УДК 517.929

РАЗРАБОТКА ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ*

К.М. Чудинов, *Пермский национальный исследовательский политехнический университет*

В статье рассмотрены основные результаты, полученные группой пермских математиков в 2013-15 гг. в рамках исполнения инициативного проекта, поддержанного РФФИ и Пермским краем, грант №13-01-96050. Результаты представляют собой эффективные условия наличия у непрерывных и дискретных динамических систем с последействием определенных асимптотических свойств, в первую очередь устойчивости и осцилляции. Новизна и значимость полученных результатов охарактеризована сопоставлением с лучшими из известных результатов.

Ключевые слова: *динамическая система, последействие, дифференциальное уравнение, разностное уравнение, матрица Коши, устойчивость, осцилляция.*

С середины XX в. разработано достаточное количество универсальных методов исследования устойчивости динамических систем с последействием: кроме наиболее известного метода функционалов Ляпунова–Красовского применяются метод функций Разумихина, W-метод Азбелева, теоремы Като. Но с появлением новых моделей с последействием добиваться эффективности применения классических методов все труднее. Более того, наиболее точные условия устойчивости относительно простых уравнений с последействием удается получить, как правило, только применяя принципиально новые подходы (например, это относится к обширному семейству результатов, идущих от знаменитой «теоремы о 3/2» А.Д. Мышкиса). Поэтому сегодня необходима разработка принципиально новых подходов, в том числе использование некоторых идей, уже высказанных за несколько десятилетий развития теории уравнений с последействием, но еще не оцененных в должной степени. Разработка таких подходов являлась основной целью проекта.

Методы исследования. В качестве теоретической основы исследования использованы сложившиеся за последние несколько десятилетий теории функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) и разностных уравнений (РУ). В большинстве случаев использовалось определение решения уравнения с последействием, предложенное Н.В. Азбелевым, согласно которому начальная функция, задаваемая с целью корректного определения уравнения, переносится в правую часть уравнения и оказывается внешним по отношению к нему объектом. Тем не менее выбор начальной функции позволяет использовать свойства решений определенного вида и может являться действенным инструментом исследова-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-96050).

ния асимптотики решений ФДУ. Поэтому существенно использованы идеи и подходы, предложенные в работах, где решение уравнения определяется как непрерывное продолжение начальной функции, и аналоги этих подходов для РУ.

Постановки задач по отношению к автономным и неавтономным моделям, а в связи с этим и подходы к этим задачам, существенно различны.

В работах, посвященных ФДУ, в качестве автономных уравнений принято рассматривать *дифференциально-разностные* уравнения с конечным числом постоянных запаздываний и с постоянными коэффициентами. Описание решений таких уравнений не зависит от выбора начальной точки. Использование функции Коши позволило обобщить этот подход. Для ФДУ это дало возможность наряду с сосредоточенным запаздыванием учесть распределенное, не исключая случая сингулярной составляющей. Аналогичное определение автономности применялось к РУ.

В исследовании *неавтономных* моделей наиболее общие результаты были получены с помощью техники дифференциальных неравенств и их разностных аналогов. В частности, по отношению к уравнениям с различной природой запаздывания удалось применить разработанный на основе этой техники авторский *метод тест-уравнений* получения точных признаков устойчивости и знакоопределенности решений.

Важнейшие результаты и сопоставление их с мировым уровнем. По результатам исследований опубликованы 30 статей в рецензируемых журналах (из них: 25 – в журналах, входящих в список ВАК; 13 – в журналах, индексируемых в базе Scopus; 4 – в журналах, индексируемых в базе Web of Science) и 38 тезисов международных и Всероссийских конференций. Ниже рассматриваются результаты основных опубликованных работ.

1. В работе [1] установлены признаки положительности фундаментального решения в виде неулучшаемых «интегральных оценок» параметров. В частности, установлено следующее. Пусть $a_k(n) \ge 0$, $0 \le h_k(n) \le H$. Если при этом $\sup\limits_{n \in \mathrm{N}} \sum\limits_{i=n-h(n)}^{n} a(i) \le \left(\dfrac{H}{H+1}\right)^{H}$, то фундаментальное решение уравнения

$$x(n+1) - x(n) + a(n)x(n-h(n)) = 0,\ n \in \mathrm{N}_0$$

положительно. Тем самым установлено окончательное решение следующей задачи. В 1990 г. Г. Ладасом была высказана гипотеза: если $a(n) \ge 0$, $h(n) \equiv H \ge 0$ и $\sum\limits_{i=n-H}^{n-1} a(i) \le \left(\dfrac{H}{H+1}\right)^{H+1}$, то фундаментальное решение приведенного выше уравнения положительно. Позже был построен пример, доказывающий, что гипотеза Ладаса неверна, но открытым остался вопрос об истинных условиях неосцилляции в терминах суммы параметров на промежутке длины запаздывания.

2. В работе [2] для скалярного разностного уравнения вида

$$x(n+1) - x(n) + \sum_{k=0}^{N} a_k(n)x(n-h_k(n)) = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

в случае $a_k(n) \equiv a_k$, $h_k(n) \equiv k$ получены эффективные необходимые и достаточные условия положительности фундаментального решения, для которых найдены геометрические интерпретации в виде областей в пространстве параметров $\{a_0, \ldots, a_N\}$. Полученный результат применяется к исследованию неавтономных уравнений с равномерными оценками $0 \le a_k(n) \le a_k$, $0 \le h_k(n) \le h_k$.

Область положительности фундаментального уравнения задается поверхностью в пространстве параметров, что является не имеющим аналогов результатом.

3. В работе [3] для линейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + (Tx)(t) = 0, \quad t \ge 0,$$

где $a \in \mathrm{R}$ и линейный регулярный вольтерров оператор T действует из пространства непрерывных функций в пространство локально суммируемых функций, получены признаки экспоненциальной и равномерной устойчивости решения в виде областей в пространстве коэффициентов. Построены примеры, показывающие точность границ областей устойчивости на двух классах функционально-дифференциальных уравнений: с сосредоточенным и распределенным запаздыванием.

По-видимому, в указанной общности объект был исследован впервые.

4. В работе [4] исследованы некоторые принципиальные для целей проекта способы применения скалярных функционально-дифференциальных неравенств для оценки решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Показано, что эти способы основаны на относительно простом факте, являющимся прямым обобщением простейшей классической теоремы С.А. Чаплыгина о дифференциальном неравенстве.

Показано, что базовые идеи сложившихся в научной школе проф. Н.В. Азбелева методов применения функционально-дифференциальных неравенств для оценки решений линейных уравнений с последействием применимы к исследованию существенно более широких классов уравнений, чем линейные.

5. В [5] и последующих работах аспиранта М.В. Мулюкова изучены свойства корней квазимногочлена $F(z)=\det(Iz+A+Be^{-zh})$, где A и B – любые 2×2-матрицы. Установлено, что область устойчивости соответствующих квазимногочлену систем, в частности, системы

$$\dot{x}(t)+Ax(t)+Bx(t-h)=0, \quad t\geq 0,$$

можно рассматривать как множество точек в пятимерном пространстве параметров. Рассмотрены все двадцать случаев, когда среди пяти коэффициентов квазимногочлена не более трех ненулевых. Для каждого такого случая найден критерий устойчивости в двух вариантах: аналитическом и геометрическом (область на плоскости или в пространстве). Часть признаков оказались равносильными известным ранее, в четырех случаях из десяти признаки оказались новыми.

В подавляющем большинстве работ, посвященных изучению устойчивости системы $\dot{x}(t)+Ax(t)+Bx(t-h)=0$, авторы либо ищут достаточные условия, либо накладывают на матрицы A и B специальные условия (например, одновременную триангуляризацию). Полное описание области устойчивости в пространстве пяти параметров дает возможность работать с любыми матрицами 2×2. Исследованные в рамках Проекта квазиполиномы позволяют свести любую задачу с числом параметров не более трех к проверке попадания параметров в построенную область.

6. В работе [6] получены точные необходимые и достаточные условия положительности фундаментального решения линейного автономного дифференциального уравнения с распределенным последействием

$$\dot{x}(0)+a_0x(t)+\int\limits_0^{\min\{\omega,t\}} x(t-s)\,dr(s)=f(t),$$

$t\geq 0,$

где $a_0\in \mathrm{R}$, $\omega>0$, функция r определена на отрезке $[0,\omega]$ и не убывает, $r(0)=0$, функция f локально суммируема. Признаки сформулированы в терминах параметров данного уравнения, приводятся в аналитической и в геометрической формах.

В силу точности полученные признаки включают как частный случай все известные признаки положительности фундаментального решения для линейных скалярных автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием (ранее были известны признаки для некоторых случаев, большей частью для уравнений с сосредоточенным запаздыванием).

7. В работах [7] и (в более общем случае) [13] исследована модель динамики популяций, проходящей в своем развитии три стадии (взросление, зрелость, старение), сводящаяся к нелинейному дифференциальному уравнению с последействием вида

$$\dot{y}(t) = \beta y(t-\tau_1) - \lambda(y(t))y(t) -$$
$$-\beta \exp\left(- \int\limits_{t-\tau_2}^{t} \lambda(y(s))\,ds \right) y(t-\tau_1-\tau_2) = 0,$$

где $\beta > 0$, $\tau_1, \tau_2 > 0$, а λ – неотрицательная монотонно возрастающая к бесконечности дифференцируемая функция. Исследована устойчивость ненулевого положения равновесия.

Ранее модель исследовалась в нескольких работах. Был приведен вывод уравнения, доказана его однозначная разрешимость, найдены точки равновесия и исследована устойчивость тривиального положения равновесия. В рамках Проекта были впервые найдены эффективные признаки устойчивости нетривиального положения равновесия. В случае $\tau_1 = \tau_2$ доказана локальная экспоненциальная устойчивость при любых допустимых значениях параметров уравнения.

8. В работах [8] (в частном случае) и [12] исследованы асимптотические свойства решений линейных разностных уравнений вида

$$x(n+1) - x(n) = a_0 x(n) + \sum_{k=0}^{N} a_k x(n - r_k(n)),$$

$n \in \mathrm{N}$,

где $a_0 \in \mathrm{R}$, $a_k > 0$, $0 \le r_k(n) \le \omega_k$, $k = \overline{1,n}$. Набор параметров a_0, a_k, ω_k, $k = \overline{1,n}$, определяет *семейство* уравнений исследуемого класса. В виде явных условий на параметры семейства установлены эффективные необходимые и достаточные условия устойчивости, а также знакоопределенности и монотонности устойчивых решений всех уравнений семейства.

Эффективные признаки, к настоящему моменту доведенные до явного геометрического представления, включают в себя все известные точные условия как частные случаи.

9. В работе [9] для линейной системы ФДУ общего вида

$$\dot{x}(t) + \int\limits_0^t d_s R(t,s)x(s) = f(t), \quad t \ge 0$$

предложены условия на матрицу-функцию $R(t,s)$, при которых равномерная асимптотическая и экспоненциальная устойчивости эквивалентны.

Найденные условия эквивалентности равномерной асимптотической и экспоненциальной устойчивости обобщают известные результаты из работ Дж. Хейла, В.А. Тышкевича, В.В. Малыгиной. Следствием полученного результата является известная лемма Массера–Шеффера для ОДУ.

10. В работе [10] исследована устойчивость точек равновесия модели динамики биологической популяции в условиях воздействия вредных веществ. Найдены необходимые и достаточные условия устойчивости положений равновесия и дана их геометрическая интерпретация в виде трехмерной области в пространстве параметров.

Авторами модели (А.Н. Пичугина, Н.В. Перцев) для исследования ее устойчивости был предложен алгоритм, основанный на методе монотонных операторов и свойствах невырожденных *М*-матриц. Этот алгоритм эффективен, если явно указан вид функции θ и конкретные числовые параметры, но он не дает представления об области устойчивости системы в целом. В рамках Проекта получено аналитическое и графическое описание области локальной асимптотической устойчивости положений равновесия системы.

11. В работе [11] получены условия осцилляции решений уравнения

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k(t)x(h_k(t)) = 0, \quad t \ge 0,$$

где $a_k(t) \ge 0$, в виде неравенства

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sum_{k=1}^{m} \int_{\{s: h_k(s) \le t \le s\}} a_k(s)\,ds > 1.$$

Следствиями полученного результата оказываются несколько известных ранее теорем (М.И. Трамов, Р. Коплатадзе и Г. Квиникадзе, G. Ladas, X. Tang).

Библиографический список

1. *Malygina V., Chudinov K.* Explicit conditions for the nonoscillation of difference equations with several delays // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2013. – № 46. – P. 1–12. DOI: 10.14232/ejqtde.2015.1.65.
2. *Малыгина В.В.* О положительности фундаментального решения разностного уравнения // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 3. – С. 19–32.
3. *Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В.* Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последействием // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 4. – С. 25–41.
4. *Чудинов К.М.* Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием // Там же. – С. 52–61.
5. *Мулюков М.В.* Об асимптотической устойчивости двупараметрических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 6. – С. 48–55.
6. *Sabatulina T., Malygina V.* On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2014. – № 61. – P. 1–16.
7. *Малыгина В.В., Мулюков М.В., Перцев Н.В.* О локальной устойчивости одной имодели динамики популяции с последействием // Сиб. электр. матем. изв. – 2014. – Т. 11. – С. 951–957.
8. *Малыгина В.В., Чудинов К.М.* Об устойчивости запаздывающих разностных уравнений с положительной функцией Коши // Сист. упр. информ. техн. – 2014. – № 3.2(57). – С. 245–250.
9. *Kulikov A., Malygina V.* On relation between uniform asymptotic stability and exponential stability of linear differential equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2015. – № 65. – P. 1–8. DOI: 10.14232/ejqtde.2015.1.65.
10. *Баландин А.С., Сабатулина Т.Л.* Локальная устойчивость одной модели динамики популяции в условиях воздействия вредных веществ // Сиб. электр. матем. изв. – 2015. – Т. 12. – С. 610–624. DOI: 10.17377/semi.2015.12.049.
11. *Chudinov K.* Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2016. – № 2. – P. 1–10. doi: 10.14232/ejqtde.2016.1.2.
12. *Малыгина В.В., Чудинов К.М.* Асимптотика решений разностных уравнений с запаздываниями // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 7. – С. 66–82.
13. *Малыгина В.В., Мулюков М.В.* О локальной устойчивости одной модели динамики популяции с тремя стадиями развития // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 4. – С. 35–42.

THE DEVELOPMENT OF EFFECTIVE METHODS FOR THE INVESTIGATION OF STABILITY OF DYNAMICAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

K.M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University

We consider the basic results obtained by a group of Perm mathematicians in 2013-15, in the framework of the execution of an initiative project supported by the RFBR and Perm Region, grant no.13-01-96050. The results represent effective conditions of certain asymptotic properties, primarily stability and oscillations, for continuous and discrete dynamical systems with aftereffect. The originality and significance of the obtained results are characterized by comparison with the best of the known results.

Keywords: dynamical system, aftereffect, differential equation, difference equation, the Cauchy matrix, stability, oscillation.

Сведения об авторе

Чудинов Кирилл Михайлович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29; e-mail: cyril@list.ru

Материал поступил в редакцию 21.10.2016 г.