

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ СХЕМ ПО ОБНАРУЖЕНИЮ МОМЕНТНЫХ ЭФФЕКТОВ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ*



В.В. Корепанов,
Институт механики сплошных
сред УрО РАН

Даны основные понятия о теории континуума Коссера и некоторые исторические аспекты ее развития. Рассмотрены особенности теории и основные этапы, связанные с разработкой экспериментальных схем для обнаружения моментных эффектов на основе решения двумерных и трехмерных задач в рамках несимметричной теории упругости. Проведены численные исследования, направленные на оценку влияния различных факторов в изготовлении образца, схеме нагружения и выборе материала на уровень величин, измеряемых в эксперименте. Такие исследования позволяют оценить перспективность планируемых экспериментов, направленных на установление фактов моментного поведения материалов при статических и динамических внешних воздействиях.

Ключевые слова: континуум Коссера, несимметричная теория упругости, численные решения, экспериментальные схемы, моментные эффекты.

В 1909 году была опубликована книга французских исследователей Эжена и Франсуа Коссера (Cosserat) «Теория деформируемых тел» [1], заложившая основы механики обобщенных континуумов.

Одной из основных гипотез классической механики сплошных сред (МСС) является принцип напряжений Коши, устанавливающий эквивалентность действия всех внутренних сил, приложенных к элементарной площадке, действию их равно-

действующей, приложенной к центру площадки. Однако в общем случае действие произвольной системы сил эквивалентно действию главного вектора и главного момента. При этом в среде возникают не только напряжения σ_{ij} , но и моментные напряжения μ_{ij} , образующие, вообще говоря, несимметричные тензоры (рис. 1, а). Чтобы учесть эти факторы, необходимо допустить в среде наличие дополнительных степеней свободы и рас-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 11-01-96022) и в рамках программы УрО РАН № 12-С-1-1015.

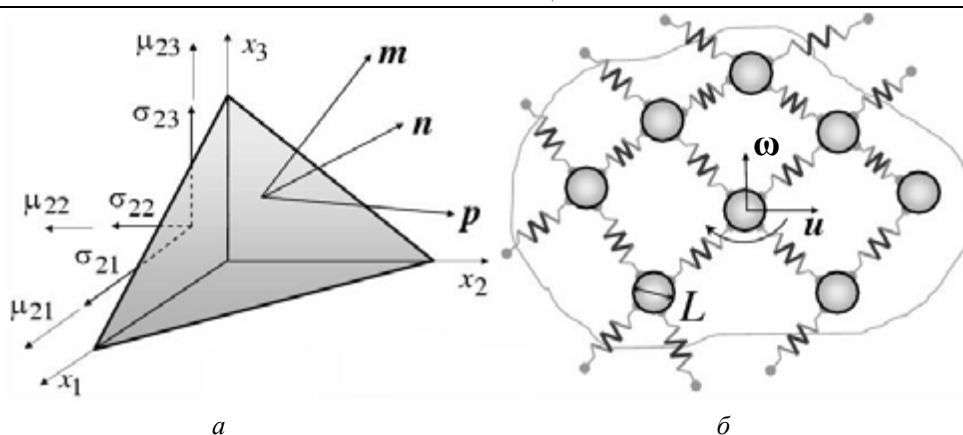


Рис. 1. Модель среды Коссера

смотреть физически бесконечно малый объем (по которому ведется усреднение свойств среды) не как материальную точку, а как более сложный объект, обладающий новыми степенями свободы (ротационными, осцилляторными) или способностью к микродеформации. Таким образом, для расширения спектра свойств сплошной среды необходимо предположить у физически бесконечно малого объема существование внутренней структуры (микроструктуры), обусловленной зернистостью или волокнистостью строения реальных материалов.

Среду, моделируемую таким образом, называют средой Коссера, а из-за появления моментных несимметричных напряжений эту теорию называют моментной, несимметричной или микрополярной теорией упругости. В силу того что нагрузка на элементарный объем тела осуществляется также и посредством момента сил, для среды вводится независимая кинематическая характеристика, с которой связана работа данного вращающего момента. Этой характеристикой является вектор поворота ω . Можно предложить следующую модельную интерпретацию логики введения этого вектора. Пусть произвольная область тела (рис. 1, б) состоит из абсолютно твердых частиц, имеющих, в отличие от классической теории упругости, линейный размер L и связанных между собой упруго, но эти связи действуют на внешний край частиц. В этом случае кинематика частицы будет определяться вектором перемещения центра масс u и

вектором поворота ω . В случае континуума Коссера эти вектора являются непрерывными функциями. То есть каждой материальной точке приписываются свойства частицы, имеющей масштаб и ориентацию. Таким образом, в среде появляются дополнительные физические параметры, характеризующие линейный размер и момент инерции частиц, а также свойства связей относительно вращения.

Можно сказать, что появление модели континуума Коссера знаменовало собой начало перехода в МСС от механики Ньютона, исходным объектом которой является материальная точка, к механике Эйлера, имеющей в качестве исходного объекта твердое тело.

До недавних пор считалось [2], что работа Коссера существует как бы «в вакууме», не имея ни предшественников, ни, долгое время, последователей. Но это не соответствует действительности. «Отцами-основателями» сред Коссера можно считать Якоба Бернулли, который в 1686 году ввел в рассмотрение момент количества движения, и Леонарда Эйлера, в 1765 году описавшего кинематику твердого тела конечных размеров.

До конца XIX-го века физиками разрабатывались две теории эфира – теория квазиджидкого (газоподобного) эфира и теория квазитвердого эфира. За разработкой квазиджидкого эфира стояли такие известные ученые, как Р. Декарт, Дж. Максвелл, Г. Лоренц. Они предполагали, что в эфире существуют вихри из каких-то очень мелких частиц. Потоки этих частиц

образуют магнитные поля, а движения частиц от одного заряженного тела к другому обеспечивают электростатическое взаимодействие. Последовательными сторонниками теории квазитвердого эфира выступали Дж. Мак-Куллаг, В. Томсон (лорд Кельвин) и Дж. Стокс. Согласно их теориям, магнитные и электрические поля возникают в эфире в результате определенного вида деформаций.

В 1839 году Дж. Мак-Куллаг предложил модель эфирной среды как упругого тела, невосприимчивого к деформациям сжатия и изменения формы, но реагирующего на деформацию кручения относительно абсолютного пространства [3].

Вслед за Дж. Мак-Куллагом В. Кельвин смоделировал эфир с помощью волчков, то есть рассмотрел полярную среду, состоящую из вращающихся осесимметричных частиц, способных совершать большие повороты и перемещения общего вида [4]. В работе [5] найдена аналогия определяющих уравнений среды Кельвина и упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии насыщения.

Затем на протяжении нескольких десятилетий не было практически ни одной работы, посвященной континууму Коссера. И только приблизительно через полвека после выхода знаменитой работы братьев Коссера появились яркие труды, касающиеся возможностей применения положений микрополярного континуума в различных областях механики сплошных сред [6–10]. В значительной степени они посвящены концептуальным вопросам – описанию кинематики точки континуума, построению физических соотношений. Эти работы внесли большой вклад в развитие данной области знаний и послужили основой для дальнейших исследований. Но в 70–80-х годах прошлого века, судя по количеству публикаций, наблюдается некоторое «затишье» в изучении обобщенных континуумов.

Возможно, бурное развитие микромеханики в целом, а также достижения в сфере нанотехнологий послужили в конце XX века причиной новой волны инте-

реса к теории обобщенного континуума. За прошедшие годы опубликованы тысячи работ, отражающих ее развитие и применение к описанию особенностей поведения как жидких сред, так и деформируемых твердых тел. Так, в работах [11, 12] теория микрополярного континуума используется для описания нелинейно-упругих сред с учетом больших деформаций. В [13] предложен вариант построения континуума Коссера, позволяющий учитывать вязкоупругие свойства материала. Особенности волновых процессов в микрополярных средах посвящены статьи [14–20]. Необходимость учета кинематики внутренней структуры геоматериалов на различных линейных масштабах при динамических процессах отмечается в книге [21]. В работах [22–25] представлены интересные результаты исследований, связанных с особенностями волновых процессов в хиральных материалах, взаимодействующих с микрополярными упругими средами. В статьях [26–30] развиваются численные методы и алгоритмы решения статических и динамических краевых задач континуума Коссера.

Следует отметить, что во всем многообразии публикаций, посвященных микрополярным средам, экспериментальные исследования, особенно эксперименты, в которых удастся зарегистрировать проявление моментных свойств материалов, занимают ничтожно малую часть.

В экспериментах по идентификации физических параметров симметричной теории упругости обычно наблюдается стремление обеспечить однородность напряженно-деформированного состояния и создать его определенный тип (чистый сдвиг, одноосное растяжение и т.п.). Однако из теоретических предпосылок микрополярного континуума известно, что моментные свойства среды имеют возможность проявить себя в виде отклика на макроуровне лишь в условиях неоднородного напряженного состояния и при достаточно высоком уровне градиентов напряжений и деформаций [31]. Это обстоятельство принципиально отличает не-

обходимые условия экспериментального определения материальных параметров для физических уравнений микрополярного континуума. Обеспечение условий неоднородности и градиентности является одним из основных факторов, затрудняющих идентификацию материальных констант. Но это только одна из причин. Другая, не менее значимая и в не меньшей степени затрудняющая реализацию эксперимента причина состоит в том, что моментные свойства материала проявляются на линейных масштабах, близких к масштабам его структурных компонент (зерен – для металлов, сферолитов – для полимеров, зернистых и волокнистых включений – для композитов и т.п.). Последнее обстоятельство обуславливает необходимость тщательного анализа и выбора измеряемого макропараметра, а также предъявляет высокие требования к точности измерений.

Попытки определения материальных параметров для континуума Коссера на основе статических экспериментов можно найти в работах [32–35], описывающих испытание образцов на изгиб и кручение. Изгиб и кручение – это те «наипростейшие» виды напряженно-деформированного состояния, при которых в процессе деформирования могут быть зафиксированы и моментные параметры материала, но, в силу отсутствия при этом высоких градиентов напряжений и деформаций, зависимость измеряемых макропараметров от моментных свойств материала будет незначительной, что и подтверждается обобщающим выводом, сделанным в работе [31]. В статье [36] отмечается перспективность проведения динамических экспериментов для определения материальных параметров на основе анализа дисперсионных зависимостей. Такой подход к нахождению упругих параметров континуума Коссера используется в работе [37].

На основе вышеизложенного можно отметить, что на сегодняшний день остаются открытыми вопросы о четком обосновании экспериментов по поиску моментных эффектов. В связи с этим акту-

альными являются всесторонний анализ выбранных макропараметров, характеризующих моментное поведение материалов, оценка точности их измерения, а также разработка методов определения выбранных макропараметров в реальных физических экспериментах и средств их измерения.

Основные шаги для решения этой проблемы можно разделить на два этапа: анализ выбранных макропараметров из решения статических задач несимметричной (моментной) теории упругости и анализ выбранных макропараметров из решения динамических задач.

Первый этап включает в себя ряд задач по определению набора макропараметров из анализа сравнения решений двумерных и трехмерных задач о статическом деформировании в рамках несимметричной и классической теорий упругости. Аналитические решения двумерных плоских задач приведены в работах [38–40], численные – в [26–30]. В работе [30] рассматриваются численные решения трехмерных задач.

На втором этапе решаются задачи по определению набора макропараметров из анализа сравнения решений двумерных и трехмерных задач о свободных колебаниях.

На основании сформулированных задач первого и второго этапов необходимо:

- в каждой из рассмотренных задач оценить чувствительность выбранных макропараметров в зависимости от новых («моментных») физических констант материала и характерных размеров (масштабов);
- для каждого выбранного макропараметра оценить точность его измерения;
- предложить возможные методы определения выбранных макропараметров в реальных физических экспериментах и средства их измерения.

На первом этапе была рассмотрена серия двумерных плоских задач об одноосном растяжении пластины с отверстиями различных конфигураций с позиций их использования в качестве экспериментальных схем для идентификации меха-

нических параметров в модели континуума Коссера и установления факта моментного поведения при упругом деформировании материалов.

На основе анализа решений задач несимметричной теории упругости были определены такие значения параметров (характерные геометрические размеры, их соотношение и т.п.), при которых отклик моментных свойств материала на какую-либо макровеличину (экспериментально измеряемую), максимален.

В качестве такой макровеличины выбран макропараметр, определяющий степень искажения контура отверстий в двух взаимно перпендикулярных направлениях:

$$D = \left| \frac{u_y(0; R)}{u_x(R; 0)} \right|. \quad (1)$$

Здесь $u_x(R; 0)$, $u_y(0; R)$ – компоненты вектора перемещений в соответствующих точках на контуре отверстия.

Величина D привлекательна тем, что в классической (симметричной) теории упругости она постоянна, т.е. не зависит от механических свойств материала, размеров отверстий и величины прикладываемой нагрузки.

В качестве меры сравнения решений несимметричной теории упругости и классической, характеризующей моментный эффект, введем относительную величину

$$\delta = \left| \frac{D - D^*}{D^*} \right|, \quad (2)$$

где D – решение в рамках несимметричной теории упругости, D^* – в рамках классической (симметричной) теории упругости.

Например, для задачи об одноосном растяжении бесконечной пластины (задача Кирша, рис. 2, а) в рамках классической теории упругости макропараметр D всегда равен 3. В несимметричной теории упругости эта величина зависит от радиуса R и механических характеристик материала, т.е. появляется некий характерный размер (масштаб) (в данной задаче – радиус отверстия R), от которого будет зависеть решение задачи. Рассматриваемая задача может быть использована для экспериментальных исследований. Измеряя при нагружении в области линейного поведения материала изменение диаметров в двух взаимно перпендикулярных направлениях, можно рассчитывать при соответствующей точности измерения и изготовления образца на проявление эффекта моментного поведения материала, связанного с отличием макровеличины D от трех. На рис. 2, б представлена зависимость изменения величины отклика δ (2) на моментные свойства от характерного размера (радиуса отверстия R). Видно, что при уменьшении радиуса отверстия R моментный эффект становится более «ярким».

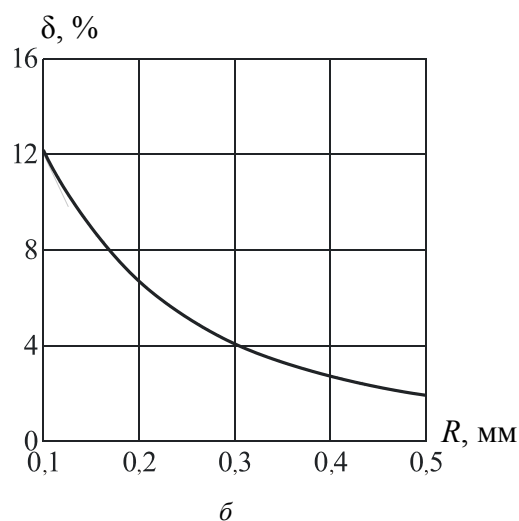
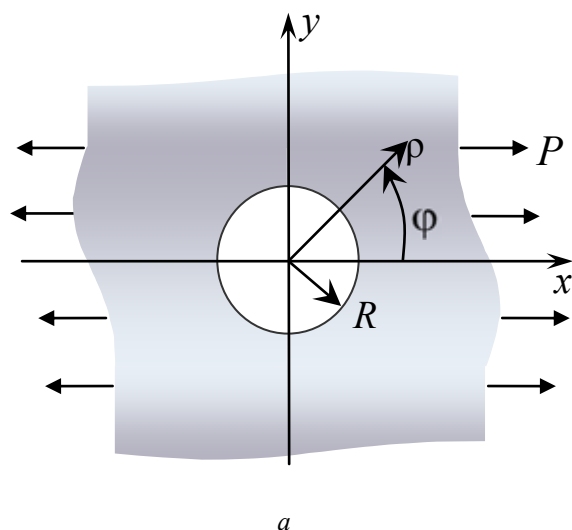


Рис. 2. Задача о растяжении бесконечной пластины с круговым отверстием (задача Кирша) (а); зависимость меры отклика δ на моментные свойства от радиуса отверстия (б)

Также рассмотрен ряд задач о растяжении пластин с отверстиями различных конфигураций, в частности в виде двух правильных многоугольников – квадрата (рис. 3, а и рис. 3, б) и восьмиугольника, различным образом ориентированных относительно направления внешних усилий.

Для этих задач в качестве макропараметра принимается величина, определяемая соотношением (1), где в качестве R выступает радиус вписанной в квадрат и описанной вокруг квадрата (или восьмиугольника) окружности.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что по величине отклика δ на моментные свойства эти задачи являются сопоставимыми с задачей Кирша.

Также была рассмотрена задача для пластины с центральной трещиной. Здесь в качестве макропараметра выбрано перемещение $D = u_y$ в точке, характеризующее раскрытие трещины.

На основе найденных решений получена оценка проявления моментных эффектов по величине δ . Данный вариант по сравнению с пластиной с круговым отверстием представляется менее предпочтительным для анализа моментных эффектов по макропараметру D в силу меньшего отличия от классического решения и больших сложностей при экспериментальной реализации. Вместе с тем

эта задача иллюстрирует, что наличие зоны ярко выраженной концентрации напряжений в вершине трещины, где должны проявляться моментные эффекты, слабо влияет на интегральные характеристики, определяющие раскрытие трещины.

Проводя численные расчеты для поиска моментных эффектов в той или иной схеме эксперимента, нужно оценивать границы применимости решения двумерных задач. В соответствии с этим для любого реального образца следует проводить оценку влияния его толщины на решение задачи, т.е. необходимо исследовать распределение макропараметра по толщине образца.

Поэтому была рассмотрена задача о растяжении пластины с круговым отверстием в трехмерной постановке. Получено распределение макропараметра D по толщине пластины для различных соотношений толщины пластины и радиуса отверстия в рамках классической теории упругости на основе трехмерной постановки задачи. Аналогичные результаты получены в рамках несимметричной теории упругости. Если для классической теории упругости в двумерной постановке макропараметр D совпадает для плосконапряженного и плоскодеформированного состояний, то в несимметричной теории упругости такого совпадения нет.

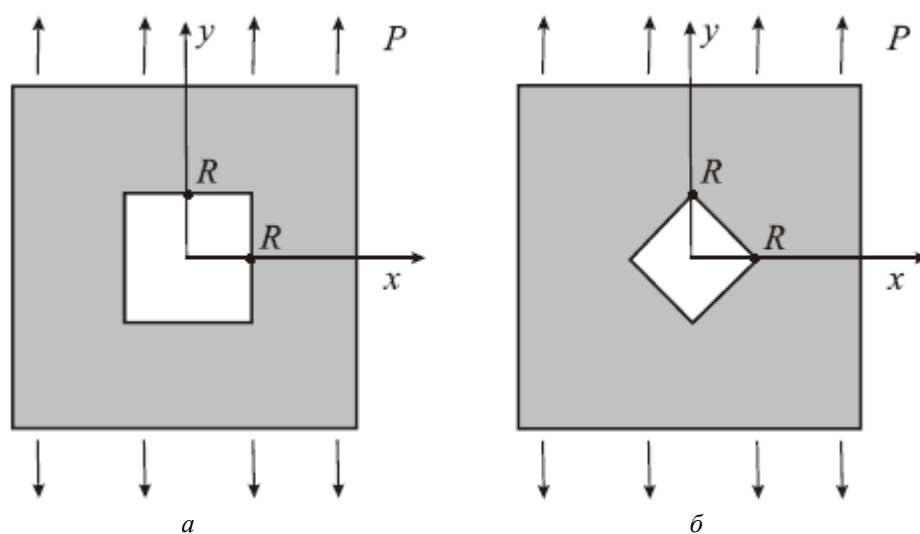


Рис. 3. Задача о растяжении пластины с отверстиями квадратного сечения, различным образом ориентированных относительно действия внешней нагрузки P

Также в рамках трехмерных постановок была рассмотрена задача о растяжении пластины с трещиной. Аналогичные результаты распределения макропараметра $D = u_y$ по толщине пластины получены для классической и несимметричной теорий упругости.

Результаты сравнения решений в двумерной и трехмерной постановках позволяют определить границы применимости двумерных решений с позиций их приложений для соответствующих экспериментов. Если расчеты, полученные в рамках трехмерной постановки, приводят к изменениям макропараметра D , которые находятся в пределах погрешности эксперимента, то двумерные решения приемлемы для интерпретации экспериментальных данных. Если данное условие не выполняется, то необходимо использовать результаты расчетов на основе трехмерных постановок задач и измерение макропараметра D следует проводить с учетом значений координаты z .

Еще один важный фактор, влияющий на точность измерения выбранных макропараметров – оценка влияния отклонения в образце формы отверстия от окружности на результат эксперимента. Для моделирования и оценки этого фактора были проведены численные эксперименты.

Для оценки влияния отклонения формы отверстия от окружности была рассмотрена задача о растяжении пластины с отверстием, радиус которой изменяется по закону

$$R_r = R + A (\sin(n\varphi) + \cos(m\varphi)). \quad (3)$$

Здесь R – радиус окружности, величина A характеризует максимальную степень отклонения геометрии от окружности, а $n, m = 1, 2, 3, \dots$. В данном случае макропараметр D определяет отношение изменения диаметров в направлении осей y и x .

Результаты численного моделирования позволили сделать вывод о значениях допусков на отклонение геометрии от окружности, при которых степень проявления моментных эффектов существенно превышает влияние на величину D неправильной геометрии. В частности, для использован-

ных в работе значений механических характеристик материала отклонение геометрии от правильной окружности (A/R) в пределах 1 %, вносит изменения на величину δ , определяющую уровень проявления моментных эффектов, в пределах 2 %.

В качестве динамических задач были рассмотрены двумерные и трехмерные задачи о собственных колебаниях в рамках несимметричной теории упругости. Из решения большинства рассматриваемых задач следует, что спектры собственных частот, полученных в рамках классической (симметричной) теории упругости, практически совпадают со спектром собственных частот несимметричной теории упругости. Наиболее информативной оказалась задача о собственном колебании упругого кольца с жестким диском, вставленного внутрь этого кольца (рис. 4). Так, например, значение третьей собственной частоты в рамках классической теории упругости $p^* = 3349$ Гц, в рамках несимметричной теории $p = 4203$ Гц.

В качестве трехмерных задач была рассмотрена задача о собственном колебании плиты, закрепленной по одному из торцов, которая в отличие от двумерной задачи о собственном колебании пластины имеет большую информативность за счет появления крутильной формы колебаний, соответствующей третьей собственной частоте $p^* = 214$ Гц в рамках классической теории упругости и $p = 199$ Гц – несимметричной теории упругости.

Спектр собственных частот в рамках классической и несимметричной теорий

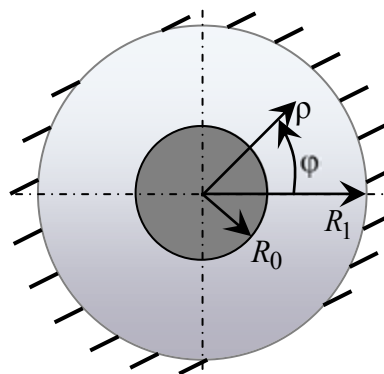


Рис. 4. Задача о собственном колебании упругого кольца с жестким диском

упругости определялся при разных характерных размерах для каждой из задач. В качестве характерных размеров выступали один из геометрических размеров пластины (плиты) и радиус жесткого включения R_0 (рис. 4).

Таким образом, в результате расчета двумерных и трехмерных задач в рамках симметричной и несимметричной теорий упругости были найдены спектры собственных частот. Получено, что, как и в случае статических задач, проявление моментных свойств наиболее ярко реализуется по мере уменьшения линейного характерного размера задачи. Спектр собственных частот – экспериментально измеряемый макропараметр, откликающийся

на моментные свойства среды. Поэтому анализ сопоставления спектра полученных частот соответственно для классической среды и континуума Коссера позволит определить принципиальные схемы экспериментов, демонстрирующих моментные свойства.

Для рассмотренных задач проведена оценка чувствительности выбранных макропараметров в зависимости от «моментных» констант и характерных размеров (масштабов). Показано, что при уменьшении характерного размера высокой чувствительностью обладают «моментные» константы, входящие в определяющие соотношения для тензора моментных напряжений.

Библиографический список

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des corps deformables. – Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. – 226 p.
2. *Ерофеев В.И.* Братья Коссера и механика обобщенных континуумов // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2. – № 4. – С. 5–10.
3. *MacCullagh J.* An essay towards a dynamical theory of crystalline reflection and refraction // Trans. Roy. Irish. Acad. Sci., 1839. – Vol. 21. – P. 17–50.
4. *Thomson W.* Mathematical and physical papers, 1882–1911. – 6 vols. – Cambridge University Press.
5. *Грекова Е.Ф., Жилин П.А.* Среда Кельвина и ферромагнетики: определяющие уравнения и волновые процессы // Нелинейная акустика твердого тела: сб. науч. тр. / под ред. *В.И. Ерофеева*. – Н. Новгород: Интелсервис, 1998. – С. 87–90.
6. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. – 1960. – Т. 2. – Вып. 7. – С. 1399–1409.
7. *Миндлин Р.Д.* Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика: Сб. пер. – М.: Мир. – 1964. – № 4. – С. 115–128.
8. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. – 1964. – Т. 28. – Вып. 3. – С. 401–408.
9. *Тупин Р.А.* Теории упругости, учитывающие моментные напряжения // Механика: сб. пер. – 1965. – № 3. – С. 113–140.
10. *Nowacki W.* Couple-stresses in the theory of thermoelasticity // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sc. Techn. – 1966. – Vol. 14. – P. 505–512.
11. *Zubov L.M.* Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies. – Berlin: Heidelberg; N.Y.: Springer, 1997. – 205 p.
12. *Nikitin E., Zubov L.M.* Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress // J. Elasticity. – 1998. – Vol. 51. – № 1. – P. 1–22.
13. *Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П.* Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2. – № 2. – С. 40–47.
14. *Лялин А.Е., Пирожков В.А., Степанов Р.Д.* О распространении поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журнал. – 1982. – Т. 28. – № 6. – С. 838–840.
15. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение и анализ аналитического решения для поверхностной волны Рэлея в рамках континуума Коссера // ПМТФ. – 2005. – Т. 46. – № 4. – С. 116–124.
16. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // ДАН. Механика. – 2005. – Т. 405. – № 2. – С. 196–198.
17. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журнал. – 2006. – Т. 52. – № 2. – С. 227–235.
18. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // ПМТФ. – 2007. – Т. 48. – № 1. – С. 143–150.
19. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера // Изв. РАН. МТТ. – 2007. – № 4. – С. 100–113.

20. Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн / М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков, М.В. Улитин // ПМТФ. – 2008. – № 2. – С. 196–203.
21. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидомеханика. – М.: Недра, 1996. – 447 с.
22. Khurana A., Tomar S.K. Longitudinal wave response of a chiral slab interposed between micropolar solid half-spaces // Int. J. Solids Struct. – 2009. – № 46. – P. 135–150.
23. Khurana A., Tomar S.K. Transmission of longitudinal wave at a plane interface between micropolar elastic and chiral solid half-spaces: Incidence from micropolar half-space // J. of Sound and Vibration. – 2008. – № 311. – P. 973–990.
24. Tomar S.K., Khurana A. Elastic waves in an electro-microelastic solid // Int. J. Solids Struct. – 2008. – № 45. – P. 276–302.
25. Tomar S.K., Khurana A. Reflection and transmission of elastic waves from a plane interface between two thermo-microstretch solid half-spaces // Int. J. of Appl. Math. Mech. – 2009. – № 5 (4). – P. 48–68.
26. Садовская О.В. Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии // Журн. вычисл. математики и математ. физики. – 2009. – Т. 49. – № 2. – С. 313–322.
27. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические и численные решения статических и динамических задач несимметричной теории упругости // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т. 10. – № 5. – С. 77–90.
28. Корепанов В.В., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – № 2. – С. 63–70.
29. Аналитические и численные решения в рамках континуума Коссера как основа для постановки экспериментов по обнаружению моментных эффектов в материалах / В.В. Корепанов, М.А. Кулеш, В.П. Матвеев, И.Н. Шардаков // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2. – № 4. – С. 76–91.
30. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Finite element analysis of two- and three-dimensional static problems in the asymmetric theory of elasticity as a basis for the design of experiments // Acta Mech. – 2012. – Vol. 223. – № 8. – P. 1739–1750.
31. Введение в микромеханику / М. Онами, С. Ивасимидзу, К. Гэнка, К. Сиодзава, К. Танака – М.: Металлургия, 1987. – 280 с.
32. Koiter W.T. Couple-stress in the theory of elasticity // Proc. Koenicl. Acad. Wet. – 1964. – Vol. B67. – P. 17.
33. Kroener E. On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics // Int. J. Eng. Sci. – 1963. – Vol. 1. – P. 261.
34. Gauthier R.D., Jahsman W.E. A quest for micropolar elastic constants // Trans. ASME. – 1975. – Vol. E42. – № 2. – P. 369–374.
35. Lakes R. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure. – N.-Y.: J. Wiley, 1995. – P. 1–22.
36. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
37. Gauthier R.D., Jahsman W.E. A quest for micropolar elastic constants // Arch. Mech. – 1981. – Vol. 33. – № 5. – P. 717–737.
38. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // ПМТФ. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 145–154.
39. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитических решений некоторых двумерных задач моментной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. – 2002. – № 5. – С. 69–82.
40. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Parametric analysis of analytical solutions to one- and two-dimensional problems in couple-stress theory of elasticity // Z. Angew. Math. Mech. – 2003. – Vol. 83. – № 4. – P. 238–248.

THE NUMERICAL ANALYSIS OF THE EXPERIMENTAL SCHEMES ON DETECTION OF COUPLE-STRESS EFFECTS UNDER STATIC AND DYNAMIC EXTERNAL FORCES

V.V. Korepanov

The paper presents the historical aspects of the theory of Cosserat continuum and the main stages of its development. The features of the theory and main stages was considered and associated of the development of experimental schemes to detect the couple-stress effects on the basis of solving two- and three-dimensional problems in the context of the asymmetric elasticity theory. First results of such experiments raised a number of issues related to the corresponding mathematical problem and its experimental analogue. In this regard, there was a problem of a broad series of numerical

investigations aimed at assessing the impact of various factors in the making of operative embodiment, loading scheme and the choice of material to the level of quantities measured in the experiment. Such investigations allow us to estimate the prospects of future experiments aimed to identification the facts of the couple-stress behavior of materials under static and dynamic external influences.

Keywords: Cosserat continuum, asymmetric elasticity theory, numerical solutions, experimental schemes, couple-stress effects.

Сведения об авторе

Корепанов Валерий Валерьевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1; e-mail: kvv@icmm.ru

Материал поступил в редакцию 15.05.2014 г.