УДК 531.01,519.2:004.94

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ И СЛУЧАЙНЫЕ, ПЕРЕХОДНЫЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ, СИНХРОНИЗАЦИЯ, ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ И УПРАВЛЕНИЕ*

В.В. Маланин, *Пермский государственный национальный исследовательский университет*
В.Н. Иванов, *Пермский государственный национальный исследовательский университет*
Е.Н. Остапенко, *Пермский государственный национальный исследовательский университет*
И.Е. Полосков, *Пермский государственный национальный исследовательский университет*
В.А. Шимановский, *Пермский государственный национальный исследовательский университет*

В работе дается обоснование метода учета дополнительных связей в механических системах, основанного на применении модифицированных функций Лагранжа в форме Пауэлла и алгоритмах адаптивного управления. Замыкающая система уравнений для определения модифицированных множителей Лагранжа построена в виде ПИД-регулятора. Анализируются результаты вычислительных экспериментов для проверки сравнительной эффективности предложенного метода и других известных подходов. Представляется новая матричная форма уравнений движения систем абсолютно твердых тел со структурой дерева в импульсах Пуассона, обобщенных координатах и квазискоростях и метод разрешения уравнений движения относительно старших производных, ориентированный на использование ЭВМ, а также рекуррентные формулы для определения всех кинематических и динамических переменных, входящих в уравнения.

Далее рассматривается приближенная схема анализа линейных динамических систем, описываемых стохастическими интегрально-дифференциальными уравнениями (СИДУ) с неразностными ядрами, схема, основанная на использовании модификации итерационного метода аппроксимации матричной функции Грина; представлены методика и компьютерный алгоритм применения системы функций Христова для анализа стохастических дифференциальных уравнений в частных производных (СДУвЧП) в неограниченной области; метод Гийюзика распространяется на новый класс моделей – СДУвЧП с постоянным запаздыванием – с целью построения спектральной плотности стационарного случайного поля; рассмотрены задачи параметрической надежности для систем с внезапными отказами, получен ряд частных решений обобщенного уравнения

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Правительства Пермского края (грант № 14-01-96019).

Колмогорова–Феллера для плотности вероятности параметра состояния, проблемы анализа стохастической двумерной модели переноса загрязнений по течению реки, вопросы расчета матрицы ковариационных функций для линейных параметрических систем СДУ и оценки чувствительности линейных стохастических дифференциально-разностных систем с аддитивными шумами и кратными запаздываниями к изменению детерминированных параметров.

Ключевые слова: *математическое моделирование, механическая система, модифицированная функция Лагранжа, импульсы Пуассона, стохастический анализ, запаздывание.*

Новые методы компьютерного моделирования систем твердых тел

1. Выполнено теоретическое обоснование нового метода учета дополнительных связей в механических системах, основанного на применении модифицированных функций Лагранжа в форме Пауэлла и алгоритмах адаптивного управления [1, 2]. Методика распространена на случай, когда в механической системе действует m дополнительных линейно-независимых голономных склерономных связей, ограничивающих степени свободы тел системы $(m < n)$, n – число степеней свободы:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = 0, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t) \in R^n$ – вектор обобщенных координат, $\boldsymbol{g} \in R^m$ – дважды дифференцируемая вектор-функция. Для пересчета модифицированных множителей Лагранжа применялись два подхода: метод Баумгарта и метод, основанный на приближенной итерационной формуле с линейной скоростью сходимости.

С практической точки зрения, преимущество разрабатываемого подхода заключается в том, что предлагаемые уравнения движения механических систем с замкнутыми кинематическими цепями имеют ту же структуру, что и для механических систем со структурой дерева. Это означает, что для их разрешения относительно ускорений можно использовать эффективные методы решения рекуррентных систем уравнений, разработанных для подобных механических систем.

Предложена методика оценивания параметров модифицированных функций Лагранжа, обеспечивающих движение механических систем вдоль дополнительных связей с заданной точностью. Показано, что настройка ПИД-регулятора (3) заключается в подборе трех векторных параметров: коэффициентов усиления обратной связи k_u, диагональных элементов матриц жесткости C и демпфирования D дополнительных связей.

Проведены вычислительные эксперименты для проверки сравнительной эффективности различных подходов к учету дополнительных связей. Исследования выполнены на двух конкретных моделях механических систем со множеством дополнительных связей. Первая система представляет собой два многозвенных математических маятника, связанных в узлах дополнительными невесомыми балками таким образом, что отдельные части конструкции образуют жесткие звенья. В качестве второй системы была выбрана квадратная решетка из множества тонких квадратных параллелепипедов. Каждое тело системы связывается с соседними телами шаровыми шарнирами, расположенными в центрах боковых граней тел. В центре каждой группы из 9 звеньев решетки отсутствует одно тело, что обеспечивает статическую определенность всей системы [1].

Предлагаемый метод учета дополнительных связей сравнивался с другими известными методами. Проведенные расчеты показали, что разработанный метод имеет преимущества перед существующими методами учета дополнительных связей.

2. Рассмотрим новую матричную форму уравнений движения систем абсолют-

но твердых тел со структурой дерева. В качестве независимых параметров, однозначно определяющих положение и распределение скоростей тел системы в пространстве, выбраны обобщенные координаты $\boldsymbol{q}$ и обобщенные импульсы $\boldsymbol{p}$ (импульсы Пуассона). Особенность системы уравнений состоит в том, что она разрешена относительно производных от обобщённых импульсов и не содержит реакций связей:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \\ -\boldsymbol{S}\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{\nu}^*, \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{p}, \\ \dot{\boldsymbol{p}} = \left(\dot{\boldsymbol{A}}^T - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\Omega}\right)\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{Q}, \end{cases} \tag{2}$$

$\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_1,...,\Omega_N)$, $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{\omega}_1, ..., \boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{\omega}_N)^T$ – вектор проекций линейных $\mathbf{v}_i$ и угловых $\boldsymbol{\omega}_i$ скоростей тел механической системы на оси i-й системы координат, $i = \overline{1, N}$, N – число тел в системе, – матрицей кинематической структуры,

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{v}}_i & \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \end{pmatrix}.$$

Символ «~» используется для обозначения кососимметричной матрицы векторного произведения.

Разработанный метод модифицированных множителей Лагранжа для учета дополнительных связей в системах многих тел применен к уравнениям движения (2) в обобщенных импульсах Пуассона. Преимущество формы уравнений (2) состоит в том, что при наличии дополнительных геометрических или кинематических связей в механической системе уравнения (2) могут быть замкнуты только уравнениями кинематических связей. При этом методы стабилизации связей (типа метода Баумгарта [1, 2]), применяемые для уравнений (2), обеспечивают экспоненциальный закон компенсации отклонений в случае нарушения связей и не приводят к появлению дополнительных «паразитных» малых высокочастотных колебаний в механической системе.

Разработан новый метод разрешения уравнений динамики систем твердых тел со структурой дерева относительно обобщенных скоростей и производных обобщённых импульсов с вычислительной трудоемкостью пропорциональной числу тел в системе.

Созданная методика моделирования системы многих тел реализована в виде программ на языках САВ Mathematica (генерация подпрограммы вычисления правых частей системы дифференциальных уравнений, моделирующих динамику системы тел) и Fortran (численное интегрирование системы дифференциальных уравнений).

Разработанные методы были применены к решению различных задач, имеющих практическое значение:

1. Для моделирования крупногабаритных изделий машиностроения на стадии оптимизации параметров проектируемых конструкций и исследовании их поведения при различных условиях эксплуатации.

2. Для решения различных задач, возникающих на различных этапах математического моделирования поведения антропоморфных объектов в сложнокоординационных видах деятельности, к которым, например, относятся различные боевые искусства [3]. Конечная цель исследования – создание банка эталонных 3D-моделей динамического и кинематического поведения конкретных антропоморфных механизмов в процессе их функционирования и взаимодействия.

Исследование стохастических систем различной природы

Рассмотрим некоторые результаты, полученные в рамках данного направления и включающие построение теоретического аппарата и алгоритмов стохастического анализа и прогнозирования поведения линейных и нелинейных стохастических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, с ограниченными и неограниченными, детерминированными и случайными запаздываниями и без, с непрерывными и/или дискретными возмущениями, включая методы линеаризации нелинейных систем с запаздыванием, решение задач оценки надежности и чувствительности и др. [4–7].

1. Разработана приближенная схема анализа линейных динамических систем, описываемых СИДУ с неразностными ядрами. Уравнения такого типа являются математическими моделями значительного числа явлений в различных областях науки и техники, включающих теорию колебаний объектов с сосредоточенными и распределенными параметрами с учетом аэроавтоупругости, наследственности, (термо)вязкоупругости и старения материалов (асфальт, бетон, биополимеры, горные породы, коллоидные растворы, композиты, природные и искусственные полимеры, суспензии, стекло, целлюлоза и т.п.) и др. Разработанная расчетная схема основана на использовании модификации итерационного метода аппроксимации матричной функции Грина и предназначена для вычисления первых моментных функций вектора состояния системы, включая функции математического ожидания и ковариационные функции. Структура построенных расчетных формул позволяет использовать переменный шаг интегрирования с целью поддержания необходимой точности оценивания моментных функций, а также, при необходимости, применить параллельные вычисления для получения их сеточных значений.

2. Для решения задач анализа СДУвЧП в неограниченной области предложена методика и компьютерный алгоритм автоматизации расчетов при применении системы ортонормированных на всей действительной оси функций Христова, замкнутых относительно операций умножения и дифференцирования.

3. Метод Гийюзика (S. Guillouzic), разработанный для вычисления спектральной плотности решения линейного СДУ первого порядка с постоянными коэффициентами и запаздыванием, распространен на новый класс моделей – эволюционные СДУвЧП с постоянным запаздыванием. Задача исследования состояла в построении спектральной плотности стационарного случайного поля – решения параболического уравнения со случайным входом. Несмотря на то что рассмотрен только отдельный частный случай параболических уравнений, несложно перенести примененную технологию и на более сложные линейные эволюционные СДУ и на системы таких уравнений.

4. Решалась одна из задач определения плотности вероятности распределения параметра, которому свойственны внезапные отказы. Плотность распределения этого параметра будет удовлетворять ИДУ Колмогорова–Феллера. Как известно, общее аналитическое решение такого уравнения неизвестно, а имеющийся ряд частных случаев такого решения невелик. Поэтому для анализа этого уравнения в конкретных ситуациях бывает целесообразно применять операционное исчисление в сочетании с приближенными методами исследования ИДУвЧП и алгоритмами статистической динамики. На основе этой идеи получен ряд частных решений уравнения Колмогорова–Феллера для плотности вероятности параметра состояния.

5. Рассмотрена стохастическая двумерная модель переноса загрязнений по течению реки, включающая случайные пульсации и неслучайные средние продольной и поперечной скоростей водного потока, коэффициенты продольной и поперечной диффузии и консервативности вещества. Построены уравнения для первых моментных полей, для которых получено приближенно аналитическое решение в частном случае. Схема решения основана на применении функций Грина и разложений в ряды Фурье по косинусам.

6. Исследовалась одна из проблем из области вероятностного анализа поведения динамических систем с сосредоточенными параметрами, описываемых линейными СДУ с параметрическими возмущениями в форме независимых стандартных винеровских процессов. В рамках корреляционной теории векторных случайных процессов основными объектами исследования являются вектор

функций математических ожиданий, матрица функций ковариации (дисперсии) и матрица ковариационных функций векторного случайного процесса, моделирующего изменение вектора состояния изучаемой системы. Основное внимание уделяется представлению новой схемы расчета матрицы ковариационных функций, представленной на примере анализа системы с одной степенью свободы. Перенос разработанной схемы на нелинейные стохастические системы возможен при использовании какой-либо схемы замыкания бесконечной системы ОДУ для начальных моментных функций.

7. В работе рассматривается задача оценки чувствительности линейных стохастических дифференциально-разностных систем с аддитивными шумами и кратными запаздываниями к изменению детерминированных параметров. В качестве характеристик чувствительности выбраны первые моментные функции (математические ожидания и ковариации) для функций чувствительности вектора состояния до второго порядка. На основе сочетания классического метода шагов и расширения пространства состояния построена замкнутая цепочка уравнений без запаздывания, которая описывает поведение искомых характеристик. Численное интегрирование этих уравнений не требует использования метода Монте-Карло, а следовательно, и множественных имитаций для расчета искомых характеристик. Кроме того, для указанного интегрирования не нужны специальные алгоритмы, ориентированные на дифференциальные уравнения с запаздыванием.

По результатам исследований в Роспатенте получено пять свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ, одна программа и два комплекса программ зарегистрированы в ОФЭРНиО.

Библиографический список

1. *Иванов В.Н.* Численные методы исследования механических систем с дополнительными связями // Вестн. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. – Вып. 4(31). – Пермь, 2015. – С. 16–27.
2. *Иванов В.Н., Полосков И.Е.* Метод модифицированных функций Лагранжа в задаче моделирования механических систем с дополнительными связями // Современные наукоемкие технологии. – 2016. – Вып. 10(1). – С. 67–73.
3. *Иванов В.Н., Панченко О.А., Олейников В.М., Черников А.В.* Математическое моделирование динамики борцов айкидо при выполнении приема ириминагэ // Вестн. Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – Вып. 2(29). – Пермь, 2015. – С. 30–36.
4. *Полосков И.Е.* Схема расчета функций чувствительности до второго порядка для линейных стохастических дифференциальных систем с постоянными запаздываниями // Вестн. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Вып. 4(31). – С. 36–45.
5. *Полосков И.Е.* Стохастические дифференциальные системы со случайными запаздываниями // Вестн. Удмуртского ун-ета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25. – Вып. 4. – С. 501–516.
6. *Poloskov I., Malanin V.* A scheme for study of linear stochastic time-delay dynamical systems under continuous and impulsive fluctuations // International Journal of Dynamics and Control. – 2016. – Vol. 4, № 2. – P. 195–203.
7. *Полосков И.Е.* Анализ линейных стохастических интегродифференциальных систем с сосредоточенными запаздываниями // Вестн. Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Вып. 2(33). – С. 98–105.

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMICS OF COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS: DETERMINISTIC AND RANDOM, TRANSIENT AND STEADY REGIMES, SYNCHRONIZATION, SENSITIVITY AND CONTROL

V.V. Malanin, V.N. Ivanov, E.N. Ostapenko, I.E. Poloskov, V.A. Shimanovskiy

Perm State National Research University

This paper gives a justification of the method of accounting for additional constraints in holonomic mechanical systems with the help of the modified Lagrangian functions in the form of Powell and adaptive control algorithms. The closing system of equations for determining the modified Lagrange multiplier is built in the form of a PID controller. The results of computational experiments are analysed to test the comparative efficiency of the proposed method and other known approaches. We present (i) a new matrix form for equations of motion for systems of rigid bodies with the tree structure and Poisson momentum, generalized coordinates and quasi-velocities as unknowns, (ii) the method of resolution of equations of motion with respect to the highest derivatives, focused on the use of computers, as well as the recurrent formula to determine all kinematic and dynamic variables in the equations.

Further an approximate scheme for analysis of linear dynamical systems, described by stochastic integro-differential equations with nondifference kernels, is considered. The scheme proposed is based on a modification of the iterative approximation method of the matrix Green's function. Then we demonstrate (i) a methodology and a computer algorithm for the application of the Christov's function system for analysis of stochastic partial differential equations (SPDE) in an unbounded region; (ii) the method of S.Guillouzic that was extended to a new class of models, i.e. evolutionary SPDE with a constant delay, with the objective of constructing the spectral density function of a stationary random field. The parametric reliability problems for systems with a sudden failure are considered, a number of particular solutions of the generalized Kolmogorov–Feller equation for the probability density function of a state parameter is obtained. Moreover, we consider a two-dimensional stochastic model of pollution transport along a river, questions of calculation of a covariance function matrix for linear parametric SDE systems and the estimation of sensitivity of linear stochastic differential-difference systems with additive noises and multiple delays to a change of deterministic parameters.

Keywords: mathematical modeling, mechanical system, the modified Lagrangian function, Poisson impulses, stochastic analysis, delay.

Сведения об авторах

Маланин Владимир Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры процессов управления и информационной безопасности, Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15; e-mail: malanin@psu.ru

Иванов Владимир Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, ПГНИУ e-mail: precol@psu.ru

Остапенко Елена Николаевна, старший преподаватель кафедры процессов управления и информационной безопасности, ПГНИУ; e-mail: ostapenko@psu.ru

Полосков Игорь Егорович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики, ПГНИУ; e-mail: polosk@psu.ru

Шимановский Владимир Александрович, старший преподаватель кафедры высшей математики, ПГНИУ; e-mail: vlshim@psu.ru

Материал поступил в редакцию 21.10.2016 г.