

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОЛОГО-
ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ РЕГИОНА:
ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ,
ПРОГНОЗИРОВАНИЯ, ДОСТИЖИМОСТИ
И УПРАВЛЕНИЯ***



А.Л. Чадов,
Пермский государственный
национальный исследовательский
университет

В популярной форме описываются основные результаты, полученные в ходе выполнения проекта № 10-01-96054 «Математическое и компьютерное моделирование эколого-экономического состояния региона: задачи идентификации, прогнозирования, достижимости и управления».

В основе разработанного комплекса лежат концепция и фундаментальные результаты современной теории функционально-дифференциальных систем и ее приложения к конкретным классам динамических моделей. Эта теория позволяет охватывать динамические модели, включающие уравнения различной природы с непрерывным и дискретным текущим временем: дифференциальные, интегральные, разностные и их гибриды.

***Ключевые слова:** модели экономической динамики, функционально-дифференциальные уравнения, непрерывно-дискретные системы, задачи управления.*

ВВЕДЕНИЕ

Целью проекта № 10-01-96054 являлась разработка математического, модельного и программного обеспечения для построения комплекса математических моделей эколого-экономического состояния региона, учитывающего специфику, многообразие и взаимосвязь процессов, протекающих в регионе. Созда-

ваемый комплекс ориентирован на исследование устойчивости динамических моделей, прогнозирование эколого-экономического состояния региона и решение задач целевого управления с нахождением управляющих параметров и соответствующих траекторий развития.

Проект выполнялся в 2010–2012 гг. на

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-96054) и компании «Прогноз».

базе ПГНИУ. Исполнители проекта: В.П. Максимов (руководитель), Д.Л. Андрианов, Е.И. Бравый, Н.В. Денисова, М.Ю. Кулаков, С.Ю. Култышев, И.А. Мартышевский, Д.А. Поносов, А.А. Поносов, П.М. Симонов, Д.В. Ситников, А.Л. Чадов, Д.Н. Шульц.

Основные результаты опираются на фундаментальные положения теории так называемого абстрактного функционально-дифференциального уравнения (АФДУ) [1, 34].

Эта теория, разработанная с участием авторов проекта, охватывает широкие классы моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов с учетом эффектов последствия (запаздывания) и импульсных возмущений (шоков), приводящих к скачкообразному изменению основных показателей функционирования изучаемой системы. Описание таких моделей дается в форме систем функционально-дифференциальных уравнений, содержащих интегральные, дифференциальные и интегро-дифференциальные слагаемые с распределенными и дискретными запаз-

дываниями, и, одновременно, слагаемые с непрерывным и дискретным временем.

В рамках проекта проводились исследования по следующим основным направлениям:

1. Исследование гибридных динамических моделей с непрерывным и дискретным временем.

2. Разработка нового эффективного метода получения необходимых и достаточных условий разрешимости краевых задач для семейств функционально-дифференциальных уравнений и систем.

3. Разработка эколого-экономических моделей регионального уровня.

4. Разработка методов идентификации непрерывно-дискретных (гибридных) функционально-дифференциальных моделей.

5. Разработка методик и алгоритмов исследования гибридных динамических моделей на устойчивость.

6. Создание комплексов программ, реализующих результаты исследований.

7. Проведение исследований конкретных динамических моделей регионального уровня.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ И ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Эколого-экономические модели часто содержат одновременно как уравнения, описывающие динамику показателей в непрерывном времени на конечном промежутке, так и уравнения с дискретным временем, характерным для эконометрических моделей. Теория АФДУ позволяет рассматривать такие модели с общих позиций и применять для их исследования результаты, полученные ранее отдельно для систем с непрерывным временем [1, 34] и для разностных систем [3]. Такие системы естественно называть гибридными, однако этот термин по отношению к системам уравнений и моделям используется достаточно широко и нередко в различных смыслах. Поэтому представляется более уместным использование термина «функционально-дифференциальные непрерывно-дискрет-

ные системы (ФД НДС)».

Приведем пример непрерывно-дискретной системы управления:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= T_{11}y + T_{12}z + F_1u + f, \\ z &= T_{21}y + T_{22}z + F_2u + g, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in R^{n+v}, \quad (2)$$

$$\ell \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \int_0^T \Phi(s) \dot{y}(s) ds + \Psi_0 y(0) + \quad (3)$$

$$+ \sum_{k=1}^m \Psi_k \Delta y(\tau_k) + \sum_{j=0}^{\mu} \Gamma_j z(t_j) = \gamma \in R^N.$$

Первая часть системы (1) описывает динамику показателей в непрерывном времени. Вторая часть системы представляет собой подсистему с дискретным временем, часто возникающую в результате

эконометрического моделирования. Каждая подсистема системы (1) дополняется связывающими операторами T_{12} и T_{21} , описывающими взаимное влияние показателей в непрерывном и дискретном времени. Операторы F_1 и F_2 отвечают за реализацию управляющих воздействий, направленных на непрерывную и дискретную подсистемы соответственно.

Условия (2) фиксируют начальное состояние системы. Краевые условия (3) задаются с помощью линейного ограниченного вектора-функционала l . Отметим, что краевые условия (3) охватывают всевозможные линейные ограничения-равенства на непрерывные и дискретные компоненты системы (1). В частности, ими охватываются ограничения на состояние системы в конечном числе точек (многоточечные), интегральные, дисконтированные и т.п. [1]

Для системы (1)–(3) исследован вопрос о представлении решений, получены условия разрешимости краевых задач и задач управления, разработаны алгоритмы построения программного управления. Под условиями разрешимости здесь понимаются условия, выполнение которых гарантирует возможность достижения целевых показателей.

Отметим, что условия разрешимости рассматриваемых задач сформулированы в так называемом конструктивном виде, допускающем для их проверки применение специальной техники: доказательного вычислительного эксперимента (ДВЭ) [1, 18, 28].

Широко известен подход к проведению доказательных вычислений, основанный на выполнении интервальных вычислений в конечномерных и функциональных пространствах и применении специальной техники округления в ходе вычислений.

Использованный при выполнении проекта подход позволяет рассматривать существенно более широкий класс задач, имеющих такие особенности, как нелокальность операторов, наличие разрыв-

ных решений, наличие оператора внутренней суперпозиции, краевые условия общего вида. Кроме того, при таком подходе не используются интервальные вычисления, для которых характерен быстрый рост длины результирующего интервала. Вместо этого используется арифметика рациональных чисел со специальной техникой направленного округления.

Основная идея конструктивного подхода заключается в том, что для исходной задачи строится приближенная задача с точно известными параметрами, которые позволяют провести доказательную вычислительную проверку условий разрешимости. Если приближенная задача разрешима, итоговый результат зависит от близости к ней исходной задачи. Теоремы, лежащие в основе ДВЭ, допускают эффективную компьютерную проверку условий разрешимости исходной задачи. Если эти условия не выполняются, придется строить новое, более точное приближение исходной задачи и снова проверять эти условия.

Реализация конструктивных методов в виде компьютерной программы (разумеется, такая программа ориентирована на строго определенный класс задач) позволяет изучать конкретную задачу, многократно повторяя ДВЭ. Теоретическое обоснование и детали практической реализации ДВЭ для изучения функционально-дифференциальных систем представлены в [28]. Ясно, что ДВЭ подразумевает построение и достаточно точную аппроксимацию основных параметров системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с гарантированными оценками погрешностей. Эффективная доказательная (компьютерно-ориентированная) техника таких построений для определенных классов функционально-дифференциальных уравнений предложена в [1].

Регулярно при исследовании построенной модели возникают ситуации, когда они, несмотря на соответствие моделируемому объекту, оказываются противоречивыми, а задачи управления, поставленные для них, – неразрешимыми. В

рамках проекта разработаны и реализованы алгоритмы коррекции противоречивых задач управления для динамических моделей экономического и эколого-экономического развития. Такая коррекция, использующая идею ослабления «наиболее критичных» ограничений, состоит из пяти основных этапов:

1. Обнаружение противоречивости динамической модели в исходной форме.
2. Приведение исходной формы модели к канонической форме.
3. Анализ и расстановка приоритетов

в списке целей и ограничений.

4. Пользовательский выбор типа динамической коррекции. В зависимости от специфики задачи возможна ресурсная коррекция, допускающая изменение только количественных параметров системы, и структурная коррекция, допускающая изменения отдельных уравнений системы, то есть характера взаимосвязи экономических параметров.

5. Обработка результатов коррекции.

Блок-схема алгоритма динамической коррекции представлена на рис. 1.

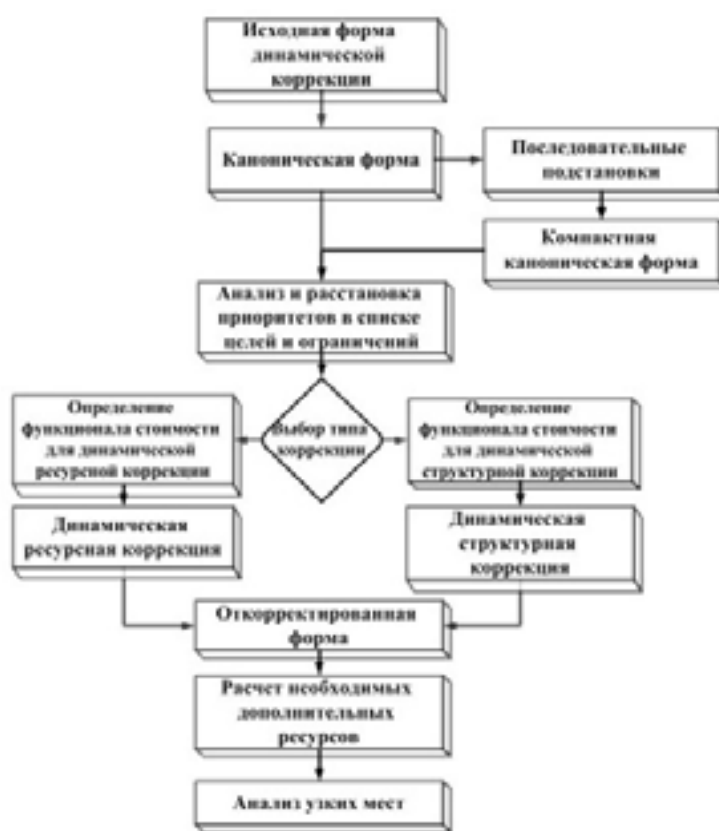


Рис. 1. Алгоритм динамической коррекции

2. РАЗРАБОТКА НОВОГО ЭФФЕКТИВНОГО МЕТОДА ПОЛУЧЕНИЯ НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ФДУ

В случае, когда управляющие воздействия в системе (1) заданы (например сценарно), возникает вопрос о разрешимости задачи (1), (3), которая называется краевой задачей.

Для отдельных классов краевых задач

разработан новый метод нахождения необходимых и достаточных условий разрешимости краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. Найдены оптимальные условия разрешимости многих важных краевых за-

дач. Улучшены известные из литературы результаты, в частности результаты группы чешских и грузинских математиков.

Предложенный метод заключается в выборе в заданном классе краевых задач такой краевой задачи с простой структурой, что ее разрешимость гарантирует разрешимость всех остальных краевых задач рассматриваемого класса. Так как условия однозначной разрешимости этого «самого плохого» объекта в данном классе обычно могут быть найдены точно, можно получить необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости для всего выбранного класса.

Если же для «самой плохой» краевой задачи невозможно получить условия од-

нозначной разрешимости в явном (формульном) виде, то можно прибегнуть к численному или конструктивному компьютерному исследованию этого уравнения и все-таки получить необходимые и достаточные признаки разрешимости для всего класса. Метод эффективен, прежде всего, для функционально-дифференциальных уравнений с, вообще говоря, невольтерровыми операторами, представляемыми в виде разности двух монотонных операторов (эта ситуация типична для математических моделей, возникающих при описании реальных экономических и физических процессов).

Основные результаты исследований представлены в монографии [7].

3. РАЗРАБОТКА ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЕГИОНАЛЬНОГО УРОВНЯ И МЕТОДОВ ИХ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В рамках этого направления разработана общая структура эколого-экономических моделей регионального уровня со спецификацией, позволяющей учитывать разнообразие региональных систем и возможность настройки на специфику конкретного региона. Кроме того, предложены методы, методики и алгоритмы иден-

тификации эколого-экономических моделей регионального уровня по прямым и косвенным измерениям входных и выходных характеристик, а также разработаны методы и алгоритмы исследования эколого-экономических моделей регионального уровня на устойчивость, описываемые в следующих разделах.

4. РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ (ГИБРИДНЫХ) ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Задача идентификации систем, описывающих динамику процессов изменения экологических и экономических показателей на уровне региона, ставится как задача оценки параметров математической модели после задания ее структуры (структурной формы модели) и проведения ее спецификации с выделением входных и выходных переменных, а также переменных, которые в дальнейшем (после идентификации модели) предполагается использовать как управляющие воздействия. Структурная форма модели фиксируется и при дальнейшем рассмотрении используется в качестве гипотезы, которая

может быть изменена только после оценки результатов использования построенной модели для решения задач прогнозирования и управления. Оценка параметров (коэффициентов) модели проводится по результатам наблюдений за входными и выходными характеристиками моделируемой системы.

Вводится понятие эпсилон-идентификации модели, которое гарантирует попадание ее характеристик в пространстве наблюдений в эпсилон-окрестность наблюдаемых значений. Основные результаты об условиях разрешимости задачи эпсилон-идентификации изложены в [12–14].

5. РАЗРАБОТКА МЕТОДИК И АЛГОРИТМОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

В ходе выполнения исследований получены принципиальные результаты по устойчивости непрерывно-дискретных (гибридных) систем. Рассматриваемый класс гибридных систем содержит подсистему функционально-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными, нагруженную компонентами, относящимися к подсистеме разностных уравнений.

Все уравнения гибридной системы записаны в операторной форме с участием операторов, обладающих свойством вольтерровости (эволюционности) и ограниченности относительно заданного семейства полунорм. Сформулирована и доказана теорема об условиях устойчивости в терминах компонент, связанных с упомянутыми подсистемами. При этом существенно используются изученные ранее исполнителями проекта элементы представления общего решения: фундаментальная матрица и матрица Коши (для систем с

непрерывным временем и для систем с дискретным временем). Проверка предлагаемых условий сводится к исследованию обратимости оператора, составляемого конструктивно из упомянутых компонент представления.

Получены достаточные условия устойчивости непрерывно-дискретных функционально-дифференциальных систем (НД ФДС), состоящих из n автономных уравнений. Они включают k ($0 < k < n$) дифференциальных уравнений первого порядка с одинаковым постоянным запаздыванием и $n - k$ разностных уравнений первого порядка. Получены теоремы о связи устойчивости решений НД ФДС с оценками нормы обобщенного оператора Коши. Доказан аналог теоремы Боля–Перрона для гибридных систем. Подробное изложение результатов приводится в статьях [15, 30, 31].

6. СОЗДАНИЕ КОМПЛЕКСОВ ПРОГРАММ, РЕАЛИЗУЮЩИХ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Результаты проведенных в рамках гранта исследований легли в основу следующих разработанных комплексов программ.

6.1. Комплекс программ подготовки данных для решения задачи прогнозирования эколого-экономического состояния

Комплекс программ для подготовки данных реализован средствами аналитического комплекса «Прогноз» [2] и предназначен для сбора исходных данных и их представления в виде, удобном для моделирования и использования в других программных продуктах. При построении моделей ключевых показателей эколого-экономического развития Пермского края использовались данные статистических сборников и периодических изданий, публикуемых Росстатом: сборник «Регио-

ны России. Социально-экономические показатели» (2010 г. и более ранние издания); доклад «Социально-экономическое положение России» (январь–август 2011 г. и более ранние издания).

Информация в этих источниках отражается с месячной, квартальной и годовой периодичностью. Запаздывание предоставляемой информации составляет до года для годовой информации и до месяца для ежемесячных данных. Основной объем годовых показателей представлен с 1995 года; месячная информация – с 1999 года. Объем информации, заносимой в базу данных, составляет около 100 тыс. записей раз в месяц; около 350 тыс. записей дополнительно раз в год.

С 2005 года структура показателей доклада претерпела изменения в связи с переходом на виды экономической дея-

тельности (ОКВЭД). На текущий момент загружена вся информация в структуре ОКОНХ и данные в структуре ОКВЭД.

6.2. Комплекс программ «Анализ устойчивости эколого-экономического развития региона»

При проверке адекватности модели как существующей, так и проектируемой системы реально может быть использовано лишь ограниченное подмножество всех возможных значений входных параметров (рабочей нагрузки и внешней среды). В связи с этим для обоснования достоверности получаемых результатов моделирования большое значение имеет проверка устойчивости модели. Как известно, в теории моделирования это понятие трактуется следующим образом. Устойчивость модели – это ее способность сохранять адекватность при исследовании эффективности системы на всем возможном диапазоне рабочей нагрузки, а также при внесении изменений в конфигурацию системы.

В общем случае можно утверждать, что чем ближе структура модели структу-

ре системы и чем выше степень детализации, тем устойчивее модель. Устойчивость результатов моделирования может быть также оценена методами математической статистики.

Как известно, одним из таких методов является тест Чоу, который применяется для проверки регрессионной однородности двух выборок данных. К изменяемым параметрам теста относятся: объясняющие ряды (факторы, которые воздействуют на поведение объясняемой переменной), тип теста (выбирается в зависимости от соотношения количества элементов в группах), уровень значимости, способ разбиения на группы наблюдений и некоторые другие.

Типичные результаты проведения теста Чоу представляются в таблице (рис. 2).

Очевидно, что устойчивость является положительным свойством модели. Однако если изменение входных воздействий или параметров модели (в некотором заданном диапазоне) не отражается на значениях выходных параметров, то польза от такой модели невелика. В связи с этим возникает задача оценивания чувстви-

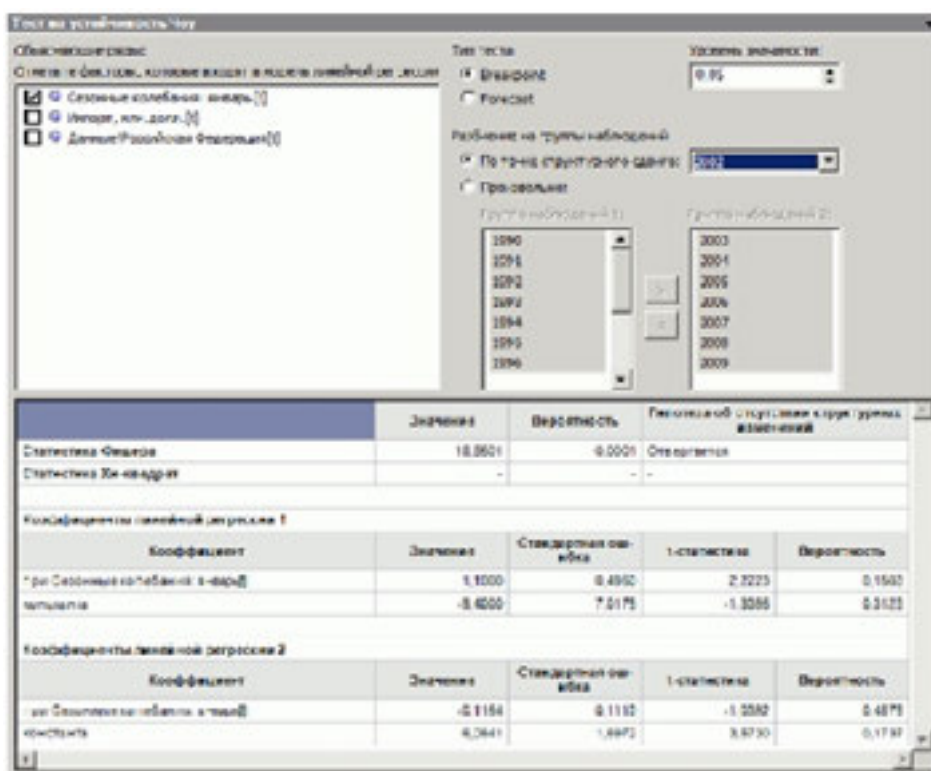


Рис. 2. Тест Чоу на устойчивость

тельности модели к изменению параметров рабочей нагрузки и внутренних параметров самой системы.

Анализ чувствительности предназначен для оценки конечного влияния изменений экзогенных переменных на ключевые индикаторы, учитывающие прямые, косвенные и обратные связи между переменными модели. Пример проведения такой оценки представлен на рис. 3.

Слева отображается график экзогенной переменной по трем сценариям. Первый сценарий базовый. Два других сценария – это изменение (увеличение и уменьшение) значений выбранной экзогенной переменной относительно базового на некоторый процент. Справа приведены графики результирующих показателей модели. На графиках представлено изменение значения результирующего показателя вследствие изменения выбранной экзогенной величины по соответствующим сценариям.

6.3. Комплекс программ «Решение задач целевого управления для эколого-экономических моделей региона»

Описанные в пп. 6.1. и 6.2. программные комплексы позволили перейти к ос-

новной задаче проекта в целом: исследованию задач достижимости и целевого управления для конкретных моделей регионального уровня для различных вариантов включения в модель показателей и характеристик социального, экологического и экономического состояния региона на базе моделей, создаваемых с помощью Контейнера моделирования Аналитического комплекса «ПРОГНОЗ».

Основным результатом этой работы стал разработанный комплекс программ, позволяющий:

- идентифицировать модели, содержащие показатели социального, экологического и экономического состояния региона;
- исследовать задачи на достижимость и существование целевых управлений;
- исследовать на устойчивость конкретные региональные модели;
- визуализировать решения задач целевого управления с построением программных управлений и траекторий для различных вариантов включения в модель показателей и характеристик социального, экологического и экономического состояния региона.

С использованием этого комплекса

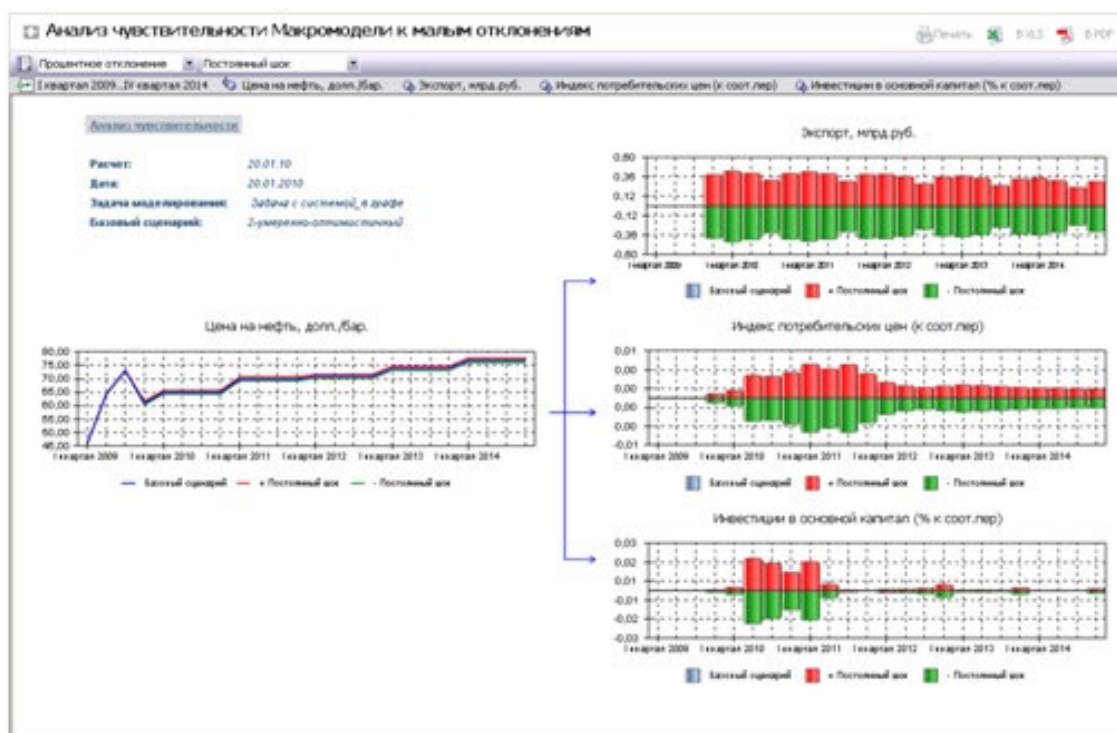


Рис. 3. Анализ чувствительности к отклонениям экзогенной переменной

проведено исследование конкретных динамических моделей регионального уровня, решены типовые задачи целевого управления с построением программных управляющих воздействий и соответ-

ствующих траекторий.

В следующем разделе приводится в качестве иллюстрации один пример такого исследования.

7. ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЙ ПРИМЕР

В основе примера лежит эколого-экономическая модель [27] вида

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= \\ &= -\alpha K(t) + e^{0t} F(K, L, R) - C(t) - A(t), \\ K(0) &= K_0, \\ \dot{L}(t) &= \gamma_L L(t) - \gamma_P P(t) + \gamma_C C(t), \\ L(0) &= L_0, \\ \dot{R}^1(t) &= \\ &= \gamma_R R^1(t) + \gamma_K K(t) - Q(t) - \gamma_L L(t), \quad (4) \\ R^1(0) &= R_0^1, \\ \dot{R}^2(t) &= d(K(t), L(t)) + \\ &+ \gamma_K K(t) - Q(t) - \gamma_L L(t), \\ R^2(0) &= R_0^2, \\ \dot{P} &= f(c, K, L, R)(1 - \eta c) - g(P), \\ P(0) &= P_0, \end{aligned}$$

где C – конечное потребление, P – загрязнение, R – добыча, Q – остаток ресурса ($R(t) = (R^1(t), R^2(t))$, где $R^1(t)$ – возобновляемые ресурсы, $R^2(t)$ – невозобновляемые), K – капитал, L – труд (рабочая сила), I – инвестиции, A – расходы на снижение загрязнения.

Тогда тройка (C, Q, A) определяет эколого-экономическую политику центра. Формализация базовой модели может быть представлена в следующем виде.

Критерий выбора эколого-экономической политики:

$$W(C, Q, A) \rightarrow \max,$$

где $W(C, Q, A)$ – функция благосостояния региона. Уравнения динамики показателей описываются системой (4).

Данная модель была дополнена (конкретизирована) следующими блоками показателей.

Блок, характеризующий внешние связи региона, представлен такими показателями, как экспорт ($x_1(t)$) и импорт ($x_2(t)$) Пермского края. В основу построения модели экспорта были заложены следующие предпосылки:

- учет цены продуктов, имеющих большой вес в товарном составе экспорта (нефтепродукты и удобрения). Данные факторы оказывают стимулирующее воздействие на предложение этих продуктов и, как следствие, приводят к увеличению экспорта;

- учет развития регионального производства как фактора, способного отразить создание конкурентоспособной продукции, таким образом, оказывающего положительное влияние на экспорт;

- учет политики ЦБ РФ в плане установления курса рубля по отношению к доллару США. При предположении, что все расчеты с внешними заказчиками производятся в долларах, ослабление рубля стимулирует экспорт.

При моделировании импорта Пермского края был осуществлен перебор видов деятельности региона, которые на текущий момент слаборазвиты и по ним край вынужден закупать импортные товары. Таким образом, стимулирование развития этих отраслей повышает конкурентоспособность местных товаров и оказывает отрицательное воздействие на импорт. Импорт, пересчитанный в рублях, моделировался в номинальных темпах прироста, и поэтому на него оказывало положительное воздействие увеличение уровня цен в регионе (ИПЦ).

Блок, характеризующий развитие промышленного сектора Пермского края, представлен развитием составляющих промышленности согласно ОКВЭД

(группы C+D+E). Другими словами, индекс промышленного производства ($x_3(t)$) Пермского края напрямую моделируется от развития «добывающей» ($x_4(t)$), «обрабатывающей» ($x_6(t)$) и «производства электроэнергии, газа и воды» ($x_5(t)$) отраслей. В свою очередь, при моделировании указанных видов деятельности были учтены следующие взаимосвязи:

– стимулирующее влияние оказывают инвестиции в конкретный вид деятельности, рост числа экономически активного населения, повышение спроса на продукцию, производимую в результате данным видом деятельности (улучшение уровня жизни населения, рост внешнего спроса и т.д.);

– отрицательное воздействие оказывают показатели, отражающие снижение возможности у населения приобретать продукцию данной отрасли (рост различных тарифов).

Блок, характеризующий уровень цен в регионе, в модели рассмотрен как изменение уровня потребительских цен (ИПЦ, $x_7(t)$) и цен производителей (ИЦП, $x_8(t)$). При моделировании ИПЦ Пермского края было учтено, что выбранный регион является подсистемой более крупной системы, а именно Российской Федерации, таким образом, инфляция в регионе положительно зависит от инфляции в стране, от уровня инфляции в предыдущий момент времени, а также от тарифной политики, выбранной в регионе.

ИЦП отображает повышение уровня цен ресурсов (в частности из-за повышения затрат на транспортировку), поэтому модель данного показателя включает следующие факторы, оказывающие положительное влияние: изменение мировой цены на нефть, тарифов на транспортировку, а также уровень цен производителей в предыдущий момент времени.

Блок, характеризующий инвестиционный климат в крае, представлен единственным показателем – инвестициями в основной капитал ($x_9(t)$). Данный показатель является агрегированным, поскольку он учитывает инвестиции как за счет при-

влеченных, так и за счет собственных средств предприятий. Таким образом, положительное влияние будут оказывать следующие факторы: уровень развития производства в регионе (способствует увеличению инвестиций за свой счет), инвестиции из региональных бюджетов, а также количество выданных кредитов (способствует увеличению привлеченных инвестиций).

Блок, характеризующий развитие банковского сектора, в модели представлен показателем «реальные темпы роста объемов кредитов и прочих размещенных средств, предоставленных организациям ($x_{10}(t)$)». Безусловно, на него отрицательно влияет уровень инфляции в регионе, а положительное воздействие оказывает повышение уровня жизни населения (реальных доходов населения – как основного источника денежных средств банков), а также развитость промышленности региона.

Блок, характеризующий развитие региона с точки зрения выполненных работ по виду деятельности «строительство», представлен соответствующим показателем ($x_{11}(t)$), который положительно зависит от уровня жизни населения и обеспеченности строительными материалами (показатель «обрабатывающие производства»).

Блок, характеризующий уровень жизни населения, содержит в себе два показателя: «реальные денежные доходы населения ($x_{12}(t)$)» и «численность экономически активного населения (ЭАН, $x_{13}(t)$)». Увеличение доходов населения обеспечивается за счет развития производства в регионе и, как следствие, повышением заработных плат рабочим, а также увеличением расходов бюджетов субъектов в части выплат заработных плат в бюджетных учреждениях и различными субсидиями населению. Отрицательное воздействие оказывает повышение уровня цен (ИПЦ).

При моделировании численности ЭАН был учтен тот факт, что при развитии промышленного производстве в регионе и большом числе занятых в экономике людей по стране возможна внутрен-

няя миграция населения, которая увеличит численность ЭАН конкретного региона. Отрицательное воздействие оказывает экологическая обстановка в регионе, а именно выбросы в атмосферу различных загрязняющих веществ, а также сбросы загрязненных сточных вод в поверхностные водные объекты.

Блок, характеризующий торговые отношения в регионе, содержит показатель «оборот розничной торговли всеми предприятиями и организациями ($x_{14}(t)$)». Безусловно, на него оказывает положительное влияние улучшение уровня жизни населения, а также факторы, отражающие объем предложения продукции (обрабатывающей промышленности).

Блок, характеризующий степень развития экологической составляющей Пермского края, представлен двумя показателями: «объемом выбросов загрязняющих веществ в атмосферу ($x_{15}(t)$)» и «сбросом загрязненных сточных вод в поверхностные водные объекты ($x_{16}(t)$)». Модели этих факторов основаны на том, что при увеличении темпов развития промышленности и активном росте численности ЭАН увеличивается загрязнение окружающей среды. Инвестиции в этот блок снижают уровень этих показателей. Кроме всего прочего, в моделях учтены значения выбранных показателей в предыдущий момент време-

ни. Таким образом, был сформирован ряд переменных модели.

Фазовые переменные (в % к соответствующему периоду предыдущего года) – все переменные, описанные выше.

Экзогенные переменные (в % к соответствующему периоду предыдущего года): $g_{17}(t)$ – мировая цена на нефть (прирост); $g_{18}(t)$ – мировая цена на пшеницу (прирост); $g_{19}(t)$ – уровень средних цен на калийные удобрения (прирост); $g_{20}(t)$ – фиктивная переменная, I квартал; $g_{21}(t)$ – индекс мировых цен на металлы (прирост); $g_{22}(t)$ – ИПЦ по РФ; $g_{23}(t)$ – официальный курс рубля к доллару США (прирост).

Управляющие переменные (в % к соответствующему периоду предыдущего года): $u_1(t)$ – инвестиции в основной капитал за счет средств бюджетов субъектов РФ и местных бюджетов (прирост); $u_2(t)$ – индексы тарифов на грузовые перевозки всеми видами грузового транспорта; $u_3(t)$ – рост цен (регулируемых тарифов и рыночных цен) на электроэнергию для всех категорий потребителей.

Результатом решения задачи (после ее дискретизации по времени и применения процедуры динамической коррекции по ресурсам) являются реализуемые программные управления и соответствующие траектории фазовых переменных.

Библиографический список

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 384 с.
2. Аналитика-капитал. Т. XI: Генезис информатики и аналитики в корпоративном и административном управлении / под ред. *Д.Л. Андрианова, С.Г. Тихомирова.* – М.: ВИНТИ РАН, 2005. – 350 с.
3. *Андрианов Д.Л.* Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последствием // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 3–16.
4. *Андрианов Д.Л., Поносов А.А., Поносов Д.А.* Целевое управление процессом развития текстильно-швейной отрасли Российской Федерации // Вестник Пермского ун-та. Экономика. – 2011. – № 4. – С. 92–101.
5. *Батищева С.Э., Каданэр Э.Д., Симонов П.М.* Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов. – Пермь: Перм. гос. ун-т, 2010. – 241 с.
6. *Батищева С.Э., Каданэр Э.Д., Симонов П.М.* Математические модели микроэкономики. – Пермь: Перм. гос. ун-т, 2012. – 199 с.
7. *Бравый Е.И.* Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. – Москва-Ижевск. Регулярная и хаотическая динамика. – 2011, 372 с.
8. *Бравый Е.И.* О разрешимости периодической краевой задачи для систем функционально-дифференциальных уравнений с циклической матрицей // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 10. – С. 17–27.

9. *Бравый Е.И.* О разрешимости периодической краевой задачи для линейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естественные и технические науки. – 2011. – Т. 16. – № 3. – С. 1029–1032.
10. *Бравый Е.И.* О разрешимости задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. – № 4. – С. 459–470.
11. *Бравый Е.И.* О наилучших константах в условиях разрешимости периодической краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48. – № 6. – С. 773–780.
12. *Култышев С.Ю., Култышева Л.М.* Приближенная идентификация при измерениях с погрешностями // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 2010. – № 15. – С. 53–61.
13. *Култышев С.Ю., Култышева Л.М., Ребишунг Н.С.* Приближенная идентификация гибридных эпсилон-моделей // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. – Пермь, Перм. гос. ун-т., 2010. – Вып. 3. – С. 38–56.
14. *Култышев С.Ю., Култышева Л.М.* Идентификация дискретных эпсилон-моделей реальных объектов // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 2011. – № 9. – С. 137–147.
15. *Ларионов А.С., Симонов П.М., Шешна М.В.* Условия разрешимости начальной задачи для систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. – 2010. – Т. 15. – Вып. 2. – С. 498–500.
16. *Максимов В.П.* Функционально-дифференциальные непрерывно-дискретные системы // Известия института математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. – 2012. – № 1 (39). – С. 88–89.
17. *Максимов В.П., Симонов П.М.* Теория оптимального управления. Ч. 2: Элементы теории линейных операторов и операторных уравнений. – Пермский гос. ун-т., Пермь, 2010. – 80 с.
18. *Максимов В.П., Румянцев А.Н.* Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 56–71.
19. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* О конструктивном исследовании краевых задач с приближенным выполнением краевых условий // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 3. – С. 82–86.
20. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского ун-та. Экономика. – 2011. – № 2. – С. 13–24.
21. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Изв. вузов. Математика. – 2012. – № 9. – С. 72–76.
22. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Краевые задачи экономической динамики с приближенным выполнением краевых условий. Конструктивное исследование // Вестник Пермского ун-та. Экономика. – 2012. – № 3. – С. 13–18.
23. *Максимов В.П., Поносов Д.А., Чадов А.Л.* Некоторые задачи экономико-математического моделирования // Вестник Пермского ун-та. Экономика. – 2010. – № 2(5). – С. 45–50.
24. *Поносов Д.А.* О некоторых подходах к моделированию воздействия промышленного сектора на экологию региона // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. – 2011. – Т. 34. – № 10. – С. 1–15.
25. *Поносов А.А.* К вопросу о моделировании воздействия промышленного сектора на экологию // Всероссийская студенческая олимпиада по направлению «Статистика» и специальности «Математические методы в экономике»: сб. науч. тр. – М. – МЭСИ, 2011. – С. 139–146.
26. *Поносов А.А., Поносов Д.А.* Задача оптимального управления для модели текстильно-швейной отрасли Российской Федерации // Вестник Тамбовского ун-та. – 2011. – Т. 16. – Вып. 4. – С. 1157–1158.
27. *Поносов А.А., Поносов Д.А.* О моделировании эколого-экономического развития региона // Вестник УМО. Экономика, статистика и информатика. – М.: МЭСИ, 2012. – Вып. 4. – С. 142–146.
28. *Румянцев А.Н.* Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании краевых задач. – Пермь: Перм. гос. ун-т, 1999. – 174 с.
29. *Симонов П.М.* Экономико-математическое моделирование. Моделирование микро- и макроэкономических процессов. – Пермь: Перм. гос. ун-т, 2010. – 422 с.
30. *Симонов П.М.* Гибридная функционально-дифференциальная система // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. – Пермский гос. ун-т, 2010. – Вып. 3. – С. 77–80.
31. *Симонов П.М., Ларионов А.С.* Существование решений краевой задачи для квазилинейного функционально-дифференциального уравнения // Вестник Тамбовского ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. – 2010. – Т. 15. – Вып. 2. – С. 798–800.
32. *Симонова Н.Ф., Поносов А.А.* Диагностика кризисного состояния предприятия с использованием нейросетевых технологий // Информационные системы и математические методы в экономике: сб. науч. тр. – Пермь: Перм. гос. ун-т., 2010. – Вып. 3. – С. 81–85.
33. *Шульц Д.Н.* Об ограничениях современной модели экономического роста России // Вестник Пермского ун-та. Экономика. – 2011. – № 3. – С. 37–44.

34. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F.* Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications Hindawi Publishing Corporation. – New York; Cairo, 2007. – 314 p.
35. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M.* Theory of functional differential equations and applications // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 69. – № 2. – P. 203–235.
36. *Bravyi E.* On the solvability of perturbations of linear boundary value problems at resonance for functional differential equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2011. – Vol. 74. – № 17. – P. 6387–6396.
37. *Bravyi E.* On the solvability of the periodic problem for systems of linear functional differential equations with regular operators // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2011. – № 59. – P. 1–17; <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>.
38. *Bravyi E.* On the solvable sets of boundary value problems for linear functional differential equations // Mathematica Bohemica. – 2011. – Vol. 136. – № 2. – P. 145–154.
39. *Bravyi E.* On the solvability of linear boundary value problems for functional differential equations with intermediate derivatives // Functional Differential Equations. – 2011. – Vol. 18. – № 1–2. – P. 101–110.
40. *Chadov A.L., Maksimov V.P.* Some problems of on-target control for a class of continuous-discrete systems // Вестник Тамбовского ун-та. Естественные и технические науки. – Т. 16. – Вып. 4. – 2011. – С. 1211–1213.
41. *Chadov A.L., Maksimov V.P.* Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. – 2011. – Vol. 18. – № 1–2. – P. 49–62.
42. *Maksimov V.P., Chadov A. L.* A class of controls for functional-differential continuous-discrete system // Russian Mathematics. – 2012. – Vol. 56. – № 9. – P. 62–65.

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING OF ECOLOGICAL AND ECONOMIC STATE FOR A REGION: PROBLEMS OF IDENTIFICATION, FORECASTING, ATTAINABILITY AND CONTROL

A.L. Chadov

The main results obtained during the project № 10-01-96054 “Mathematical and computer modeling of ecological and economic state for a region: problems of identification, forecasting, attainability and control” are described in this paper in a popular form. The aim of the project was to develop mathematical and software bases for construction of mathematical models complex of ecological and economic state of the region taking into account the specifications, diversity and relationship processes occurring in the region. The created complex is focused on studying the stability of dynamic models, forecasting ecological and economic state of the region and solving control problems with finding the control variables and corresponding trajectory of development.

Keywords: economic dynamics models, functional-differential equations, continuous-discrete systems, control problems.

Сведения об авторе

Чадов Алексей Леонидович, аспирант, Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15; e-mail: alchadov@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 02.07.2013 г.