УДК 536.416,539.377,519.633

О ВЕРИФИКАЦИИ И ВАЛИДАЦИИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА*

Ю.В. Баяндин, *Институт механики сплошных сред УрО РАН*

Для цитирования:
Баяндин Ю.В. О верификации и валидации методов численного моделирования термоупругого деформирования твердого тела // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. – 2025. – № 1. – С. 6–17. https://doi.org/10.7242/2658-705X/2025.1.1

Связанные нестационарные постановки задач термоупругости возникают во многих областях науки и техники. Аналитические решения получены только при существенных допущениях, в том числе при понижении размерности задачи, поэтому для прикладных задач необходимо применение численных методов,в том числе с использованием пакетов прикладных программ, требующих процедур проверки достоверности – верификации и валидации. Под верификацией понимается проверка правильности гипотез и формулировки математической постановки, задания корректных начальных и граничных условий, выбора дискретного аналога и метода численного решения, а также учет источников ошибок и погрешностей. Подтверждением верификации является достаточно точное соответствие численного решения эталонной модели. Актуальность заключается в выборе подходящей эталонной модели. В настоящей работе для задачи термоупругости эталонной моделью является классическая формула Томпсона, которая описывает изменение температуры при упругом деформировании твердого тела. Погрешность численного решения для эталонной задачи составила порядка 1% для пяти характерных значений деформации от 0.01 до 0.05. Валидация дополняет процедуру верификации и основана на сравнении с достоверными экспериментальными данными или при их отсутствии с известными аналитическими решениями. Целью работы является проведение процедур верификации и валидации численного решения нестационарной задачи термоупругости деформируемого твердого тела. Использовался метод конечных элементов в пакете прикладных программ *Comsol Multiphysics*. Получено удовлетворительное соответствие численного решения и известного аналитического решения для нелинейного уравнения теплопроводности.

* Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124020200116-1 Закономерности критичности в конденсированных средах и биологических мезо(нано)системах с дефектами, широкодиапазонное моделирование и экспериментальное исследование механизмов деформирования и стадийности поврежденности; перспективные приложения).

Ключевые слова: *деформируемое твердое тело, термоупругость, нелинейные свойства, связанная задача, метод конечных элементов.*

Введение

Явление термоупругости играет существенную роль в механике деформируемого твердого тела (МДТТ) и является обобщением теории упругости для деформаций с учетом нестационарного нагрева или охлаждения твердого тела. Эффекты термоупругости проявляются во многих задачах проектирования и эксплуатации установок и элементов конструкций в авиационной, ракетно-космической и атомной промышленности [1]. Уравнения термоупругости описывают распределения температуры и деформаций, обусловленных неоднородностью поля температуры и внешних силовых воздействий. При этом математическая постановка является нестационарной и связанной в силу взаимного влияния полей температуры и деформаций (или упругих напряжений). Аналитические решения нестационарных задач термоупругости допустимы только при существенных упрощениях даже в линейной теории [2]. В частности, решения нестационарных задач термоупругости для осесимметричного случая получены в работах [3,4]. Исследуются задачи для анизотропных тел [5,6]. Задачи нелинейной термоупругости решаются методами градиентной теории [7]. В практических приложениях необходимо учитывать как физическую нелинейность, так и геометрическую нелинейность математической постановки. Для решения многомерных задач, в том числе с неоднородными и нелинейными свойствами, зачастую могут быть применены только численные методы.

Детали из углеродных материалов в авиационной и ракетно-космической технике подвергаются интенсивным тепловым воздействиям, которые предшествуют их горению, что приводит к инициированию волн напряжений (тепловому удару) с последующим их разрушением. Высокая скорость нагрева и сильная нелинейная (степенная) зависимость температуропроводности от температуры, обусловленная пористостью углеродного материала [8], определяют возможность эффекта метастабильной локализации тепла в «режиме с обострением» [9]. Описание эволюции термомеханической системы осуществляется дифференциальными уравнениями механики деформируемого твердого тела. Аналитические решения могут быть получены для сильно упрощенных постановок, поэтому на практике требуются численные решения, в том числе с учетом нелинейных теплофизических свойств материалов. Наиболее популярными численными методами в МДТТ являются метод конечных разностей и метод конечных элементов. В данной работе постановка задачи термоупругости была реализована в пакете прикладных программ конечно-элементного анализа Comsol Multiphysics 6.2.

Численные методы решения требуют процедуры верификации, на основе которой исследователь должен убедиться в корректности математической постановки, включающей балансовые уравнения, физические (замыкающие) соотношения и краевые условия; проверить соответствие и правильность формулировки дискретного аналога (метода дискретизации и метода численного интегрирования) и оценить погрешность между численным решением и известным достоверным решением (эталонным решением). В настоящей работе верификация проводилась в сравнении с известной моделью У. Томпсона (лорда Кельвина) [10].

Дополнительно проводится валидация модели обычно в сравнении с достоверными экспериментальными данными, а при их отсутствии с аналитическими решениями. Известные аналитические решения в свою очередь получены при существенных допущениях и также обладают определенной погрешностью. Так для нестационарной задачи термоупругости при интенсивном нагреве можно пренебречь термоупругим эффектом. В настоящей работе валидация численного решения проводилась на основе сравнения численного решения с аналитическим решением для квазилинейного уравнения теплопроводности среды со степенной зависимостью коэффициента температуропроводности от температуры.

Математическая постановка связанной нестационарной задачи термоупругости

Математическая постановка нестационарного процесса термоупругого деформирования материала состоит из законов баланса массы, импульса, энергии, замыкающего уравнения в виде упругого закона с учетом теплового расширения/сжатия и имеет следующий вид [11]:

$$\dot{\rho} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \tag{1}$$

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{2}$$

$$\rho C \dot{T} = \nabla \cdot \lambda \nabla \boldsymbol{T} + Q, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{R} = \mathbf{\Pi} : (\mathbf{D} - \boldsymbol{\alpha} \dot{T}), \tag{4}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^{T}\right), \tag{5}$$

где ρ – массовая плотность, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, $\boldsymbol{\sigma}$ – симметричный тензор напряжений Коши, $\nabla(\cdot)$ – оператор градиента в текущей конфигурации, $\dot{(\cdot)}$ – материальная производная, $\mathbf{D}$ – тензор деформации скорости, $\mathbf{\Pi}$ – тензор упругих свойств четвертого ранга, T – температура, C – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, Q – объемная мощность тепла, $\boldsymbol{\alpha}$ – тензорный коэффициент теплового расширения.

Уравнения (1)-(5) дополняются начальными и граничными условиями (будут конкретизированы ниже). Термоупругий эффект учитывается в источнике тепловыделения $Q = -\partial \mathbf{S} / \partial t : (\mathbf{F}_{th}^{-1} \cdot \boldsymbol{\alpha} T)$ для случая малых деформаций $Q = -\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial t : \boldsymbol{\alpha} T$). Здесь S – симметричный тензор Пиолы-Кирхгофа [12], а градиент места представляется разложением на составляющие упругой деформации и теплового расширения $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_{th}$.

Задача решается в ослабленной формулировке. Численное моделирование проводится методом конечных элементов, в рамках которого полевые величины аппроксимируются дискретной моделью и строятся на множестве кусочно-непрерывных функций формы φ_k, заданных на лагранжевой конечно-элементной сетке,

$$T = \sum_k T_k \varphi_k, \tag{6}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} = \sum_k \mathbf{v}_k \varphi_k. \tag{7}$$

Тогда из свойств ортогональности функций φ_k условия минимума невязки запишутся следующим образом:

$$\int_V \varphi_k \left(\rho C \frac{\partial \mathrm{T}(\mathbf{r},\mathrm{t})}{\partial t} - Q - \nabla \cdot \left(\lambda \nabla T(\mathbf{r},\mathrm{t}) \right) \right) dV + \int_\Gamma \varphi_k \left(\lambda \frac{\partial \mathrm{T}(\mathbf{r},\mathrm{t})}{\partial \mathbf{n}} + \mathbf{q}(\mathbf{r},\mathrm{t}) \right) d\Gamma = 0, \tag{8}$$

$$\int_V \varphi_k \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},\mathrm{t})}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r},\mathrm{t}) \right) dV + \int_\Gamma \varphi_k \left(\mathbf{n}(\mathbf{r},\mathrm{t}) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r},\mathrm{t}) - \mathbf{p}(\mathbf{r},\mathrm{t}) \right) d\Gamma = 0, \tag{9}$$

где для общей постановки $\mathbf{q}(\mathbf{r},t)$ задает поток тепла на границе, а $\mathbf{p}(\mathbf{r},t)$ задает усилие на границе.

Воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса для объемных интегралов и интегрирования по частям:

$$\int_V \varphi_k \left(\rho C \frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial t} - Q \right) dV + \int_V \nabla\varphi_k \cdot \left(\lambda \nabla T(\mathbf{r},t)\right) dV + \int_\Gamma \varphi_k \mathbf{q}(\mathbf{r},t) d\Gamma = 0\,, \qquad (10)$$

$$\int_V \varphi_k \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right) dV + \int_V \nabla\varphi_k \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r},t) dV - \int_\Gamma \varphi_k \mathbf{p}(\mathbf{r},t) d\Gamma = 0\,. \qquad (11)$$

Уравнения (10)-(11) аналогичным образом получаются в отсчетной конфигурации:

$$\int_{V_0} \varphi_k \left(\rho_0 C \frac{\partial T(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t} - Q \right) dV_0 + \int_{V_0} \overset{0}{\nabla} \varphi_k \cdot \left(\lambda \overset{0}{\nabla} T(\mathbf{r}_0,t) \right) dV_0 + \int_{\Gamma_0} \varphi_k \mathbf{q}_0(\mathbf{r}_0,t) d\Gamma_0 = 0\,, \qquad (10')$$

$$\int_{V_0} \varphi_k \left(\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}_0,t)}{\partial t} \right) dV_0 + \int_{V_0} \overset{0}{\nabla} \varphi_k \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}_0,t) dV_0 - \int_{\Gamma_0} \varphi_k \mathbf{p}_0(\mathbf{r}_0,t) d\Gamma_0 = 0\,. \qquad (11')$$

Здесь тензор напряжений Пиолы $\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^{T}$[11,12]. В силу громоздкости формулировки всех разрешающих уравнений в пакете Comsol Multiphysics для иллюстрации приведем лишь подынтегральные выражения для модуля твердотельной механики (solid) и модуля теплопроводности (ht). Данные выражения приведены для потенциальных пользователей пакета, в частности, будут полезны студентам и аспирантам при освоении пакета.

Уравнению баланса количества движения (10’) соответствует выражение *solid.rho*(– solid.u_ttX * test(u) – solid.u_ttY * test(v) – solid.u_ttZ * test(w)) – solid.PxX * test(solid.gradUxX) – solid.PxY * test(solid.gradUxY) – solid.PxZ * test(solid.gradUxZ) – solid.PyX * test(solid.gradUyX) – solid.PyY * test(solid.gradUyY) – solid.PyZ * test(solid.gradUyZ) – solid.PzX * test(solid.gradUzX) – solid.PzY * test(solid.gradUzY) – solid.PzZ * test(solid.gradUzZ).*

Операторы *test(u)*, *test(v)*, *test(w)* соответствуют функциям формы φ_k представления (7).

Для уравнения баланса энергии (11’) используется выражение *(ht.dflux_materialX * test(TX) + ht.dflux_materialY * test(TY) + ht.dflux_materialZ * test(TZ)) * ht.d – ht.C_eff_material * ht.timeDerivative_material * test(T) * ht.d с мультифизической связью (tel)* для теплового потока –Q*: (solid.T * (–d(te1.Msl11,TIME) * te1.alphat11 – 2 * d(te1.Msl12,TIME) * te1.alphat12 – 2*d(te1.Msl13,TIME) * te1.alphat13 – d(te1.Msl22,TIME) * te1.alphat22 – 2*d(te1.Msl23,TIME) * te1.alphat23 – d(te1.Msl33,TIME) * te1.alphat33)) * test(solid.T_nointp) * ht.d.* Здесь *test(T)* соответствует разложению температуры по функциям φ_k (6), а выражения *test(TX)*, *test(TY)*, *test(TY)* – разложению градиента температуры по функциям $\overset{0}{\nabla}\varphi_k$.

Силовые граничные условия (ГУ) задаются условием равенства нулю поверхностных интегралов и в нотации пакета имеют следующие выражения: *solid.bndl1.F_Ax * test(solid.bndl1.ux) + solid.bndl1.F_Ay * test(solid.bndl1.uy) + solid.*

*bndl1.F_Az * test(solid.bndl1.uz), где {F_Ax, F_Ay,F_Az}* – вектор поверхностной силы, *bndl1* – имя объекта, отвечающего силовому ГУ. Кинематические граничные условия задаются в форме ограничений, например, для условия перемещения u_x*=u01* ограничение имеет выражение: *solid.disp1.U01 – solid.disp1.ux.* Здесь *disp1* – имя объекта, отвечающего кинематическому ГУ.

На каждом временном шаге с использованием неявной схемы интегрирования по времени и ассемблирования по конечным элементам получается система нелинейных уравнений для узловых значений (6)-(7), которые вычисляются эффективным решателем PARDISO на каждом шаге по времени.

Пользователю предоставляется возможность дополнить выражения в ослабленной формулировке, например, на основе собственных дополнительных уравнений. Также в пакете есть возможность описания полностью собственной модели с использованием модуля Weak Form PDE.

Верификация численного решения задачи термоупругости

Термоупругий эффект при деформировании твердого тела был открыт Джоулем и описан в 1853 г. У. Томпсоном [10]. В диапазоне напряжений до 10 ГПа эффект термоупругости является хоть и малым, но существенным для прикладных задач [13]. Классическая формула У. Томпсона (лорда Кельвина) для определения изменения температуры от приложенного внешнего одноосного напряжения имеет следующий вид:

$$\frac{\vartriangle T}{T} = -\frac{\alpha}{\rho C}\vartriangle\sigma\,, \tag{12}$$

где T и $\vartriangle T$ – температура и ее изменение, α– коэффициент линейного термического расширения (для изотропного материала тензор $\boldsymbol{\alpha}=\alpha\mathbf{I}$), ρ▵ – плотность, С – удельная теплоемкость, σ – изменение продольных напряжений.

Формулу (12) при постоянных свойствах среды можно представить в дифференциальной форме

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\alpha}{\rho C}\dot{\sigma}\,, \tag{13}$$

которая также соответствует формуле для производства тепла $Q = \rho C\dot{T} = -\partial\boldsymbol{\sigma}/\partial t : \boldsymbol{\alpha}T$.

Проинтегрируем уравнение (13) и получим более точную оценку конечной температуры:

$$T = T_0 e^{-\frac{\alpha}{\rho C}\sigma}\,. \tag{14}$$

Следует отметить, что связанная постановка (1)-(3) является нелинейной в силу перекрестного влияния в источнике Q, а с учетом (14) и связи напряжений с температурными (объемными) деформациями скорость распространения продольных и объемных волн будет зависеть от $\nabla\cdot\mathbf{u}$ следующим образом [2]

$$U_l = \rho^{-1/2}\left(K + 4G/3 + \frac{9K^2\alpha^2}{\rho C}T_0\exp(-\frac{3K\alpha}{\rho C}\nabla\cdot\mathbf{u})\right)^{1/2}, \tag{15}$$

$$U_b = \rho^{-1/2}\left(K + \frac{9K^2\alpha^2}{\rho C}T_0\exp(-\frac{3K\alpha}{\rho C}\nabla\cdot\mathbf{u})\right)^{1/2}. \tag{16}$$

Здесь учтена связь объемного модуля *K* и сдвигового модуля *G* с параметрами Ламе. При этом волны с меньшими градиентами перемещений распространяются быстрее, что приводит к их дисперсии и нелинейности [2].

Для процедуры верификации рассматривалась задача растяжения образца размером 10x1x1 мм^3. Свойства задавались для изотропного материала и были выбраны модельными со следующими значениями: E=200 ГПа, ν=0.3, ρ_0=7800 кг/м^3, λ=100 Вт/(м·К), *C*=462 Дж/(кг·К), α=10^{-5} К$^{-1}$. Начальные условия являлись однородными. Начальные напряжения равны нулю. Начальная температура была равна 293 К. Один торец был зафиксирован вдоль оси растяжения, на втором задавались перемещения для пяти контрольных значений деформаций L / L от 0.01 до 0.05. В качестве конечных элементов выбирались тетраэдры размером порядка 0.2 мм.

Связанная нестационарная задача решалась в двух вариантах – в геометрической линейной и геометрически нелинейной постановках. Сравнение численного решения производилось с классической моделью У. Томпсона (12) и формулой (14). Для оценки погрешности численного решения методом конечных элементов приведем распределения напряжений и температуры вдоль оси растяжения образца. Время прохождения упругой волны от одного конца до другого составляет порядка микросекунды. Поэтому время расчета было выбрано равным 0.01 секунды, чтобы решение успело установиться. Характерное распределение флуктуаций напряжений $\delta\sigma=\sigma-11127304.6$ кПа вдоль оси растяжения приведено на рис. 1. Размах флуктуаций составил 3.2 кПа, что равняется относительной погрешности ~3·10^{-5} %.

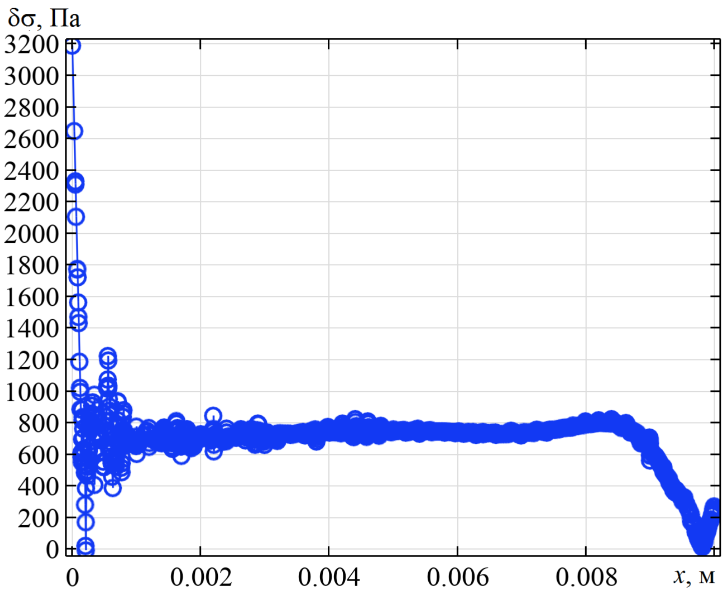

Рис.1. Распределение флуктуаций напряжений вдоль оси растяжения для конечной деформации 0.05 и момента времени 0.01 с

Распределение флуктуаций температуры $\delta T=T-284.08$ К вдоль оси растяжения приведено на рис. 2. Размах флуктуаций температуры составил 2.2 мК, что равняется относительной погрешности ~8·10^{-4} %. Указанные погрешности обусловлены выбранной дискретизацией, а также краевыми эффектами на границах. В центре образца наблюдается более однородное распределение, среднее значение которого можно сравнивать с формулой Томпсона.

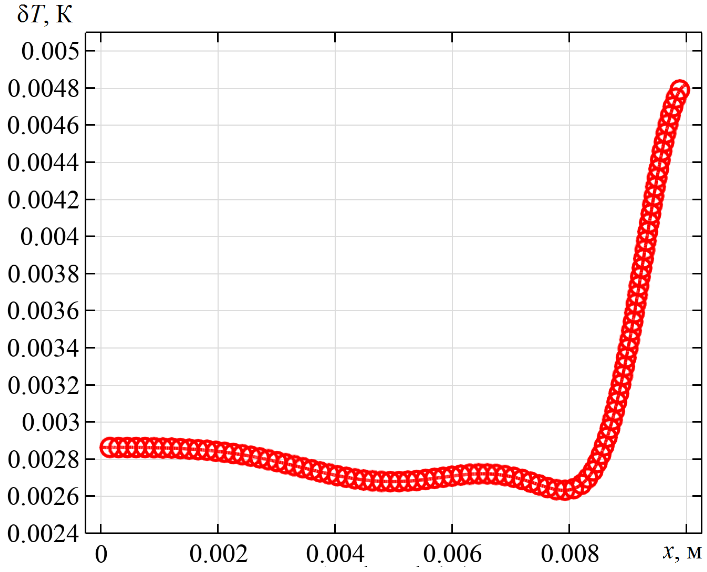

Рис.2. Распределение флуктуаций температуры вдоль оси растяжения для конечной деформации 0.05 и момента времени 0.01 с

В табл. 1 приведены значения изменения температуры для геометрически линейной задачи (ГЛ), геометрически нелинейной задачи (ГН), формул (12) и (14).

Таблица 1.

Значения изменения средней температуры (К) вследствие термоупругого эффекта

$\Delta L / L$	(ГЛ)	(ГН)	(12)	(14)
0.01	–1.62	–1.66	–1.63	–1.66
0.02	–3.24	–3.41	–3.25	–3.32
0.03	–4.84	–5.21	–4.88	–4.97
0.04	–6.44	–7.10	–6.52	–6.60
0.05	–8.03	–9.07	–8.13	–8.23

Из приведенных данных в таблице все значения изменения температуры при упругом деформирования твердого тела в диапазоне деформаций от 0.01 до 0.05 согласуются с классической формулой Томпсона (12) и уточненной формулой (14). Учет геометрической нелинейности позволяет получить значения более близкие к уточненной формуле. Погрешность составила не более 1%, поэтому процедуру верификации на основе эталонной задачи можно считать выполненной.

Аналитическое решение нелинейной задачи теплопроводности

Термомеханические и теплофизические свойства материалов из графита или композиций на основе углерода являются нелинейными и зависят от изменения температуры, плотности и напряженно-деформированного состояния [8,14]. Математические постановки нелинейных задач тепломассопереноса в углеродных материалах должны учитывать физико-химические явления, в том числе их анизотропию и структурную неоднородность. При решении задач особое внимание уделяется конечности скорости распространения тепла, а асимтотические решения удается найти лишь на фронте волны [14].

Аналитическое решение строится для уравнения теплопроводности для среды с нелинейными свойствами методом автомодельной редукции [15]. Для нелинейных параболических уравнений в отличие от линейной постановки отсутствует принцип суперпозиции решений, свойства нелинейной среды характеризуются возникающими пространственно-временными масштабами, не зависящими от внешних воздействий. Поэтому анализ каждого вида нелинейного уравнения требует отдельного внимания.

Квазилинейное одномерное параболическое уравнение теплопроводности записывается для энергии

$$u = \int_{T_0}^{T} \rho(\theta)C(\theta)d\theta$$

с нелинейным коэффициентом температуропроводности $\lambda\ /\ \rho C = k(u) = k_0u^{-n}$ в безразмерном виде

$$\partial u / \partial t = \partial(k_0 u^{-n} \partial u / \partial x) / \partial x\,, \qquad (17)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0\,, \qquad (18)$$

$$k(u)\,\partial u / \partial x\big|_{x=0} = q_0\,, \qquad (19)$$

$$\partial u / \partial x\big|_{x=1} = 0\,. \qquad (20)$$

На одном конце задается интенсивный тепловой поток q_0, на другом – нулевой поток тепла. Решение строится в форме волны $u(x,t) = V(a(x-ct))$, где a и c – константы. Подставляя функцию V() *в* (6) и опуская промежуточные выкладки, получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$cV' = ak_0 V^{-1-n}\left(-nV'^2 + VV''\right). \qquad (21)$$

Аналитическое решение данного дифференциального уравнения удается найти только для некоторых значений n. Например, для n=1 оно выражается отношением экспоненциальных функций, которое также может быть представлено через гиперболический тангенс, а для n=1/2 имеет вид гиперболического тангенса в четвертой степени.

При n=1 уравнение (17) можно переписать в следующем виде $u_t = k0\Delta \ln u$, известном как уравнение быстрой диффузии [16-19]. Аналитическое решение данного уравнения в виде распространяющего фронта как функция от волновой переменной $a(x\text{-}ct)+d$ имеет следующий вид:

$$u = k_0 \frac{a}{c}\left(1 + \mathrm{th}\left(-a(x-ct)+d\right)\right). \qquad (22)$$

С учетом представления гиперболического тангенса через экспоненты от волновой переменной имеем другое представление этого же решения:

$$u = k_0 \frac{a^*}{c\left(1+\exp\left(-a^*(x-ct)+d\right)\right)}, \ (a^*=2a) \qquad (23)$$

Решение в форме распространяющего фронта вида (23) встречается в работах [20-22]. Следует отметить, что уравнение $ut=\Delta \ln u$ является предельным случаем уравнения $u_t=\Delta(u^m/m)$ при $m \to 0$ (сингулярное уравнение диффузии), которое используется для описания нелинейной диффузии в пористых средах [23, 24]. Указанное уравнение также допускает существование решения в форме распространяющегося фронта [25].

При количественном сравнении с аналитическим решением термоупругим эффектом можно пренебречь, так как он незначительный по сравнению с достигаемыми значениями температуры при интенсивном нагреве. Поэтому в задаче валидации производилось сравнение только температурных полей. Численно решались уравнения (1)-(5) со свойствами материала, взятыми из работы [8]. В частности, температуропроводность материала представлялась в виде обратной от температуры зависимости $k=\lambda/\rho C=k_0T_0/T$ [м^2/с]. Здесь k_0 задает начальную температуропроводность при начальной температуре T_0. Задача решалась для тонкого слоя толщиной 1 мм, на одной стороне которого был задан интенсивный нагрев мощностью 30 ГВт/м^2, остальные границы теплоизолированные. Все границы были свободными от напряжений. Начальные условия выбирались однородными с начальной температурой T_0 и нулевыми напряжениями. Качественное сравнение численного и аналитического решений приведено на рис. 3 и 4.

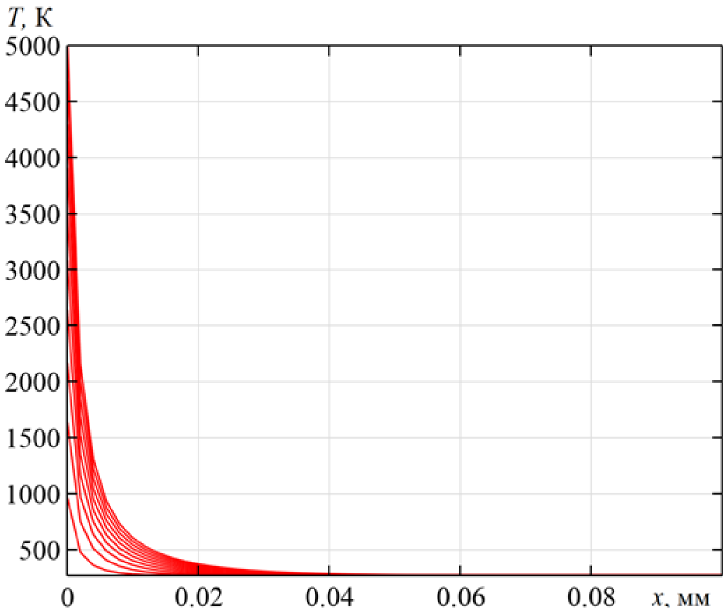

Рис. 3. Численное решение нестационарной задачи термоупругости для среды с нелинейными свойствами в различные моменты времени

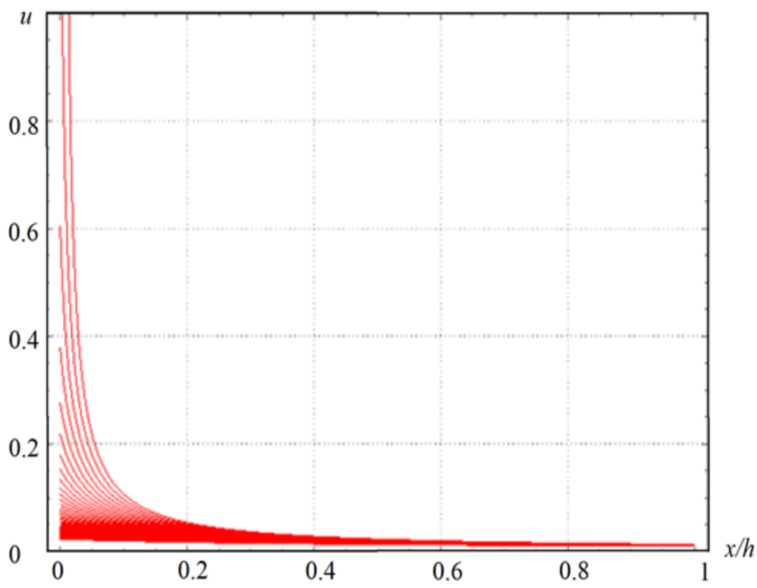

Рис. 4. Аналитическое решение нелинейного уравнения теплопроводности в различные моменты времени для приповерхностного слоя

Численное моделирование интенсивного нагрева поверхности со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры позволило получить режим интенсивного роста температуры, что также подтверждается сравнением с аналитическим решением (рис. 5).

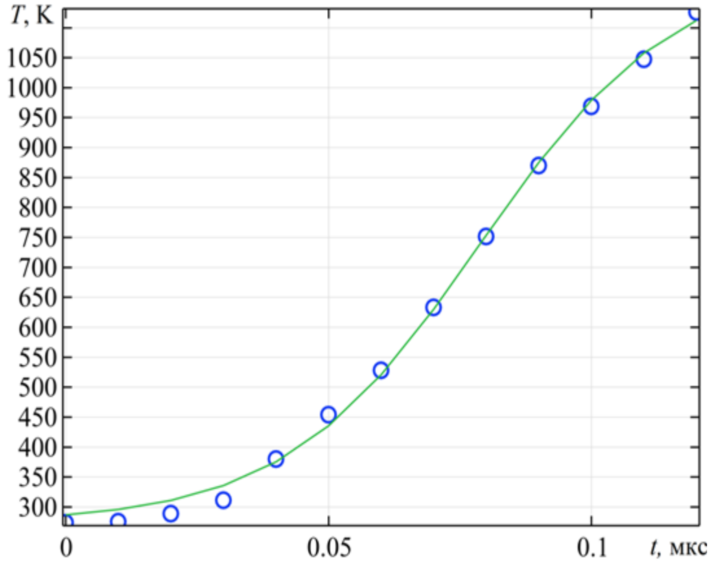

Рис. 5. Сравнение численного (маркеры) и аналитического (линия) решений для значения температуры на границе интенсивного нагрева

Выводы

В работе представлена математическая постановка нестационарной задачи термоупругости с учетом нелинейных свойств материала, а также геометрической нелинейности. В качестве численного метода решения использовался метод конечных элементов. Верификация численного решения выполнена для эталонной задачи одноосного растяжения образца из изотропного линейно-упругого материала. Сравнение проводилось с классической формулой Томпсона и ее дифференциальным аналогом. Получено соответствие результатов численного моделирования как для геометрически линейной постановки, так и для геометрически нелинейной постановки. Таким образом, для оценки термоупругого эффекта может использоваться классическая формула Томпсона. При численном моделировании желательно использовать геометрически нелинейную постановку, которая дает более близкие значения изменения температуры с уточненной формулой (14).

Дополнительно выполнена валидация на основе сравнения результатов численного решения задачи интенсивного нагрева приповерхностного слоя с аналитическим решением для нелинейного уравнения теплопроводности (при n=1). Разработанная математическая модель интенсивного нагрева термоупругого материала с нелинейными свойствами реализована в пакете прикладных программ Comsol Multiphisics. Получено хорошее соответствие численного и аналитического решений.

Библиографический список

1. *Богов И.А.* Плоские задачи термоупругости в газотурбостроении. – Ленинград: Ленинградский университет, 1984. – 192 с.
2. *Бородин П.Ю., Галанин М.П.* Динамическая связанная задача термоупругости в различных пространственных приближениях // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10. – №. 3. – С. 61-82. https://www.mathnet.ru/rus/mm1259
3. *Шляхин Д.А., Кальмова М.А.* Связанная нестационарная задача термоупругости для длинного полого цилиндра // Инженерный вестник Дона. – 2020. – №. 3 (63). – С. 9.
4. *Кусаева Ж.М.* Решение осесимметричной задачи термоупругости для круглой пластины с учетом связанности термоупругих полей // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. – 2021. – №. 3 (48). – С. 3-10. https://journals.dvfu.ru/vis/article/view/196
5. *Иванычев Д.А.* Исследование задачи термоупругости для трансверсально-изотропного тела вращения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2024. – Т. 21. – №. 2. – С. 35-45. https://doi.org/10.31429/vestnik-21-2-35-45
6. *Шляхин Д.А., Кусаева Ж.М.* Решение связанной нестационарной задачи термоупругости для жесткозакрепленной многослойной круглой пластины методом конечных интегральных преобразований // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – 2021. – Т. 25. – №. 2. – С. 320-342. https://doi.org/10.14498/vsgtu1797
7. *Ватульян А.О., Нестеров С.А., Юров В.О.* Решение задачи градиентной термоупругости для цилиндра с термозащитным покрытием // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14. – №. 3. – С. 253-263. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.21
8. *Станкус С.В., Савченко И.В., Агажанов А.Ш., Яцук О.С., Жмуриков Е.И.* Теплофизические свойства графита МПГ-6 // Теплофизика высоких температур. – 2013. – Т. 51, выпуск 2. – С. 205-209.https://energy.ihed.ras.ru/arhive/article/75
9. *Беляев В. В., Наймарк О. Б.* Кинетика многоочагового разрушения при ударно-волновом разрушении // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 312. – №. 2. – С. 289-293.
10. *Thompson W. (Lord Kelvin).* Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1853. – 20, 261 p.
11. *Келлер И.Э.* Механика сплошной среды: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2022. – 260 с.
12. *Коробейников С.Н.* Естественные тензоры напряжений // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, выпуск 6. – С. 152–158. https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=119999&ARTICLE_ID=122887
13. *Гиляров В.Л., Слуцкер А.И.* Описание термоупругого эффекта в твердых телах в широкой области температур // Физика твердого тела. – 2014. – Т. 56. – №. 12. – С. 2407-2409. http://journals.ioffe.ru/articles/41131
14. *Астапов А.Н., Жаворонок С.И., Курбатов А.С., Рабинский Л.Н., Тушавина О.В.* Основные проблемы при создании систем тепловой защиты на базе структурно-неоднородных материалов и методы их решения // Теплофизика высоких температур. – 2021. – Т. 59. – №. 2. – С. 248-279. https://doi.org/10.31857/S0040364421020010
15. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука. – 1987. – 480 с.
16. *Vazquez J. L.* Nonexistence of solutions for nonlinear heat equations of fast-diffusion type // Journal de mathématiques pures et appliquées. – 1992. – Т. 71. – № 6. – С. 503-526.
17. *Rosenau P.* Fast and superfast diffusion processes // Physical review letters. – 1995. – Т. 74. – №. 7. – С. 1056. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.1056
18. *Семенов Э.И.* Свойства уравнения быстрой диффузии и его многомерные точные решения // Сибирский математический журнал. – 2003. – Т. 44. – №. 4. – С. 862-869. https://doi.org/10.1023/A:1024740724807
19. *Косов А.А., Семенов Э.И.* Новые точные решения уравнения диффузии со степенной нелинейностью // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т. 63. – №. 6. – С. 1290-1307. https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.610
20. *Аристов С.Н., Мясников В.П.* Нестационарные трехмерные структуры в приповерхностном слое океана // Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1996. – Т. 349. – №. 4. – С. 475-477. https://www.mathnet.ru/rus/dan50139
21. *Аристов С.Н.* Периодические и локализованные точные решения уравнения ht=Δlnh // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40. – №. 1. – С. 22-26. https://doi.org/10.1007/BF02467967

22. *Popovych R.O., Vaneeva O.O., Ivanova N.M.* Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation // Physics Letters A. – 2007. – Т. 362. – №. 2-3. – С. 166-173. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.10.015
23. *Hui K.M.* Nonexistence of Fundamental Solutions of the Equation ut= Δlnu // Journal of mathematical analysis and applications. – 1994. – Т. 182. – №. 3. – С. 800-809. https://doi.org/10.1006/jmaa.1994.1122
24. *Daskalopoulos P., del Pino M. A.* On a singular diffusion equation // Communications in Analysis and Geometry. – 1995. – Т. 3. – №. 3. – С. 523-542.
25. *Vázquez J. L.* The porous medium equation: mathematical theory. – Oxford university press, 2007. https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:24027827

VERIFICATION AND VALIDATION OF NUMERICAL SIMULATION METHODS OF THERMOELASTIC DEFORMATION OF SOLIDS

Bayandin Yu.V.

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS

For citation:
Bayandin Yu.V. Verification and validation of methods of numerical simulation of thermoelastic deformation of a solid // Perm Federal Research Center Journal. – 2025. – № 1. – P. 6–17. https://doi.org/10.7242/2658-705X/2025.1.1

Related non-stationary formulations of thermoelasticity problems arise in many fields of science and engineering. Analytical solutions are obtained only under significant assumptions, including reduction in the dimensionality of the problem, so numerical methods are required for applied problems, along with those software packages that check reliability procedures of verification and validation. Verification is understood as checking the correctness of hypotheses and the formulation of the mathematical formulation, setting correct initial and boundary conditions, choosing a discrete analog and a numerical solution method, taking into account sources of errors and faults. The verification is confirmed by a sufficiently accurate correspondence of the numerical solution to the reference model. The relevance lies in the choice of a suitable reference model. In the present work, the reference model for the thermoelasticity problem is the classical Thompson formula, which describes the temperature change during elastic deformation of a solid body. The error of the numerical solution for the reference problem was of the order of 1% for five characteristic strain values from 0.01 to 0.05. Validation complements the verification procedure and is based on comparison with reliable experimental data or, in their absence, with known analytical solutions. The aim of the work is to carry out verification and validation procedures for the numerical solution of the unsteady problem of thermoelasticity of a deformable solid. The finite element method in the Comsol Multiphysics application package was used. A satisfactory correspondence between the numerical solution and the known analytical solution for the nonlinear heat conduction equation was obtained.

Keywords: deformable solid body, thermoelasticity, nonlinear properties, coupled problem, finite element method.

Сведения об авторе

Баяндин Юрий Витальевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН – филиал Пермского федерального исследовательского центра УрО РАН («ИМСС УрО РАН»), 614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1, e-mail: buv@icmm.ru

Материал поступил в редакцию 30.10.2024