatures in monitoring boreholes remain negligible. This justifies recommending the van Genuchten-Mualem model for simulating artificial freezing of various rock types in monitoring tasks and for designing frozen wall

**Keywords:** *artificial ground freezing, unfrozen water content, mathematical simulation, mine shaft, potash mine*

*Поступила в редакцию: 26.03.2026*

*Принята к публикации: 17.06.2026*