

## ПАССИВНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА\*

С.В. Лекомцев, *Институт механики сплошных сред УрО РАН*

### Для цитирования:

Лекомцев С.В. Пассивное демпфирование колебаний пластины из функционально-градиентного материала // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. – 2025. – № 4. – С. 87–93. <https://doi.org/10.7242/2658-705X/2025.4.8>

Использование функционально-градиентных материалов в smart-системах на основе пьезоэлементов позволяет получить ряд дополнительных преимуществ по сравнению с однородными металлами и сплавами. Гладкое изменение механических характеристик конструкции вдоль одного или нескольких направлений предоставляет возможность оптимизации её динамических параметров на этапе проектирования при заданных ограничениях на габариты и массу изделия. В данной работе с применением метода конечных элементов исследованы собственные и вынужденные установившиеся гармонические колебания прямоугольной функционально-градиентной пластины с пьезоэлектрическим элементом, соединённым с внешней электрической  $RL$ -цепью. В примерах проанализировано влияние показателя объёмной доли функционально-градиентного материала на коэффициент электромеханической связи, собственные частоты и амплитуду колебаний. Показана возможность их изменения в пределах, достаточных для безопасной эксплуатации конструкции в окрестности первоначального резонанса.

**Ключевые слова:** собственные колебания, пьезоэлементы, электрическая цепь, метод конечных элементов.

### Введение

Современные машиностроительные конструкции эксплуатируются в условиях интенсивных внешних воздействий различной природы: механических, температурных, центробежных, аэро- или гидродинамических. Необходимость их

безопасного использования накладывает повышенные требования на прочностные характеристики изделий, достичь которых возможно с применением функционально-градиентных материалов (ФГМ) [1]. Их концепция была впервые предложена ещё в 1970-х годах, но практическое во-

\* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124020700047-3) и в процессе реализации программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 года (задачи пассивного демпфирования колебаний).

площадь она получила лишь в следующем десятилетии во время разработки японскими учёными теплозащитных покрытий для аэрокосмической промышленности [2]. Возможность плавного изменения состава или структуры материала вдоль определённого направления позволяет на этапе проектирования оптимизировать его, чтобы обеспечить необходимые прочностные и жаропрочные свойства конструкции для конкретных условий нагружения. Сочетание в одном композите преимуществ керамики, металлов и даже органических соединений делает возможным использование ФГМ в атомной [1], аэрокосмической [2–4] и энергетической [4] промышленности, металлообработке [5], биомедицине [6], строительстве [7, 8].

Особую значимость в авиационно-космической технике имеет проблема управления вибрациями, поскольку широко используемые тонкостенные элементы летательных аппаратов критически уязвимы к резонансным явлениям. Традиционные пассивные методы виброзащиты и демпфирования зачастую недостаточны или ведут к неоправданному утяжелению конструкции. В настоящее время в литературе активно освещается ещё один способ пассивного подавления колебаний [9, 10]. Он основан на прикреплении к поверхности тела пьезоэлементов и подключении к ним внешних электрических цепей. Ключевые идеи данной техники были заложены ещё во второй половине XX века [11], но только в последние десятилетия современные электронные компоненты позволили раскрыть её потенциал. На сегодняшний день существует множество конфигураций электрических цепей, предназначенных для шунтирования пьезоэлементов: после-

довательные, параллельные и каскадные  $RL$ -цепи, цепи с отрицательной ёмкостью, переключаемые цепи и другие [10].

Функционально-градиентные материалы открывают широкие возможности для создания конструкций с регулируемой жёсткостью и спектром собственных частот колебаний за счёт подбора состава материала. Их применение в smart-системах на основе пьезоэлементов позволяет получить дополнительные преимущества относительно традиционных металлов и сплавов, некоторые из которых продемонстрированы в данной работе с помощью численного моделирования. В приведённых ниже примерах рассматриваются колебания жёстко закреплённой по всем краям прямоугольной пластины размерами  $150 \times 115 \times 0.92$  мм (длина  $\times$  ширина  $\times$  толщина) из функционально-градиентного материала, представляющего собой комбинацию сплавов титана Ti-6Al-4V и алюминия Д16Т. По центру пластины располагается прямоугольный пьезокерамический элемент ЦТС-19 ( $50 \times 20 \times 0.3$ ), подключённый к пассивной электрической  $RL$ -цепи, состоящей из последовательно соединённых сопротивления ( $R$ ) и катушки индуктивности ( $L$ ).

### Математическая постановка

Собственные и вынужденные установившиеся гармонические колебания кусочно-однородного тела объёмом  $V = V_s \cup V_p$ , состоящего из упругой ( $V_s$ ) и пьезоэлектрической областей ( $V_p$ ), описываются вариационными уравнениями (1) и (2). Они формулируются известным образом на основе трёхмерных соотношений линейной теории упругости и электроупругости [12, 13].

$$\begin{aligned}
 & -\lambda^2 \int_V \delta \mathbf{d}^T \rho \mathbf{d} dV + i\lambda \int_V \delta \mathbf{d}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d} dV + \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{e} \mathbf{E} - \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) dV - \\
 & - \frac{1}{\lambda^2 L} \Delta \varphi_L \delta \varphi + \frac{1}{i\lambda R} \Delta \varphi_R \delta \varphi = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & -\Omega^2 \int_V \delta \mathbf{d}^T \rho \mathbf{d} dV + i\Omega \int_V \delta \mathbf{d}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d} dV + \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{e} \mathbf{E} - \delta \mathbf{E}^T \mathbf{e}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \mathbf{E}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}) dV - \\
 & -\frac{1}{\Omega^2 L} \Delta \varphi_L \delta \varphi + \frac{1}{i\Omega R} \Delta \varphi_R \delta \varphi = \int_{S_\sigma} \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{sf} dS.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь:  $\lambda = \omega + i\gamma$  – характеристический показатель;  $\omega$  – собственная частота колебаний;  $\gamma$  – величина, отвечающая за демпфирование системы;  $i$  – мнимая единица;  $\Omega$  – частота внешнего гармонического воздействия;  $\mathbf{d}$  – вектор перемещений;  $\rho$  – плотность материала кусочно-однородного тела;  $\boldsymbol{\mu}$  – матрица, содержащая коэффициенты демпфирования;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – вектор, содержащий компоненты тензора малых деформаций;  $\mathbf{C}$  – матрица упругих констант;  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  – вектор напряжённости электрического поля;  $\varphi$  – электрический потенциал;  $\mathbf{e}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – матрицы пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов;  $L$  – индуктивность элемента электрической цепи;  $R$  – сопротивление элемента электрической цепи;  $\Delta\varphi_L$  и  $\Delta\varphi_R$  – разность потенциалов на индуктивном и резистивном элементах электрической цепи;  $\mathbf{f}_{sf}$  – вектор поверхностной нагрузки, действующей на границе  $S_\sigma$ . В упругой области  $V_s$  третий интеграл в уравнениях (1) и (2) содержит только первое слагаемое.

Эффективные модуль упругости  $E_{\text{eff}}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_{\text{eff}}$ , плотность  $\rho_{\text{eff}}$  и другие характеристики функционально-градиентного материала определяются свойствами его составляющих и их объёмными долями. При наличии всего двух компонент (например, металла « $m$ » и керамики « $c$ ») используется следующее выражение

$$P_{\text{eff}}(z) = P_m + (P_c - P_m) \left( \frac{2z + h}{2h} \right)^N \tag{3},$$

где  $P_{\text{eff}}$  – характеристика материала ( $E_{\text{eff}}$ ,  $\nu_{\text{eff}}$ ,  $\rho_{\text{eff}}$  и др.);  $N$  – показатель объёмной доли, изменяющийся от нуля до бесконечности;  $h$  – толщина пластины.

Уравнения (1) и (2) совместно с граничными условиями преобразуются к матричному виду с использованием известных процедур метода конечных элементов. После выполнения всех операций окончательно получим [13]

$$\left( -\lambda^2 \mathbf{M} + i\lambda \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{K} - \frac{1}{\lambda^2 L} \mathbf{Z}_L + \frac{1}{i\lambda R} \mathbf{Z}_R \right) \mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{4}$$

$$\left( -\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{K} - \frac{1}{\Omega^2 L} \mathbf{Z}_L + \frac{1}{i\Omega R} \mathbf{Z}_R \right) \mathbf{u} = \mathbf{r} \tag{5},$$

где  $\mathbf{M}$  – матрица масс,  $\mathbf{K}$  – матрица жёсткости,  $\boldsymbol{\Gamma} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$  – матрица демпфирования,  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты пропорциональности,  $\mathbf{u} = \{\mathbf{d}, \varphi\}^T$  – вектор обобщённых узловых неизвестных;  $\mathbf{r} = \{\mathbf{f}_{sf}, \mathbf{0}\}^T$  – вектор механической и электрической нагрузок. Матрицы  $\mathbf{Z}_L$  и  $\mathbf{Z}_R$  содержат только коэффициенты 1 и  $-1$  в позициях, соответствующих узловым значениям электрического потенциала конечных элементов электрической цепи. Значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  вычисляются на основе собственных частот и коэффициентов демпфирования двух фундаментальных мод колебаний, которые находятся экспериментально. В данной работе полагается  $\alpha = 0$  Гц и  $\beta = 1 \times 10^{-5}$  с.

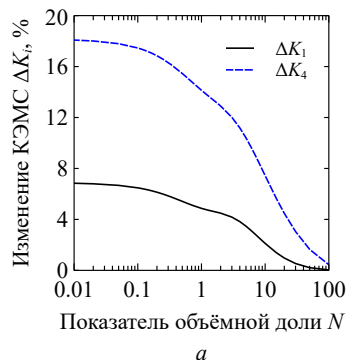
Дискретизация пластины и пьезоэлектрического элемента осуществляется 20-узловыми конечными элементами в форме призмы с квадратичной аппроксимацией всех компонент вектора перемещений и электрического потенциала. Параметры конечно-элементной сетки определяются из условия асимптотической сходимости собственных частот колебаний при увеличении числа узловых неизвестных.

Моделирование функционально-градиентного материала пластины выполняется следующим образом. В рассмотрение вводится  $k$  слоёв толщиной  $h_k = h/k$ , в каждом из которых характеристики считаются постоянными. Их значение вычисляется по выражению (3) в середине каждого слоя ( $z_k = h_k/2$ ).

### Результаты расчётов

В первом примере рассмотрена задача о собственных колебаниях прямоугольной пластины с пьезоэлементом без электрической цепи. Эффективность его работы на  $i$ -ой частоте характеризуется коэффициентом электромеханической связи  $K_i$  (КЭМС) [11]

$$K_i = \sqrt{\left(\frac{\omega_i^{o/c}}{\omega_i^{s/c}}\right)^2 - 1}$$



где  $\omega_i^{o/c}$  и  $\omega_i^{s/c}$  – собственные частоты колебаний системы с разомкнутыми (o/c) и замкнутыми (s/c) электродами на пьезоэлементе.

Варьируя показатель объёмной доли  $N$ , можно обеспечить плавное изменение свойств ФГМ по толщине конструкции по степенному закону. Анализ результатов моделирования показал, что наличие более жёсткой составляющей (Ti-6Al-4V) на внешней поверхности пластины приводит к повышению КЭМС (Рис. 1а,  $N=0.01$ ). Приведённые здесь количественные оценки получены с помощью следующих выражений:  $\Delta K_i = (\tilde{K}_i - K_i) / \tilde{K}_i$ ,  $\Delta \omega_i^{o/c} = (\tilde{\omega}_i^{o/c} - \omega_i) / \tilde{\omega}_i^{o/c}$ , где  $\tilde{K}_i$  и  $\tilde{\omega}_i^{o/c}$  – коэффициенты электромеханической связи и собственные частоты колебаний, полученные при  $N = \infty$  (конструкция полностью изготовлена из материала меньшей жёсткости).

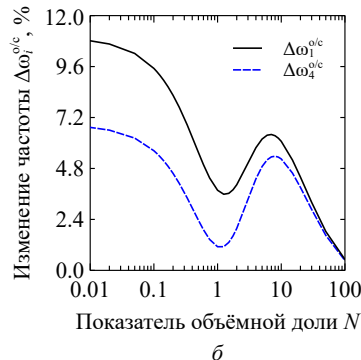


Рис. 1. Влияние показателя объёмной доли  $N$  функционально-градиентного материала на коэффициент электромеханической связи (а) и собственные частоты колебаний (б)

Повышение коэффициента электромеханической связи для первой моды колебаний составляет около 7%. Данный эффект проявляется значительно сильнее для более высоких мод, о чём свидетельствует увеличение  $K_4$  на 18%. Противоположная картина наблюдается для собственных частот (Рис. 1б). Низшая из них является более чувствительной к изменению показателя объёмной доли  $N$ . Отличительной особенностью приведённых зависимостей является немонотонный характер, который необходимо учитывать при подборе материала конструкции под требуемый диапазон частот.

Второй пример посвящён пассивному демпфированию резонансных колебаний функционально-градиентной пластины с помощью пьезоэлемента, шунтированного последовательной электрической  $RL$ -цепью. Значения сопротивления и индуктивности, обеспечивающие наименьшую амплитуду колебаний, определяются с помощью аналитических выражений, полученных в работе [11] на основе передаточных функции одномассовой системы. Известно, что точность этих формул снижается при демпфировании высокочастотных мод колебаний или в случае плот-

ного спектра [14]. Тем не менее, они позволяют получить приемлемое начальное приближение для нахождения параметров электрической цепи, обеспечиваю-

щих наименьшую амплитуду колебаний. Не затрагивая вопрос их оптимальности, приведём на рисунке 2 некоторые результаты в качестве примера.

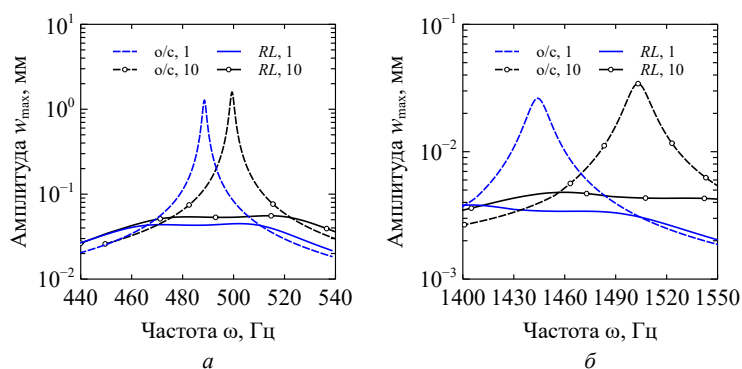


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики в окрестности первого (а) и четвёртого (б) резонансов, полученные при  $N = 1$  и  $N = 10$

Изображённые амплитудно-частотные характеристики демонстрируют:

- смещение резонансных пиков и, следовательно, собственных частот колебаний при изменении показателя объёмной доли  $N$  функционально-градиентного материала пластины;
- снижение амплитуды нормальных перемещений  $w_{\max}$  за счёт повышения жёсткости конструкции, которое достигается путём увеличения объёмной доли титанового сплава (при  $N = 0$  пластина полностью изготовлена из Ti-6Al-4V);
- снижение амплитуды резонансов при шунтировании пьезоэлемента последовательной электрической  $RL$ -цепью.

### Выводы

Возможность плавного изменения состава функционально-градиентного материала вдоль заданного направления

позволяет на этапе проектирования конструкции оптимизировать её таким образом, чтобы обеспечить необходимые динамические характеристики для конкретных условий эксплуатации. В данном исследовании такая возможность продемонстрирована на примере изменения коэффициента электромеханической связи и собственных частот колебаний, а также в задачах пассивного демпфирования колебаний с помощью шунтированного электрической  $RL$ -цепью пьезоэлемента. Отметим также, что с помощью функционально-градиентного материала можно снизить концентрацию механических напряжений около пьезоэлектрических элементов, что способствует повышению надёжности клеевого соединения и увеличению долговечности в условиях знакопеременного динамического нагружения.

### Библиографический список

1. Ma Z. et. al. Additive manufacturing of functional gradient materials: A review of research progress and challenges // Journal of Alloys and Compounds. – 2024. – Vol. 971. – № 15. – Article № 172642. <https://dx.doi.org/10.1016/j.jallcom.2023.172642>
2. Koizumi M. FGM activities in Japan // Composites Part B: Engineering. – 1997. – Vol. 28. – № 1–2. – P. 1–4. [https://dx.doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://dx.doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)
3. Gupta A., Talha M. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Progress in Aerospace Sciences. – 2015. – Vol. 79. – P. 1–14. <https://dx.doi.org/10.1016/j.paerosci.2015.07.001>

4. *Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S., Achary S., Venkateswara B.P., Chowdary S., Gara D.K.* State of the art in functionally graded materials // *Composite Structures*. – 2021. – Vol. 262. – Article № 113596. <https://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>
5. *Cho J.R., Park H.J.* High strength FGM cutting tools: finite element analysis on thermoelastic characteristics // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2002. – Vol. 130–131. – P. 351–356. [https://doi.org/10.1016/S0924-0136\(02\)00823-3](https://doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00823-3)
6. *Pompe W., Worch H., Epple M., Friess W., Gelinsky M., Greil P., Hempel U., Scharnweber D., Schulte K.* Functionally graded materials for biomedical applications // *Materials Science and Engineering: A*. – 2003. – Vol. 362. – № 1–2. – P. 40–60. [https://dx.doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00580-X](https://dx.doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00580-X)
7. *Torelli G., Fernández M.G., Lees J.M.* Functionally graded concrete: Design objectives, production techniques and analysis methods for layered and continuously graded elements // *Construction and Building Materials*. – 2020. – Vol. 242. – Article № 118040. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.118040>
8. *Tay Y.W.D., Lim J.H., Li M., Tan M.J.* Creating functionally graded concrete materials with varying 3D printing parameters // *Virtual and Physical Prototyping*. – 2022. – Vol. 17. – № 3. – P. 662–681. <https://doi.org/10.1080/17452759.2022.2048521>
9. *Moheimani S.O.R., Fleming A.J.* Piezoelectric transducers for vibration control and damping, 1<sup>st</sup> ed. – London: Springer, 2006. – 287 p. <https://doi.org/10.1007/1-84628-332-9>
10. *Gripp J.A.B., Rade D.A.* Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2018. – Vol. 112. – P. 359–383. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.04.041>
11. *Hagood N.W., von Flotow A.H.* Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // *Journal of Sound and Vibration*. – 1991. – Vol. 146. – № 2. – P. 243–268. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90762-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90762-9)
12. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М: Наука, 1988. – 472 с.
13. *Ошмарин Д.А.* Моделирование демпфирования колебаний SMART-систем на основе пьезоэлектрических материалов и электрических элементов / Дисс. канд. физ.-мат. наук: 1.1.8. – Пермь, ИМСС УрО РАН, 2022. – 139 с.
14. *Matveenko V.P., Iurlova N.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlov M.A.* An approach to determination of shunt circuits parameters for damping vibrations // *International Journal of Smart and Nano Materials*. – 2018. – Vol. 9. – № 2. – P. 135–149. <https://doi.org/10.1080/19475411.2018.1461144>

## PASSIVE VIBRATION DAMPING OF A PLATE MADE OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL

Lekomtsev S.V.

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS*

---

### For citation:

Lekomtsev S.V. Passive vibration damping of a plate made of functionally graded material // *Perm Federal Research Center Journal*. – 2025. – № 4. – P. 87–93. <https://doi.org/10.7242/2658-705X/2025.4.8>

---

The use of functionally graded materials in smart systems based on piezoelectric elements provides a number of additional advantages over homogeneous metals and alloys. Smooth variation of the mechanical properties of a structure along one or more directions makes it possible to optimize its dynamic parameters at the design stage, within the given constraints on the dimensions and mass of the structure. In this paper, the finite element method was

used to study the free and forced steady-state harmonic vibration of a rectangular functionally graded plate with a piezoelectric element connected to an external electrical  $RL$  circuit. The examples analyze the influence of the volume fraction index of the functionally graded material on the electromechanical coupling coefficient, natural frequencies and vibration amplitude. The possibility of varying them within limits sufficient for safe operation of the structure in the vicinity of the initial resonance is demonstrated.

*Keywords: natural vibration, piezoelectric elements, electric circuit, finite element method.*

**Сведения об авторе**

*Лекомцев Сергей Владимирович*, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией механики функциональных материалов, Институт механики сплошных сред УрО РАН – филиал Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН («ИМСС УрО РАН»), 614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: [lekomtsev@icmm.ru](mailto:lekomtsev@icmm.ru)

*Материал поступил в редакцию 08.12.2025*