

ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АНАЛОГА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИССИПАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ С ВНЕШНИМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ *

Н.А. Юрлова, *Институт механики сплошных сред УрО РАН*

Н.В. Севодина, *Институт механики сплошных сред УрО РАН*

Д.А. Ошмарин, *Институт механики сплошных сред УрО РАН*

М.А. Юрлов, *Институт механики сплошных сред УрО РАН*

Проблема демпфирования колебаний элементов конструкций в различных отраслях техники не только не теряет своей актуальности со временем, но зачастую становится ключевой в современных изделиях космической, авиационной, автомобильной техники. Новые возможности для управления динамическим поведением конструкций открывает дополнение их пьезоэлементами и внешними электрическими цепями. Моделирование динамического поведения таких электромеханических систем требует решения связанной задачи электровязкоупругости. Оптимизация диссипативных свойств электромеханических систем производится за счет подбора параметров цепей (настройки), обеспечивающих наилучшее демпфирование колебаний на заданной частоте. При этом наиболее эффективной является задача о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями.

Однако численная процедура поиска оптимальных параметров электрических цепей связана с многократным решением задачи для каждой комбинации величин элементов цепи с использованием комплексных большеразмерных матриц, в том числе с решением для этих матриц алгебраической проблемы комплексных собственных значений. В то же время общность математических уравнений, которыми описываются колебания в механических системах и колебания тока и напряжения в электрических цепях, позволяет применить метод динамических аналогий и рассматривать вместо электромеханической системы эквивалентную электрическую, заменяя уравнения движения электромеханической системы соответствующими уравнениями для эквивалентной электрической, состоящей из элементов с сосредоточенными параметрами, что позволяет существенно сократить время расчета и уменьшить требования к вычислительным ресурсам.

Разработанный дискретный электрический аналог полностью эквивалентен исходной электромеханической системе с внешними электрическими цепями по спектру собственных частот колебаний. Результаты, полученные с

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Министерства образования и науки Пермского края (проект № 17-41-590152-р-урал_a).

помощью электрического аналога, верифицированы решением задач о собственных колебаниях электроупругих и электровязкоупругих тел, в том числе с внешними электрическими цепями, в континуальной постановке механики сплошных сред.

***Ключевые слова:** электровязкоупругая конструкция, пьезоэлемент, электрическая цепь, электрический аналог системы, собственные колебания, комплексные собственные частоты.*

Введение

В современных конструкциях, встречающихся в высокотехнологичных отраслях техники, все чаще применяются smart-технологии, заключающиеся в том, что в состав конструкции вводятся элементы, выполненные из функциональных материалов, способных изменять свое механическое поведение при различных типах немеханического воздействия (температуры, электрического или магнитного полей и т.д.). Такие элементы выполняют роль сенсоров (датчиков) или актуаторов (исполнительных механизмов) и позволяют реализовать требуемый механический отклик конструкции на действие эксплуатационных нагрузок.

Управление механическим поведением конструкции реализуется активным или пассивным способами. Для этого в состав smart-конструкций вводят датчики (сенсоры), позволяющие регистрировать изменение параметров окружающей среды или термомеханическое состояние конструкции, и активные элементы (актуаторы), обеспечивающие требуемый механический отклик конструкции в зависимости от внешнего воздействия.

Сенсоры и актуаторы могут быть изготовлены из таких материалов, как сплавы с памятью формы, пьезоматериалы, магнитные эластомеры и т.д. На практике наибольшее распространение получили пьезоматериалы (пьезокерамика, пьезополимеры), которые позволяют решать ряд технических проблем, связанных с демпфированием колебаний различной природы, снижением уровня акустического шума, повышением порога динамической устойчивости, диагностикой механического состояния конструкции так далее.

Особое внимание исследователей к пьезоматериалам обусловлено наличием у них прямого и обратного пьезоэффектов. Деформации пьезоэлемента, вызванные внешним воздействием различной природы, вызывают отклик в виде электрического потенциала, генерирующегося на электродированных поверхностях пьезоэлемента. В то же время внешний электрический потенциал, подаваемый на пьезоэлемент, вызывает его принудительные механические деформации. Деформации пьезоэлементов или соответствующие им электрические сигналы могут как регистрироваться, так и регулироваться, поэтому рассматриваются в качестве управляющих воздействий.

Таким образом, управление динамическими деформациями объекта и демпфирование опасных колебаний различной природы может быть достигнуто либо активным способом, подразумевающим снятие электрического потенциала с пьезоэлемента, выполняющего роль сенсора, усиление его и подачу на пьезоэлемент, выполняющий роль актуатора, либо пассивным способом, подразумевающим подбор таких параметров внешних электрических цепей и их конфигурацию, которые обеспечат требуемые динамические характеристики в рамках рассматриваемого опасного частотного диапазона внешнего воздействия, либо оптимальное демпфирование нежелательных колебаний в определенном частотном диапазоне.

И при пассивном, и при активном способах управления на величину электрического потенциала оказывают существенное влияние не только расположение и размер пьезоэлемента, но и параметры внешних электрических цепей. Целенаправленное

изменение этих параметров позволяет оптимизировать динамические характеристики (резонансные частоты, формы собственных колебаний и показатели демпфирования) системы, то есть приводит к созданию эффективных систем демпфирования колебаний различной природы.

При проектировании конструкций, имеющих в своем составе элементы, выполненные из пьезоматериалов и внешние электрические цепи, для понимания отклика системы на управляющие воздействия (активные, пассивные), ускорения сроков проведения анализа системы и оценки эффективности от внесенных изменений важная роль отводится моделированию поведения как пьезоэлектрика самого по себе, так и во взаимодействии его с конструкцией.

**Математическая модель
электромеханической системы
с распределенными параметрами**

При анализе динамического поведения электромеханической системы (представляющей собой конструкцию с пьезоэлементами и внешними электрическими цепями) ее динамические характеристики могут быть определены из решения различных задач: о вынужденных колебаниях, о собственных колебаниях, о переходных процессах с начальными условиями. С точки зрения эффективности определения динамических характеристик и оптимизации диссипативных свойств задача о собственных колебаниях является наиболее удобной и информативной, что было продемонстрировано, например, в работах [1, 2]. Эффективность приложения рассматриваемой задачи для оптимизации диссипативных характеристик электромеханических систем определяется их независимостью от внешних нагрузок. В результате решения задачи о собственных колебаниях найденные комплексные собственные значения – это частоты собственных колебаний (действительная часть) и показатели демпфирования (мнимая часть). Поэтому оптимизацию диссипативных характеристик электромеха-

нических систем с внешними электрическими цепями предлагается осуществлять на основе решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями.

Математическая модель электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями строится на базе уравнений электродинамики деформируемых пьезоэлектрических сред в квазистатическом приближении. Для этого рассматриваемая электромеханическая система представляется в виде кусочно-однородного тела объемом $V_{str} + V_{pz}$, где V_{str} – объем конструкции, а V_{pz} – объем пьезоэлектрических элементов.

Вариационное уравнение движения такого кусочно-однородного тела в случае отсутствия внешнего воздействия (задача о собственных колебаниях) будет иметь вид

$$\int_{V_{pz}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_{pz} \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \int_{V_{str}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_{str} \ddot{u}_i \delta u_i) dV = 0. \tag{1}$$

Здесь приняты следующие обозначения: D_i , E_i – компоненты векторов электрической индукции и напряженности электрического поля; σ_{ij} – компоненты симметричного тензора напряжений Коши, ε_{ij} – компоненты тензора линейных деформаций, u_i – компоненты вектора перемещений, ρ_{str} – удельная плотность материала конструкционной составляющей кусочно-однородного тела объема V_{str} , ρ_{pz} – удельная плотность материала пьезоэлектрической составляющей кусочно-однородного тела объема V_{pz} , φ – электрический потенциал.

Связь между компонентами вектора перемещений и компонентами тензора деформаций описывается дифференциальными соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{2}$$

Для электрического поля выполняется условие потенциальности:

$$E_j = -\varphi_{,j}. \tag{3}$$

Определяющие соотношения для пьезоэлектрической части объема V_{pz} имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ijk} E_k \\ D_k &= \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ki} E_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь \bar{C}_{ijkl} – компоненты тензора упругих констант пьезоэлемента, β_{ijk} и ε_{ki} – компоненты тензоров пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов, ($i, j, k, l=1,2,3$).

Для упругих частей объема V_{str} справедливы следующие физические соотношения:

$$\mathcal{G}\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} = 2G\left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\mathcal{G}\delta_{ij}\right), \quad \sigma = B\mathcal{G} \quad (5)$$

Здесь G, B – сдвиговой и объемный модули, $\sigma = \sigma_{ij}/3$ – среднее напряжение, \mathcal{G} – объемная деформация.

Вязкоупругие свойства материалов при квазигармонических процессах учитываются посредством комплексных динамических модулей, являющихся аналогами дифференциальных и интегральных операторов в физических соотношениях.

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= 2G^0 \left(e_{ij} - \int_0^t R(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right), \\ \sigma &= B^0 \left(\mathcal{G} - \int_0^t K(t-\tau) \mathcal{G}(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Обозначено: G_0, B_0 – мгновенные сдвиговые и объемные модули, R, K – ядра релаксации, $\sigma = \sigma_{ij}/3$ – среднее напряжение, \mathcal{G} – объемная деформация, s_{ij}, e_{ij} – компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций соответственно.

При рассмотрении собственных колебаний объектов из вязкоупругих материалов либо содержащих элементы, выполненные из таких материалов, вводятся допущения о том, что колебания в системе происходят с медленно меняющимися амплитудами и начальные возмущения не влияют на поведение системы. В результате определяющие соотношения (6) для вязкоупругого материала можно записать в виде (7)

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &\approx 2\tilde{G}e_{ij}, \quad \sigma \approx \tilde{B}\mathcal{G}; \\ \tilde{G} &= G_{Re} + iG_{Im} = \\ &= G_{Re} \left(1 - i \frac{G_{Im}}{G_{Re}} \right) = G_{Re} (1 - i\delta_g); \\ \tilde{B} &= B_{Re} + iB_{Im} = \\ &= B_{Re} \left(1 - i \frac{B_{Im}}{B_{Re}} \right) = B_{Re} (1 - i\delta_b); \\ G_{Re} &= G_0 \left(1 - \int_{-\infty}^t R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \right); \\ G_{Im} &= G_0 \int_{-\infty}^t R(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau; \\ B_{Re} &= B_0 \left(1 - \int_{-\infty}^t K(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \right); \\ B_{Im} &= B_0 \int_{-\infty}^t K(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь \tilde{G}, \tilde{B} – комплексные динамические сдвиговой модуль и модуль объемного сжатия, в общем случае являющиеся функциями частоты ω ; δ_g, δ_b – соответствующие тангенсы углов механических потерь. Подробно математическая постановка задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих тел приведена в работе [3].

К рассматриваемой системе, состоящей из упругих, вязкоупругих и пьезоэлектрических элементов, через электродированные поверхности пьезоэлектрических частей могут быть присоединены электрические цепи, содержащие элементы сопротивления (R), емкости (C) и индуктивности (L). Если к этим цепям не подведены внешние источники энергии, то они будут являться внутренними элементами рассматриваемой системы. В этом случае в уравнение (1) должно быть добавлено слагаемое, которое учитывает сумму всех работ электрического поля с разностью потенциалов $\pm\phi$ по перемещению любого возможного заряда на элементах внешней электрической цепи.

Таким образом, вариационное уравнение движения кусочно-однородного электровязкоупругого тела

с внешними электрическими цепями примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \int_{V_{str}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_n \ddot{u}_i \delta u_i) dV + \\ & + \int_{V_{pz}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho_m \ddot{u}_i \delta u_i) dV - \\ & + \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{L_p} \iint (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) \delta \varphi dt dt + \quad (8) \\ & + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{R_q} \int (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta \varphi dt + \\ & + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta \varphi = 0 \end{aligned}$$

здесь $\varphi_1^{el} - \varphi_2^{el}$ – разность потенциалов на соответствующем элементе внешней цепи $el=L_p, R_q, C_r$, n_L, n_R, n_C – количество индуктивных, резистивных и емкостных элементов соответственно, L_p, R_q, C_r – значение индуктивности, сопротивления или емкости соответствующего элемента цепи.

Единственность решения задачи о собственных колебаниях, описываемой уравнением (8), обеспечивается заданием граничных условий по механическим и электрическим компонентам обобщенного вектора состояния.

Граничные условия для механических компонент имеют вид (9)

$$S_\sigma : \sigma_{ij} n_j = 0, \quad S_u : u_i = 0, \quad (9)$$

где S_σ – часть поверхности тела объемом V , на которой задаются поверхностные усилия p_i , при рассмотрении собственных колебаний объекта отсутствуют; n_j – компоненты вектора единичной нормали к поверхности S_σ . S_u – часть поверхности тела объемом V , на которой задаются компоненты вектора перемещения u_i .

На неэлектродированных частях поверхности пьезоэлектрического тела граничные условия по электрическим компонентам вектора состояния отсутствуют, т.к. они являются непроводящими поверхностями. Выражения для граничных условий по электрическим компонентам на электродированных участках пьезоэлектрических частей имеют вид (10)

$$\varphi|_{S_\varphi} = \varphi_0, \quad (10)$$

здесь S_φ^{el} – часть электродированной поверхности пьезоэлектрического тела объемом V_{pz} , на которой задан электрический потенциал φ_0 .

Потенциал φ определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому будем считать, что на определенном участке электродированной поверхности задан нулевой потенциал, тогда φ_0 будет иметь смысл разности потенциалов.

В задаче о собственных колебаниях может быть реализовано два варианта задания граничных условий по электрической компоненте вектора состояния, соответствующих режимам холостого хода (open circuit) и короткого замыкания (short circuit). В первом случае на части электродированной поверхности задан нулевой потенциал, при этом другая часть электродированной поверхности свободна от нагрузок. В случае реализации режима short circuit условие $\varphi_0=0$ задается на всех участках электродированной поверхности пьезоэлектрического тела.

Решение задачи о собственных колебаниях электровязкоупругих систем осуществляется с помощью разработанного авторами проекта специального алгоритма [4], основанном на использовании стандартных процедур метода конечных элементов и собственных подпрограмм, реализующих авторские алгоритмы, например, алгоритм решения на языке FORTRAN алгебраической задачи комплексных собственных значений на основе метода Мюллера с различными сценариями выбора начальных приближений.

Так как точность решения задачи МКЭ существенно зависит от степени дискретизации (количества узловых неизвестных), то для достижения приемлемой точности получаемых результатов необходимо решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности (>1000 уравнений), что сказывается на времени счета и требованиях к аппаратной ресурсоемкости.

Следует отметить, что поиск оптимальных параметров на основе задачи о

собственных колебаниях даже простых модельных электровязкоупругих конструкций с внешними электрическими цепями связан с многократным использованием комплексных большемерных матриц, в том числе решением для этих матриц алгебраической проблемы комплексных собственных значений [3, 4]. Это усложняет поиск оптимальных параметров для реальных конструкций.

Поэтому становится крайне важной разработка метода, позволяющего существенно снизить размерность решаемой задачи, тем самым повысить эффективность исследований.

Построение электрического аналога электромеханических систем при отсутствии внешней электрической цепи

Несмотря на различие в физической природе колебаний, существует общность математических уравнений, которыми описываются колебания в механических системах и колебания тока и напряжения в электрических цепях. При этом индуктивность является аналогом массы, сопротивление – аналогом вязкости, а ёмкость – аналогом жесткости.

Совпадение математических описаний явилось базисом многообещающего подхода, позволяющим существенно упростить процесс получения динамических характеристик исследуемой электромеханической системы, заключающемся в представлении ее в виде либо механического [5, 6], либо электрического аналога [7–13].

Метод динамических аналогий был описан Гарри Ф. Ольсоном в [14], где приведены аналогии между элементами механических (линейных и вращающихся), акустических и электрических систем и предложено анализировать акустические и механические системы путём преобразования их к электрическим аналогам. Данный подход к настоящему времени нашел широкое применение для решения различных механических задач.

Аналогичные математические описания динамических процессов различной

физической природы позволяют рассматривать вместо механической системы электрическую, заменяя уравнения движения механической системы соответствующими уравнениями для ее электрического аналога. Этот подход был использован, например, в работах [7–13].

Электрический аналог электромеханической системы строится в форме электрических схем, которые являются полным аналогом исходной электромеханической системы с точки зрения частотных характеристик и протекающих в ней электрических процессов. В этом случае количество неизвестных и, соответственно, количество уравнений в СЛАУ снижается на порядки, что позволяет существенно сократить время расчета и уменьшить требования к вычислительным ресурсам. При этом необходимо обеспечить соответствие электрического аналога исследуемой конструкции по частотному спектру на резонансных частотах и в произвольной части рассматриваемого диапазона частот.

Поскольку внешние цепи представляют собой некоторую совокупность элементов с сосредоточенными параметрами, присоединенную к системе с распределенными параметрами, можно существенно снизить размерность решаемой задачи электровязкоупругости, сведя ее к анализу дискретной модели с сосредоточенными параметрами, которой в данном случае будет являться модель эквивалентной электрической схемы замещения.

Как правило, авторы пытаются предложить такую схему эквивалентной схемы замещения, которая позволила бы описать заданное динамическое поведение определенной конструкции [15–17]. Основным отличием подхода, представленного в настоящей работе, является то, что с помощью электрического аналога и соответствующей ему электрической схемы воссоздается только спектр собственных частот колебаний исследуемого объекта в заданном ограниченном диапазоне частот.

В ряде работ [18–22] предложено в качестве электрического аналога пьезоэлемента использовать его простей-

шую модель, представляющую собой конденсатор с постоянной ёмкостью C_0 .

В этом случае электрический колебательный контур, образованный пьезоэлементом и внешней электрической цепью (рис. 1), представляет собой дискретную электрическую колебательную систему с одной степенью свободы. Частота колебаний в таком простейшем электрическом контуре в случае последовательно-го соединения (рис.1,а) вычисляется по формуле (1):

$$\omega = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC_0}}, \quad (11)$$

а в случае параллельного соединения (рис.1,б) – по формуле (2):

$$\omega = -\frac{1}{2RC_0} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C_0^2} - \frac{1}{LC_0}}. \quad (12)$$

Но при этом необходимо понимать, что пьезоэлемент ведет себя как обычный конденсатор с ёмкостью C_0 только на частотах, далеких от резонанса.

Для более адекватного описания пьезоэлектрика с распределенными параметрами используются эквивалентные электрические модели, составленные из электрических элементов с фиксированными параметрами. Одну из первых моделей предложил Van Dyke для кварцевого резонатора в 1925 году [9]. Данная модель представляет собой параллельное соединение последовательно соединен-

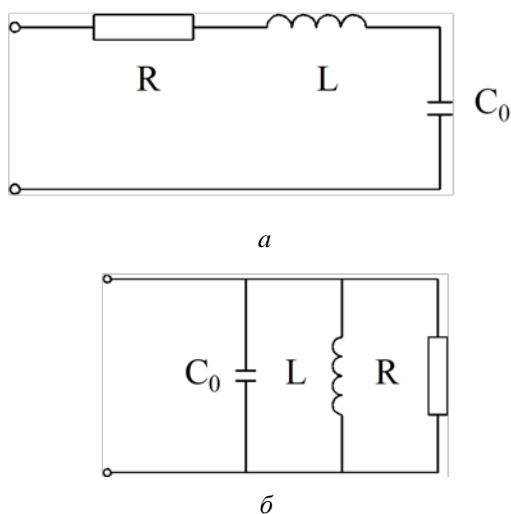


Рис. 1. Последовательный (а) и параллельный (б) колебательные контуры

ных ёмкости C , индуктивности L , сопротивления R и ёмкости пьезоэлектрика C_0 и имеет одну резонансную частоту, соответствующую резонансной частоте механических колебаний пьезоэлектрического элемента резонатора (рис. 2).

Рассмотрим более подробно каждый из элементов данной схемы. Здесь C_0+C – собственная ёмкость пьезоэлектрического элемента резонатора. Последовательно соединенные катушка индуктивности L и конденсатор C обеспечивают резонанс. Резистор R описывает потери, возникающие при прохождении тока через проводящие элементы резонатора. Таким образом, с точки зрения электрических процессов данная электромеханическая система ведет себя как последовательный электрический колебательный контур с потерями в окрестности резонансной частоты, а вне ее – как конденсатор.

Известно несколько подходов к моделированию поведения пьезоэлектриков с помощью эквивалентных электрических цепей, например, представленные в работах [23–25]. Данные модели описывают поведение пьезоматериалов в диапазоне частот ниже ультразвука.

Все эти модели описывают поведение пьезоэлектрика как отдельного элемента с сосредоточенными параметрами и довольно широко используются многими исследователями для понимания воздействия от внешней электрической цепи на исследуемую конструкцию. Однако данные модели имеют свои особенности. Так, модель Van Dyke [9] не позволяет учесть демпфирующие характеристики

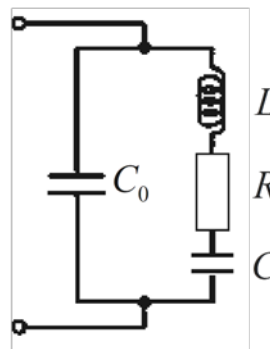


Рис. 2. Эквивалентная схема кварцевого резонатора, предложенная van Dyke

материала. Модель Sherrit [24] использует комплексные элементы схемы для моделирования потерь в пьезоэлектрической керамике, поэтому компоненты цепи в модели Sherrit имеют комплексные значения, тогда как в модели Van Dyke они действительные. Модель, предложенная Guan [23] является попыткой повысить точность модели Van Dyke введением двух дополнительных сопротивлений для учета диссипации энергии. Mason в своей работе [8] объяснил физический смысл этих механических констант в схеме модели Van Dyke с точки зрения резонансных и антирезонансных частот.

Однако, с одной стороны, присоединение к конструкции пьезоэлемента изменяет её механические граничные условия. С другой стороны, на пьезоэлемент будет воздействовать конструкция, имеющая свое множество резонансов. Поэтому для моделирования поведения пьезоэлемента, прикрепленного к конструкции, необходима модель, описывающая множество резонансных частот в широком частотном диапазоне, что, соответственно, требует другой схемы электрической модели.

Влияние конструкции на поведение пьезоэлемента можно учесть, например, вводя дополнительные параллельные ветви в схему модели Van Dyke. Аналогично модифицируется и модель Guan, образуя так называемую полную модель. Каждая последовательная RLC -ветка в этой модели физически соответствует одной резонансной моде. Однако при применении полной модели Guan возникают сложно-

сти при определении численных значений ее параметров в том случае, когда резонансные частоты пьезокерамики и конструкции близки или совпадают.

Несмотря на то, что эквивалентные схемы замещения не только пьезоэлемента, но и всей конструкции с пьезоэлементом применяются все чаще [26–27], не найдено работ, в которых электрические аналоги электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями применяются для нахождения оптимальных параметров внешних электрических цепей, обеспечивающих максимальное демпфирование колебаний на заданных частотах, на основе использования задачи о собственных колебаниях конструкций.

Для рассмотрения динамического поведения электромеханических систем не в окрестности какого-либо отдельного резонанса, а в некотором частотном диапазоне, в котором может находиться несколько резонансных частот, предложено использовать модель Van Dyke, модифицированную путем добавления параллельно имеющимся элементам последовательных колебательных контуров (см. рис. 2). В результате можно получить эквивалентную схему, описывающую динамику рассматриваемой системы в любом частотном диапазоне.

В результате получены схемы электрических аналогов электроупругой и электровязкоупругой систем с внешними электрическими цепями, описывающих собственные колебания систем (рис. 3).

Как видно из рис. 3, в схеме, описывающей собственные колебания электро-

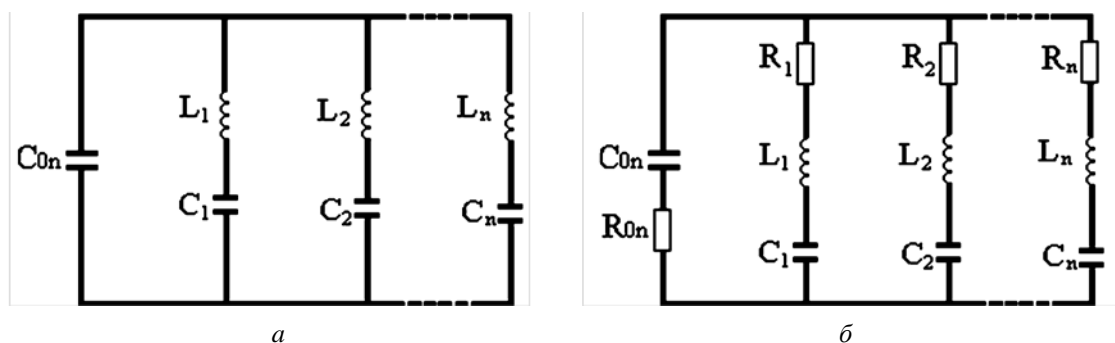


Рис. 3. Схемы электрического аналога: а – для электроупругой системы (без учета диссипации энергии), б – и для электровязкоупругой (с учетом диссипации энергии)

упругой системы, отсутствуют резистивные элементы, на которых происходит диссипация энергии. Поэтому естественным желанием было распространить схему электрического аналога, успешно описывающую собственные колебания электроупругой конструкции (без учета диссипации энергии в системе) на случай электровязкоупругой конструкции (с учетом диссипации энергии).

Для этого в электрическую схему для аналога электроупругой конструкции, приведенную на рис. 3,а, необходимо добавить элементы, на которых происходят основные энергетические потери – сопротивления. Заметим, что схема пьезоэлектрического резонатора, предложенная Van Dyke, также содержит элемент сопротивления. Схема электрического аналога электровязкоупругой системы примет вид, представленный на рис. 3,б.

В этом случае все значения параметров элементов схемы (емкость, индуктивность и сопротивление) являются действительными.

Однако возможен и другой вариант составления эквивалентной электрической схемы, на основе элементов с комплексными параметрами [24].

В этом случае вид схемы будет аналогичен представленному на рис. 2,а варианту, предложенному для описания упругих систем без диссипации – в схеме резистивные элементы R_i отсутствуют, а значения параметров индуктивности и емкости становятся комплексными:

$$\tilde{L}_i = L_{Re}^i + iL_{Im}^i, \quad \tilde{C}_i = C_{Re}^i + iC_{Im}^i.$$

Математические модели описания собственных колебаний электрического аналога в форме схем с действительными или с комплексными параметрами могут быть построены на основе использования законов Кирхгофа для электрических цепей или на основе закона Ома для переменного тока [28].

Уравнения, описывающие колебания тока в электровязкоупругой системе при отсутствии внешней электрической цепи, в зависимости от используемого варианта

формулировки математической модели будут иметь следующий вид:

– построенные на основе законов Кирхгофа с действительными параметрами элементов электрической схемы:

$$\begin{cases} -\lambda^2 L_i q_{0i} + jR_i q_{0i} + \frac{q_{0i}}{C_i} + jR_{0n} \sum_{k=1}^n q_{0k} + \\ + \frac{1}{C_{0n}} \sum_{k=1}^n q_{0k} = 0, & i = \overline{1, n} - o / c, \\ -\lambda^2 L_i q_{0i} + jR_i q_{0i} + \frac{q_{0i}}{C_i} = 0, & i = \overline{1, n} - s / c, \end{cases}$$

– построенные на основе закона Ома для переменного тока с действительными параметрами элементов электрической схемы:

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{-L_i \lambda^2 C_i + jC_i R_i + 1}} + jR_{0n} + \frac{1}{C_{0n}} \right] = 0, & i = \overline{1, n} - o / c, \\ R_i + j \left(\lambda^2 L_i - \frac{1}{C_i} \right) = 0, & i = \overline{1, n} - s / c, \end{cases}$$

– для электрической схемы с комплексными параметрами входящих в нее элементов:

$$\begin{cases} -\lambda^2 \tilde{L}_i q_{0i} + \frac{q_{0i}}{\tilde{C}_i} + \frac{1}{\tilde{C}_{0n}} \sum_{k=1}^n q_{0k} = 0, & i = \overline{1, n} - o / c, \\ -\lambda^2 \tilde{L}_i q_{0i} + \frac{q_{0i}}{\tilde{C}_i} = 0, & i = \overline{1, n} - s / c. \end{cases}$$

Здесь n – количество параллельных (резонансных) ветвей в схеме, а также количество элементарных электрических контуров, образованных ветвью C_{0n} и каждой из резонансных ветвей $R_i L_i C_i$ (для действительных параметров) и $\tilde{L}_i \tilde{C}_i$ (для комплексных параметров); q_{0i}, q_{0k} – амплитуда заряда в соответствующей i -й ветви и в ветви с емкостью C_{0n} и с сопротивлением R_{0n} ; $\lambda = \lambda_{Re} + j\lambda_{Im}$ – искомая комплексная собственная частота колебаний электрического аналога рассматриваемой электровязкоупругой системы, в которой λ_{Re} – круговая

частота собственных колебаний, λ_{m} – показатель демпфирования, характеризующий скорость затухания колебаний; $j^2 = -1$ мнимая единица, o/c и s/c обозначают режимы холостого хода (open circuit) и короткого замыкания (short circuit).

Но главный вопрос состоит в том, как определить величину параметров элементов, формирующих выбранный вариант схемы, соответствующей электрическому аналогу рассматриваемой упругой или электровязкоупругой системы. Для решения этого вопроса разработана оригинальная методика определения значений элементов, формирующих схему электрического аналога рассматриваемой электромеханической системы. Подробно данная методика представлена в работах [12, 29].

К достоинству предложенного варианта модификации эквивалентной схемы Van Dyke следует отнести то, что он позволяет находить не одну, а несколько собственных частот колебаний электромеханической системы, входящих в заданный частотный диапазон.

Продемонстрируем предложенные модели определения собственных частот колебаний электромеханических систем с распределенными (в континуальной постановке) и с сосредоточенными параметрами (в форме электрического аналога в виде электрических схем с действительными и с комплексными параметрами) на примерах консольно-защемленной пластинки, (рис. 4,а) и тонкостенной оболочки в форме полуцилиндра, жестко защемленной по торцам и свободно опертой по

образующей (рис. 4,б). Обе конструкции выполнены из вязкоупругого частотно-независимого в рассматриваемом диапазоне частот материала. На поверхности пластинки и оболочки располагается упругий пьезоэлемент.

Параметры рассматриваемых объектов приняты следующими.

Пластинка с размерами $l_1=210$ мм, $b_1=26$ мм, $h_1=0,5$ мм выполнена из вязкоупругого материала, действительные части сдвигового модуля и модуля объемного сжатия которого равны $G_{\text{Re}}=1,5385 \cdot 10^{11}$ Па, $B_{\text{Re}}=1,6667 \cdot 10^{11}$ Па. При этом диссипативные характеристики материала задаются в виде тангенсов углов механических потерь $\delta_g=0,01$, $\delta_b=0,01$. Удельная плотность материала пластины $\rho=7\,800$ кг/м³. Пьезоэлемент выполнен в форме прямоугольника с размерами $l_p=50$ мм, $b_p=20$ мм, $h_p=0,36$ мм и расположен в 12 мм от закрепленного края пластинки симметрично относительно оси пластинки. В качестве материала пьезоэлемента выбрана пьезокерамика PZT-4 с поляризацией в направлении оси z. Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы. Физико-механические характеристики PZT-4: $C_{11}=C_{22}=13,9 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{12}=7,78 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{13}=C_{23}=7,43 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{33}=11,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{44}=3,06 \cdot 10^{10}$ Н/м², $C_{55}=C_{66}=2,56 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\beta_{31}=\beta_{32}=-5,2$ Кл/м², $\beta_{33}=15,1$ Кл/м², $\beta_{52}=\beta_{61}=12,7$ Кл/м², $e_{11}=e_{22}=6,45 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $e_{33}=5,62 \cdot 10^{-9}$ Ф/м, $\rho=7\,700$ кг/м³.

Оболочка с размерами $r_1=76$ мм, $l_1=300$ мм, $h_1=0,25$ мм выполнена из вязко-

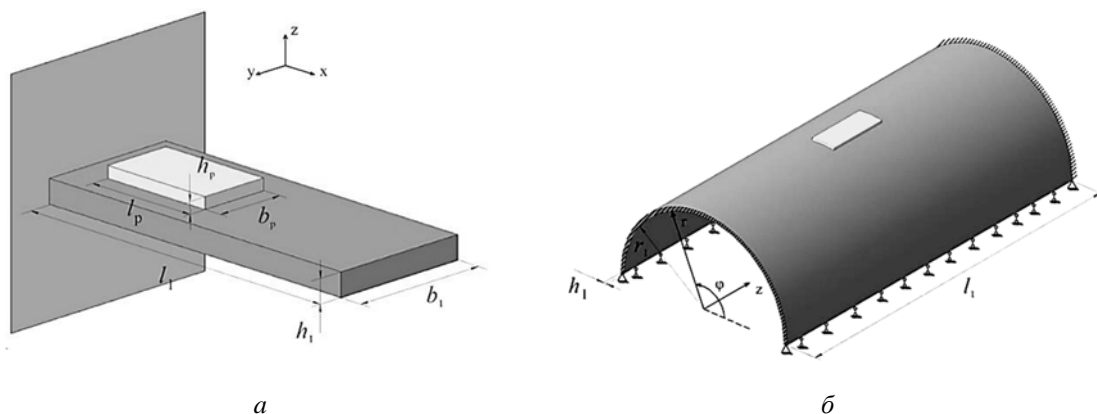


Рис. 4. Расчетные схемы электромеханических систем: пластинки (а) и оболочки (б)

упругого материала со следующими физико-механическими характеристиками: $G_{Re}=1,5077 \cdot 10^{11}$ Па, $B_{Re}=1,6333 \cdot 10^{11}$ Па, $\delta_g=0,01$, $\delta_b=0,01$. Удельная плотность материала оболочки $\rho=7\,700$ кг/м³. К поверхности оболочки прикреплен пьезоэлемент в форме сегмента кольца с размерами $r_p=76,25$ мм, $\varphi_p=15,08^\circ$, $h_p=0,36$ мм. Центр масс пьезоэлемента расположен на расстоянии 150 мм от заземленных торцов и смещен на 90° по угловой координате от свободно опертых образующих. Пьезоэлемент выполнен из пьезокерамики PZT-4. Направление поляризации совпадает с направлением оси r . Верхняя и нижняя поверхности пьезоэлемента электродированы. Физико-механические характеристики материала пьезоэлемента указаны выше.

На основе решения задачи о собственных колебаниях электровязкоупругого тела получены значения комплексных собственных частот колебаний $f^{\omega}=\omega/2\pi$ рассматриваемых конструкций с пьезоэлементом, работающим в режимах *open circuit* и *short circuit* для первых десяти мод колебаний, обеспечивающих деформацию пьезоэлемента и проявление пьезоэффекта (связанных).

Полученные результаты приведены в табл. 1. При расчетах на основе применения электрического аналога рассматриваемой электровязкоупругой системы его схемы были построены с учетом 10 резонансных веток для связанных собственных частот колебаний. В таблице представлены только первые 5 собственных частот колебаний.

Анализируя результаты (табл. 1) расчета комплексных собственных частот колебаний, полученные на основе решения задачи о собственных колебаниях электрического аналога рассматриваемой электровязкоупругой системы в различных формах, можно резюмировать, что предложенные модели с сосредоточенными параметрами, представляющими электрический аналог, описывающий собственные колебания электровязкоупругой конструкции, соответствует

исходной электромеханической системе с точки зрения частотного спектра.

При этом все варианты: схемы и с действительными, и с комплексными параметрами, формулировки задачи о собственных колебаниях тока в данных схемах (на основе законов Кирхгофа и на основе закона Ома для переменного тока, с действительными и комплексными параметрами составляющих электрических схем), дают сопоставимые по точности результаты.

Построение электрического аналога электромеханических систем при наличии внешней электрической цепи

При построении электрических аналогов электродупругих и электровязкоупругих систем с внешними электрическими цепями в качестве таковой рассматривалась резонансная последовательная или параллельная RL -цепь как один из наиболее эффективных и распространенных вариантов шунтирующих цепей. Электрические схемы для рассматриваемого варианта электрического аналога электровязкоупругой системы с учетом внешней последовательной электрической цепи будет иметь вид, представленный на рис. 5: для модели с действительными параметрами на рис. 5,а, с комплексными параметрами на – рис. 5,б.

Уравнения, описывающие колебания тока в электровязкоупругой системе с внешней последовательной RL -цепью, в зависимости от используемого варианта формулировки математической модели будут иметь следующий вид:

– построенные на основе законов Кирхгофа

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda^2 L_i q_{0i} + jR_i q_{0i} + \frac{q_{0i}}{C_i} + jR_{0n} \sum_{k=1}^n q_{0k} + \\ + \frac{1}{C_{0n}} \sum_{k=1}^n q_{0k} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ -\lambda^2 L_q q_v + jR q_v + jR_{0n+1} \sum_{k=1}^n q_{0k} + \\ + \frac{1}{C_{0n}} \sum_{k=1}^n q_{0k} = 0. \end{array} \right.$$

– построенные на основе закона Ома для переменного тока

Таблица 1

Значения комплексных собственных частот колебаний пластинки и оболочки в режимах короткого замыкания и холостого хода, полученные на основе применения моделей с распределенными параметрами и двух вариантов электрических аналогов

Номер частоты	Пластина				Оболочка			
	f_{Re}^S	f_{Im}^S	f_{Re}^O	f_{Im}^O	f_{Re}^S	f_{Im}^S	f_{Re}^O	f_{Im}^O
1. Модель с распределенными параметрами								
1	13,5753	0,0561	13,8620	0,0584	551,6022	2,7056	554,0586	2,7424
2	72,1491	0,3458	72,3336	0,34696	583,2807	2,8856	585,0860	2,9022
3	197,8992	0,9400	198,3248	0,9435	631,6824	3,0622	635,7971	3,1100
4	399,7948	1,7962	404,1581	1,8245	769,5197	3,8332	770,1165	3,8382
5	665,4549	2,9547	674,9667	2,9866	778,2249	3,8072	780,4790	3,8333
2. Электрический аналог с действительными параметрами								
2.1. Законы Кирхгофа								
1	13,5753	0,0561	13,8620	0,0582	551,6021	2,7056	553,8179	2,7360
2	72,1491	0,3458	72,3415	0,34679	583,2807	2,8856	585,0696	2,9001
3	197,8996	0,9408	198,3413	0,9440	631,6824	3,0622	636,0530	3,1122
4	399,7948	1,7962	404,3076	1,8216	769,5197	3,8332	770,0171	3,8373
5	665,4547	2,9547	675,7139	2,9842	778,2249	3,8072	780,7886	3,8373
2.2. Закон Ома для переменного тока								
1	13,5753	0,0561	13,8620	0,0585	551,6022	2,7056	554,0589	2,7442
2	72,1491	0,3458	72,3336	0,3469	583,2807	2,8856	585,0860	2,9028
3	197,8992	0,9400	198,3248	0,9437	631,6824	3,0622	635,7974	3,1105
4	399,7948	1,7962	404,1581	1,8257	769,5197	3,8332	770,1166	3,8383
5	665,4548	2,9547	674,9667	2,9882	778,2249	3,8072	780,4792	3,8337
3. Электрический аналог с комплексными параметрами								
3.1. Законы Кирхгофа								
1	13,5753	0,0561	13,8620	0,0584	551,6022	2,7056	553,8179	2,7376
2	72,1491	0,3458	72,3415	0,3470	583,2807	2,8856	585,0696	2,9020
3	197,8993	0,9400	198,3414	0,9445	631,6824	3,0622	636,0530	3,1151
4	399,7948	1,7962	404,3076	1,8264	769,5197	3,8332	770,0171	3,8359
5	665,4548	2,9547	675,7139	2,9927	778,2249	3,8072	780,7886	3,8396
3.2. Закон Ома для переменного тока								
1	13,5753	0,0561	13,8620	0,0585	551,6021	2,7056	554,0586	2,7424
2	72,1491	0,3458	72,3336	0,3469	583,2807	2,8856	585,0860	2,9022
3	197,8992	0,9400	198,3248	0,9435	631,6824	3,0622	635,7971	3,1100
4	399,7948	1,7962	404,1581	1,8197	769,5197	3,8332	770,1165	3,8382
5	665,4549	2,9547	674,9667	2,9863	778,2249	3,8072	780,4790	3,8333

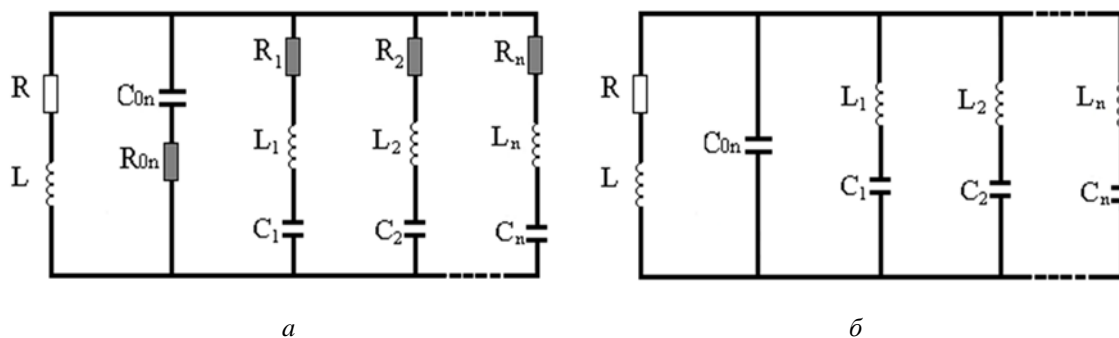


Рис. 5. Варианты схем электрического аналога электровязкоупругой системы для модели с действительными параметрами (а), и комплексными параметрами (б) при наличии внешней последовательной RL-цепи

$$\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{-L_i \lambda^2 C_i + j C_i R_i + 1}} + j R_{on} + \frac{1}{C_{on}} \right] -$$

$$-\lambda^2 L + j \lambda R = 0.$$

– для электрической схемы с комплексными параметрами

$$\begin{cases} -\lambda^2 \tilde{L}_i q_{0i} + \frac{q_{0i}}{\tilde{C}_i} + \frac{1}{\tilde{C}_{0n}} \sum_{k=1}^n q_{0k} = 0, i = \overline{1, n}, \\ -\lambda^2 L q_v + j R q_v + \frac{1}{\tilde{C}_{0n}} \sum_{k=1}^n q_{0k} = 0. \end{cases}$$

Здесь: q_v – заряд, возникающий на элементах внешней электрической цепи, L, R – величины индуктивности и сопротивления внешней электрической цепи.

В табл. 2–3 приведены значения комплексных собственных частот колебаний $f^{\omega} = \omega/2\pi$ пластинки и оболочки при двух различных значениях пары индуктивности L и сопротивления R внешней последовательной электрической цепи, шунтирующей пьезоэлемент, полученные решениями на основе применения моделей с распределенными параметрами (табл. 2) и двух вариантов их электрических аналогов (табл. 3).

Пара параметров внешней электрической цепи I соответствует случаю, когда их величины далеки от оптимальных значений для демпфирования какой-либо моды колебаний рассматриваемых конструкций. Пара параметров II соответствует оптимальными параметрам, подобранным для демпфирования первой моды колеба-

Таблица 2

Значения комплексных собственных частот колебаний пластинки и оболочки при двух различных значениях пары индуктивности L и сопротивления R внешней последовательной RL-цепи, шунтирующей пьезоэлемент, полученные на основе применения модели с распределенными параметрами

Модель с распределенными параметрами							
Пластина				Оболочка			
Вариант I L=1000 Гн, R=1 кОм		Вариант II L=11198 Гн, R=403 кОм		Вариант I L=1000 Гн, R=1 кОм		Вариант II L=7.12 Гн, R=5.4 кОм	
f_{Re}	f_{Im}	f_{Re}	f_{Im}	f_{Re}	f_{Im}	f_{Re}	f_{Im}
13,5493	0,0561	13,5308	1,4374	46,9650	0,1119	531,0110	38,8406
47,3469	0,1253	14,0427	1,4967	554,0747	2,7425	561,2282	10,6635
72,4720	0,3465	72,3408	0,3476	585,0977	2,9022	590,0806	8,5747
198,3505	0,9436	198,3270	0,9436	635,8214	3,1101	645,6258	9,9959
404,2196	1,8245	404,1638	1,8245	770,1184	3,8382	770,5389	3,9466
675,0166	2,9865	674,9715	2,9867	780,4886	3,8334	783,0737	4,6984

Значения комплексных собственных частот колебаний пластинки и оболочки при двух различных значениях пары индуктивности L и сопротивления R внешней последовательной RL-цепи, шунтирующей пьезоэлемент, полученные на основе применения электрических аналогов

Модель с действительными параметрами				Модель с комплексными параметрами			
Законы Кирхгоффа		Закон Ома для переменного тока		Законы Кирхгоффа		Закон Ома для переменного тока	
f_{Re}	f_{Im}	f_{Re}	f_{Im}	f_{Re}	f_{Im}	f_{Re}	f_{Im}
Пластина, Вариант I: L=1000 Гн, R=1 кОм							
13,5494	0,0561	13,5494	0,0561	13,5495	0,0560	13,5494	0,0560
47,3422	0,1044	47,3470	0,1057	47,3422	0,0851	47,3472	0,0851
72,4858	0,3459	72,4721	0,3463	72,4858	0,3461	72,4721	0,3461
198,3677	0,9431	198,3505	0,9437	198,3677	0,9437	198,3505	0,9435
404,3708	1,8215	404,2195	1,8257	404,3708	1,8263	404,2194	1,8196
675,7674	2,9839	675,0162	2,9880	675,7674	2,9924	675,0163	2,9860
Пластина, Вариант II: L=11198 Гн, R=403 кОм							
13,5160	1,4408	13,5148	1,4367	13,5003	1,4376	13,4994	1,4375
14,0573	1,4868	14,0587	1,4915	14,0730	1,4842	14,0740	1,4843
72,3491	0,3459	72,3410	0,3476	72,3491	0,3476	72,3410	0,3475
198,3433	0,9432	198,3270	0,9438	198,3433	0,9438	198,3274	0,9429
404,3131	1,8217	404,1636	1,8258	404,3132	1,8265	404,1636	1,8198
675,7187	2,9842	674,9710	2,9882	675,7185	2,9901	674,9711	2,9863
Оболочка, Вариант I: L=1000 Гн, R=1 кОм							
46,9658	0,1162	46,9658	0,1182	46,9659	0,0796	46,9659	0,07957
553,8324	2,7361	554,0749	2,7443	553,8324	2,7377	554,0747	2,7425
585,0807	2,9009	585,0978	2,9029	585,0811	2,9020	585,0977	2,9022
636,0786	3,1123	635,8216	3,1107	636,0785	3,1152	635,8214	3,1101
770,0186	3,8356	770,1185	3,8383	770,0186	3,8358	770,1184	3,8382
780,7991	3,8374	780,4885	3,8337	780,7991	3,8396	780,4883	3,8334
Оболочка, Вариант II: L=7,12 Гн, R=5,4 кОм							
532,8636	39,2862	532,3033	38,3868	532,6806	38,9235	532,0890	38,0490
560,0583	10,3623	561,3582	11,0029	560,1389	10,3425	561,4462	10,9492
589,9348	8,3367	590,1326	8,8242	589,9836	8,3265	590,1954	8,8025
646,5578	10,4133	645,8186	10,2902	646,6075	10,3810	645,8763	10,2438
770,3627	3,9225	770,5474	3,9501	770,3629	3,9220	770,5479	3,9485
783,7517	4,8281	783,1388	4,7360	783,7555	4,8240	783,1432	4,7262

ний соответствующей электроупругой конструкции с нулевыми значениями тангенсов потерь для материала пластинки или оболочки.

В табл. 3 представлены только первые собственные частоты колебаний конструкции и частоты (выделены в таблице полужирным шрифтом), обусловленные

формированием электрического колебательного контура за счет взаимодействия индуктивного элемента внешней цепи и собственной емкости пьезоэлемента.

Заключение

Сравнение полученных комплексных собственных частот колебаний электроуп-

ругой и электровязкоупругой конструкций на основе различных моделей их электрических аналогов с результатами решения связанной задачи электровязкоупругости в континуальной постановке показало:

1. Модели электрического аналога электровязкоупругих конструкций, построенные на основе законов Кирхгофа и на основе закона Ома, дают сопоставимые результаты. Максимальная относительная погрешность результатов в обоих случаях по отношению к решению, полученному с помощью метода конечных элементов в континуальной постановке, менее 1%, что позволяет сделать вывод об их равнозначной применимости.

2. Значения собственных частот колебаний, полученных на основе модели с комплексными параметрами электрической схемы, при значениях параметров внешней электрической цепи, близких к оптимальным, дает хорошее совпадение с решением, полученным в континуальной постановке (максимальная разница по действительным частям не превышает 0,3%, а по мнимым – 3%). В этом варианте модели отсутствует сопротивление, поэтому нет необходимости в определении его величины, что делает его более предпочтительным. Результаты, полученные на основе модели электрического аналога электровязкоупругой конструкции с внешней электрической цепью с комплексными параметрами при элементах внешней электрической цепи, близких к оптимальным, практически совпадают с результатами, полученными на основе модели электрического аналога электровязкоупругой конструкции с действительными параметрами при нулевом значении сопротивления R_{on} (рис. 3,б).

3. Отмечена следующая закономерность: действительные части собственной частоты колебаний электровязкоупругой

конструкции и встраиваемой частоты колебаний (частоты колебательного контура, образованного внешней электрической цепью и пьезоэлементом) отличаются не более чем на 0,3%. Величина мнимой части встраиваемой частоты зависит от параметров L и R и может отличаться значительно при неоптимальных для демпфирования рассматриваемой моды колебаний параметров внешней электрической цепи (для рассмотренных вариантов электровязкоупругих систем максимальная разница составляет порядка 32%). Если величины пары параметров L и R близки к оптимальным, то различие по мнимой части встраиваемой частоты не превышает 3%.

4. К достоинствам применения электрического аналога электромеханических систем следует отнести и его применимость к конструкциям любой геометрии (плоским, пространственным).

5. Использование электрического аналога для решения задачи о собственных колебаниях электромеханических систем с внешними электрическими цепями для рассматриваемых вариантов конструкций позволяет снизить размерность задачи на два порядка (с максимального значения 7148 уравнений до 11 уравнений), что приводит к снижению времени вычислений значений на порядок (с 4 мин. до 4 с). При рассмотрении конечно-элементных моделей электровязкоупругих конструкций с внешними электрическими цепями большей размерности использование их электрического аналога обеспечивает существенно больший эффект в снижении временных затрат и в повышении производительности исследований. При этом снижаются требования и к аппаратной части вычислительной техники (за счет уменьшения размера матриц, которые используются во время вычислений).

Библиографический список

1. Kligman E.P., Matveenko V.P. Natural Vibration Problem of Viscoelastic Solids as Applied to Optimization of Dissipative Properties of Constructions // International Journal of Vibration and Control. – 1997. – Vol. 3. – № 1. – P. 87–102.

2. *Матвеевко В.П., Клизман Е.П., Юрлов М.А., Юрлова Н.А.* Моделирование и оптимизация динамических характеристик smart-структур с пьезоматериалами // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т. 15. – № 1. – С. 75–85.
3. *Матвеевко В.П., Ошмарин Д.А., Севодина Н.А., Юрлова Н.А.* Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т. 9. – № 4. – С. 476–485.
4. *Iurlova N.A., Sevodina N.V., Oshmarin D.A., Iurlov M.A.* Algorithm for solving problems related to the natural vibrations of electro-viscoelastic structures with shunt circuits using ANSYS data // International Journal of Smart and Nano Materials. – 2019. – Vol. 10. – № 2. – P. 156–176.
5. *Høgsberg J., Krenk S.* Calibration of piezoelectric RL shunts with explicit residual mode correction // Journal of Sound and Vibration. – 2017. – Vol. 386. – P. 65–81.
6. *Krenk S., Høgsberg J.* Tuned resonant mass or inerter-based absorbers: unified calibration with quasi-dynamic flexibility and inertia correction. Proceedings of the Royal Society A – Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2015. – Vol. 472. – art. No. 20150718.
7. *Firestone F.A.* New analogy between mechanical and electrical systems // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1933. – № 4. – P. 249–267.
8. *Mason W.P.* Electrical and Mechanical Analogies // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1942. – Vol. 14. – № 1. – P. 128–129.
9. *Dyke V.* The electric network equivalent of a piezoelectric resonator // Physical Review. – 1925. Vol. 25. № 6. – P. 895 Abs. – № 52.
10. *Firestone F.A.* The Mobility Method of Computing the Vibration of Linear Mechanical and Acoustical Systems: Mechanical Electrical Analogies // Journal. Applied Physics. – 1938. – Vol. 9. – № 6. – P. 373–387.
11. *Miles J.* Applications and Limitations of Mechanical-Electrical Analogies. New and Old // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1943. – Vol. 14. – № 3. – P. 183–192.
12. *Matveenko V.P., Iurlov M.A., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Iurlova N.A.* Modelling of vibrational processes in systems with piezoelements and external electric circuits on the basis of their electrical analogue // International Journal of Intelligent Material Systems and Structures – 2018. – Vol. 29. – № 16. – P. 3254–3265.
13. *Юрлов М.А., Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлова Н.А.* Решение задачи о собственных колебаниях электроупругих тел с внешними электрическими цепями на основе их электрического аналога // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 268–279.
14. *Olson H.F.* Dynamical Analogies. – New York, UAS: D. Van Nostrand Company, Inc., 1943. – 208p.
15. *Alessandroni S., Andreaus U., dell'Isola F., Porfiri M.* Piezo-ElectroMechanical (PEM) Kirchhoff-Love plates // European Journal of Mechanics. A/Solids. – 2004. – Vol. 23. – № 4. – P. 689–702.
16. *Giorgio I., Culla A., Del Vescovo D.* Multimode vibration control using several piezoelectric transducers shunted with a multiterminal network // Archive of Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 79. – P. 859–879.
17. *Giorgio I., Galantucci L., Della Corte A., Del Vescovo D.* Piezo-electromechanical Smart Materials with distributed arrays of Piezoelectric Transducers: current and upcoming applications // International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 2015. – Vol. 47. – № 4. – P. 1051–1084.
18. *Viana F.A.C., Valder S.Jr.* Multimodal Vibration Damping through Piezoelectric Patches and Optimal Resonant Shunt Circuits // J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng. – 2006. – Vol. XXVIII. – № 3. – P. 293–310.
19. *Agneni A., Mastroddi F., Polli G.M.* Shunted piezoelectric patches in elastic and aeroelastic vibrations // Computers and Structures. – 2003. – Vol. 81. – P. 91–105.
20. *Fleming A.J., Behrens S., Moheimani S.O.R.* Reducing the inductance requirements of piezoelectric shunt damping systems // Smart Materials and Structures. – 2003. – № 12. – P. 57–64.
21. *Thomas O., Ducarne J., Deu J.-F.* Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction // Smart Materials and Structures. – 2012. – Vol. 21. – № 1. – art. № 015008.
22. *Caruso G.* A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping // Smart Materials and Structures. – 2001. – № 10. – P. 1059–1068.
23. *Guan M., Liao W.-H.* Studies on the Circuit Models of Piezoelectric Ceramics // International Conference on Information Acquisition, 2004. Proceedings. – 2004. – P. 26–31.
24. *Sheritt S., Wiederick H., Mukherjee B., Sayer M.* An accurate equivalent circuit for the unloaded piezoelectric vibrator in the thickness mode // Journal of Physics D: Applied Physics. – 1997. – Vol. 30. – № 16. – P. 2354–2363.
25. *Park C.H.* On the circuit model of piezoceramics // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2001. – Vol. 12. – P. 515–522.
26. *Kim S.H., Ju S., Ji C.H., Lee S.J.* Equivalent circuit model of an impact-based piezoelectric energy harvester // Journal of Physics: Conference Series. – 2014. – Vol. 557. – art. № 012094.
27. *Yang Y., Tang L.* Equivalent Circuit Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2009. – Vol. 20. – P. 2223–2235.

28. Хохлов А.В. Теоретические основы радиоэлектроники. – Саратов: Издательство Саратовского ун-та, – 2005. – 296 с.
29. Юрлов М.А., Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлова Н.А. Решение задачи о собственных колебаниях электроупругих тел с внешними электрическими цепями на основе их электрического аналога // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – № 4. – С. 268–279.

CONSTRUCTION OF AN ELECTRIC ANALOGUE FOR DETERMINING THE DISSIPATIVE CHARACTERISTICS OF ELECTRIC VISCOELASTIC BODIES WITH EXTERNAL ELECTRIC CIRCUITS

N.A. Iurlova, N.V. Sevodina, D.A. Oshmarin, M.A. Iurlov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS

The problem of damping vibrations of structural elements in various branches of technology does not lose its relevance over time but rather becomes a key issue for development of modern devices in airspace, aircraft, automotive industry. The use of piezoelectric elements and external electric circuits opens up novel possibilities for controlling the dynamic behavior of structures. Modeling the dynamic behavior of such electromechanical systems requires solving a related problem of electroviscoelasticity. Optimization of the dissipative properties of electromechanical systems under consideration is carried out through the selection of circuit parameters (tuning) that provide the best vibrations damping at a specified frequency. In this case, the most efficient tool is the problem of natural vibrations of piecewise homogeneous electroviscoelastic body with external electric circuits. However, the numerical procedure for finding the optimal parameters of electric circuits is related to multiple solution of the problem for each combination of the values of the circuit elements using complex large-sized matrices, including solving the algebraic problem of complex eigenvalues for these matrices. At the same time, the generality of mathematical equations, which describe oscillations in mechanical systems and oscillations of current and voltage in electric circuits, makes it possible to apply the method of dynamical analogies and consider equivalent electric system instead of coupled electromechanical one, replacing the equations of motion of electromechanical system with the corresponding analogues of equations for an equivalent electrical system. This allows to considerably decrease computational time and reduce the requirements for hardware resources. The developed discrete analogue is completely equivalent to the original electromechanical system with external electric circuit in terms of the spectrum of natural vibration frequencies. The results obtained with the aid of the electric analogue were verified by solving problems on natural vibrations of electroviscoelastic bodies, including those with external electric circuits, according to the mathematical statement of continuous media mechanics.

Keywords: electroviscoelastic structure, piezoelectric element, electric circuit, electrical analogue of system, natural vibrations, complex eigenfrequencies.

Сведения об авторах

Юрлова Наталья Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН – филиал Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, ул. Академика Королева, 1; e-mail: yurlova@icmm.ru

Севодина Наталья Витальевна, кандидат технических наук, научный сотрудник, ИМСС УрО РАН; e-mail: natsev@icmm.ru

Ошмарин Дмитрий Александрович, младший научный сотрудник, ИМСС УрО РАН; e-mail: oshmarin@icmm.ru

Юрлов Максим Александрович, инженер-исследователь, ИМСС УрО РАН; e-mail: yurlov@m@icmm.ru

Материал поступил в редакцию 22.06.2020 г.