

## ТОЧНОСТЬ И БЫСТРОДЕЙСТВИЕ АЛГОРИТМОВ АППРОКСИМАЦИИ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

А.С. Долгаль

Горный институт УрО РАН, г. Пермь

**Аннотация:** Рассмотрены вопросы, связанные с повышением точности и скорости вычислений для компьютерных технологий, предназначенных для трансформации гравитационного и магнитного полей с использованием эквивалентных источников. Подчеркивается, что точность расчета трансформант силы тяжести определяется адекватностью параметров аппроксимационной конструкции реальному распределению аномалиеобразующих масс в геологической среде, что является невозможным на практике. Приближенными решениями этой проблемы являются совместное использование материалов гравиметрических съемок разного масштаба или применение многоуровневого размещения элементарных источников, отвечающего определенным геометрическим требованиям. Проведены оценки обусловленности матриц коэффициентов для систем уравнений, возникающих в процессе истокообразной аппроксимации. Представлен модифицированный метод наискорейшего градиентного спуска, близкий по быстродействию к методу Зейделя. Приведены примеры решения практических задач.

**Ключевые слова:** гравиразведка, трансформация, аппроксимация, эквивалентный источник, система линейных алгебраических уравнений, решение, итерационные методы, матрица, вектор, числа обусловленности, точность.

### Введение

В прикладной геофизике целый ряд преобразований (трансформация, фильтрация, интерполяция и др.) дискретно заданных значений гравитационного и магнитного полей могут осуществляться с применением истокообразной аппроксимации [14, 15]. При этом используется приближение наблюдаемого поля  $U$  теоретическим полем  $U^*$ , представленным в виде системы потенциальных функций, представляющих собой совокупный аномальный эффект зафиксированных в 3D пространстве элементарных источников, обладающих соответствующими физическими характеристиками (массой или магнитным моментом). Далее, для удобства и без ограничения общности, будем рассматривать этот метод только применительно к гравиразведке, преимущественно – к задачам трансформации.

Параметры эквивалентных источников определяются с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с приближенно заданной правой частью вида:

$$G\alpha = u, \quad (1)$$

где  $G$  – квадратная матрица значений гравитационных эффектов элементарных источников с единичной массой ( $\alpha = 1$ ),  $\alpha$  – вектор неизвестных значений аномальных масс,  $u$  – вектор значений аномального гравитационного поля в редукции Буге. Под гравитационным эффектом, в частности может подразумеваться 1-я вертикальная производная гравитационного потенциала точечного источника  $G = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ , где  $x, y, z$  – расстояния от источника до точки измерений. СЛАУ (1) решается итерационным методом с точностью:

$$\|G\alpha - u\| \cong \delta, \quad (2)$$

где  $\delta$  – уровень помех в поле  $U$ , сопоставимый с точностью съемки. По сути осуществляется решение линейной обратной задачи гравиразведки [16], в котором искомые значения масс (плотностей)  $\alpha$  не используются для получения новой геологической информации, а являются лишь средством для восстановления поля  $U^*$  или его трансформант.

Несомненными достоинствами истокообразной аппроксимации являются высокая точность преобразований цифровых моделей геофизических полей, учет различий в высотах точек измерений, подавление негармонической составляющей (помехи), возможность одновременного выполнения 3D-интерполяции и трансформации данных. В данной статье будут рассмотрены некоторые вопросы, связанные с повышением точности метода и быстродействия реализующих его алгоритмов. Речь пойдет о попытке формирования аппроксимационных конструкций, в той или иной мере адекватных природному пространственному распределению аномалиеобразующих масс и обеспечивающих достаточно хорошую обусловленность СЛАУ вида (1).

### Теоретическая и экспериментальная оценки точности метода

Точность восстановления геофизических полей  $\varphi(x)$  в произвольных точках с использованием аппроксимирующей функции  $\hat{\varphi}(x)$  в метрике Чебышева  $\|\delta\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x) - \hat{\varphi}(x)|$  теоретически рассматривалась В.И. Ароновым [1]. Она представляет собой сумму двух слагаемых  $\|\delta\|_C = \|\delta_1\|_C + \|\delta_2\|_C$ , первое из которых  $\|\delta_1\|_C$  характеризует неустранимую погрешность, связанную с шагом дискретизации, второе – погрешность  $\|\delta_2\|_C$ , обусловленную конкретным вычислительным методом. В случае  $\|\delta_2\|_C \rightarrow \min$  можно говорить об асимптотически оптимальном восстановлении поля  $\varphi(x)$ , что на практике достигается при выполнении условия  $1 \leq h/\Delta x \leq 2$ , где  $h$  – относительная глубина эквивалентных источников,  $\Delta x$  – шаг между точками задания поля. Взаимосвязь между двумя составляющими  $\|\delta\|_C$  выглядит следующим образом  $\|\delta_2\|_C \leq \|\delta_2\|_C [1 + O(1/h)]$ . Относительная погрешность  $\mu = \|\delta_1\|_C / \max|U|$  может быть оценена теоретически на основе аналитического решения прямой задачи гравиразведки для тел правильной формы. Например, для поля  $U_z$  горизонтальной вещественной линии величина  $\mu_1 = 2e^{-\pi h/\Delta x}$ , при  $h/\Delta x = 0.5$   $\mu = 42$ ; при  $h/\Delta x = 1.0$   $\mu = 8.6$ ; при  $h/\Delta x = 1.5$   $\mu = 1.8$ ; при  $h/\Delta x = 2.0$   $\mu = 0.34$ . Таким образом, для повышения точности восстановления гравитационного поля или его трансформант  $U_z$  целесообразно увеличивать глубины эквивалентных источников  $h$ .

Однако с ростом  $h$  резко ухудшается обусловленность матрицы коэффициентов СЛАУ (1), которая определяет сложность процесса ее решения и точность полученных результатов [7]. Число обусловленности ( $H$ -число Тодда) матрицы  $\mathbf{G}$ :

$$\text{cond } \mathbf{G} = \nu_G = \|\mathbf{G}^{-1}\| \|\mathbf{G}\| \quad (3)$$

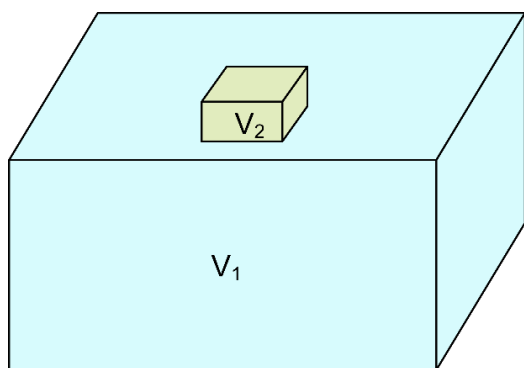
характеризует влияние неточностей в задании исходных данных на окончательный результат [4]. Напомним, что минимально возможная величина  $\nu = 1$ , СЛАУ с высокими значениями  $\nu \gg 1$  называют плохо обусловленными. В литературе имеются разные пороговые оценки чисел  $\nu_{\text{пор}}$ , определяющих хорошую и плохую обусловленность СЛАУ, хотя четких границ здесь нет. Автор склонен разделять точку зрения о  $\nu_{\text{пор}} \cong 1000$ . Полученные ранее экспериментальные оценки сверху обусловленности  $\nu_G$  матриц коэффициентов СЛАУ при  $1 \leq h \leq 5$  изменяются в пределах от  $\sim 5 \times 10^2$  до  $\sim 2 \times 10^8$  и не зависят от метода их решения.

Имеющийся многолетний опыт практического вычисления трансформант геопотенциальных полей свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве случаев погружение на глубину системы эквивалентных источников сопровождается заметным увеличением числа итераций при решении СЛАУ и ростом величины погрешности  $\|G\alpha - u\|$ . Заметных изменений в морфологии результирующих трансформант при этом не наблюдается [10]. Как известно, трансформация осуществляется с целью подавления мешающей информации и наиболее четкого выявления части полезной информации. Для визуального анализа карт трансформант (геоизображений) и для включения их в качестве признаков в процесс автоматизированного анализа данных (безэталонная классификация, распознавание образов) вполне достаточно использовать материалы, полученные при использовании минимальной глубины расположения эквивалентных источников  $h = \Delta x$ , где в качестве  $\Delta x$  может рассматриваться шаг сети задания поля (при одном уровне глубин размещения эквивалентных источников) или горизонтальное расстояние между эквивалентными источниками (при нескольких уровнях глубин их размещения). В этом случае при сравнительно небольших вычислительных затратах удастся добиться выполнения условия (2) при решении СЛАУ.

### Совершенствование аппроксимационной конструкции

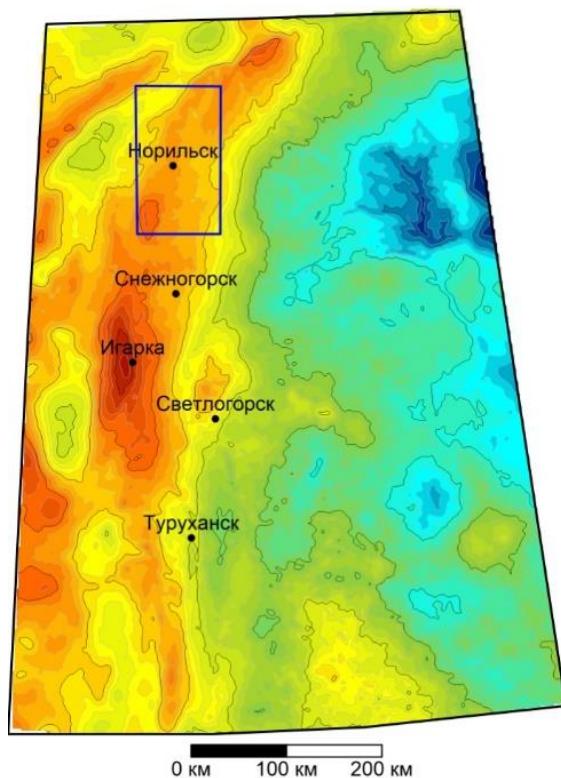
Другим крайне важным моментом является различие в теоретических и практических оценках точности метода, обусловленное влиянием сторонних источников при конечных размерах области задания поля  $S$ . Исследования А.В. Пугина свидетельствуют о том, что «сколь угодно близкое совпадение аппроксимирующей функции со значениями поля, зарегистрированными в дискретных точках лишь в части поверхности  $S$ , не гарантирует аналогичного или лучшего совпадения всюду во внешней области» [12]. На модельных и практических примерах показано, что «аналитические продолжения функций и их производных аппроксимационным способом отличаются при использовании разных алгоритмов. Вопрос, какое из них считать «правильным», остается открытым» [12].

Ответом на этот вопрос является построение аппроксимационной конструкции, полностью адекватной реальному распределению аномалиеобразующих масс (т.е. плотности) в геологической среде, причем в объеме  $V_1$ , существенно превышающем размер изучаемого фрагмента  $V_2, V_2 \subset V_1$ . Схематически это представлено на рис. 1, причем идеальный вариант соответствия  $V_1$  геoidу для прикладной геофизики рассматривать не имеет смысла. Также вполне понятно, что начиная с какого-то объема петрофизической информации «лишаются смысла гравиразведочные (магниторазведочные) работы, цель которых состоит в изучении распределения плотности (намагниченности) в геологической среде» [13].



**Рис. 1.** Схема, поясняющая соотношение между аппроксимационной конструкцией  $V_1$  и изучаемым фрагментом геоплотностной среды  $V_2$

Грубым приближением к ситуации, изображенной на рис. 1 является совместная аппроксимация разномасштабных геофизических данных, пример которой для аэромагнитных съемок масштабов 1:100 000 и 1:25 000 можно найти в работе [8]. Проиллюстрируем применение данного подхода к разделению гравитационного поля Норильского района, представленного на сводной карте 1:50 000 масштаба, на локальную и региональную составляющие. Исследуемая площадь  $S_2$  имеет размеры  $\sim 14\,000\text{ км}^2$ , сеть задания значений поля и отметок высот  $0.5 \times 0.5\text{ км}$ , размер соответствующих матриц 315 строк, 177 столбцов (рис. 2). Площадь  $S_1$  гравиметрической съемки масштаба 1:200 000 составляет  $\sim 380\,000\text{ км}^2$ , сеть задания значений поля и отметок высот  $2 \times 2\text{ км}$ , размер соответствующих матриц 385 строк, 293 столбца (рис. 2).



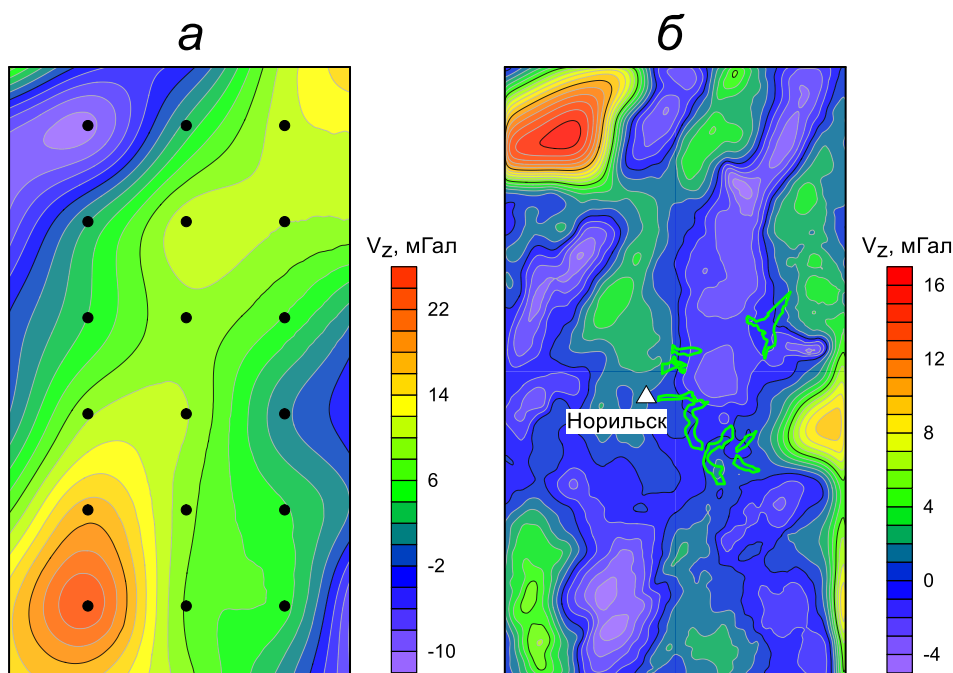
**Рис. 2.** Карта изоаномал гравитационного поля (съемка 1:200 000 масштаба) и площадь сводной гравиметрической карты масштаба 1:50 000 (синий контур)

Поле 678 источников с глубиной  $h_1=25\text{ км}$ , аппроксимирующих данные среднемасштабных исследований в пределах территории  $S_1$ , восстанавливалось в области  $S_2$ . Затем разностное поле двух съемок, вычисленное на земной поверхности для  $S_2$ , моделировалось набором элементарных источников, расположенных на глубине  $h_2 = 0.5\text{ км}$ . Точностью аппроксимации (2) составила  $\delta \cong 0.02\text{ мГал}$ . Затем поле «приповерхностных» источников восстанавливалось на высоте 900 м. На эту же высоту был осуществлен пересчет данных съемки масштаба 1:200 000 с использованием «глубинных» источников. Таким образом, было получено поле двухуровневой аппроксимационной конструкции на высоте  $H = 900\text{ м}$ . Его региональной компоненте отвечает эффект от источников с глубиной 25 км, локальной компоненте – эффект от источников с глубиной 0.5 км (рис. 3).

В отличие от метода квадродерева [9], в данном случае при определении масс «глубинных» источников используются все имеющиеся значения поля. При этом возникает переопределенная СЛАУ, в которой число уравнений превышает число неизвестных. Методом Холецкого [2] выполняется решение нормальной системы уравнений, полученной с помощью левой трансформации Гаусса:

$$G^T G \alpha = A^T u \quad (4)$$

Система уравнений (4) всегда совместна, матрица ее коэффициентов  $G^T G$  обладает свойством симметричности и положительной определенности (т.н. матрица SPD - Symmetric and Positively Defined). Однако обусловленность ее несколько ухудшается:  $\sqrt{\text{cond } G^T G} = \text{cond } G$ . Приблизительные потери в точности решения при выполнении условия  $h = \Delta x$  могут достигать 5–6 значащих цифр. Это существенно ниже критических значений. В частности, для компьютера автора статьи Asus Aspire VN7-791 с процессором Intel(R) Core(TM) i7-4710HQ экспериментально определенное значение машинного нуля  $\varepsilon_0 \cong 1 \times 10^{-19}$ , т.е. при таких потерях результаты ориентировочно будут содержать не менее 12 значащих цифр.



**Рис. 3.** Карты региональной и локальной составляющих гравитационного поля на горизонтальной плоскости  $H = 900$  м, обусловленные источниками с глубиной 25 км (а), источниками с глубиной 0.5 км (б), соответственно.

*Примечание:* показаны «глубинные» источники (черный цвет) и рудоносные интрузии габбро-долеритов (зеленый контур)

Другим подходом к получению «правильных» трансформант поля является попытка построения «квазиреального» распределения возмущающих масс только внутри фрагментарного объема  $V_2$  непосредственно под участком интерпретируемой гравиметрической съемки (рис. 1). Он базируется на очевидном предположении о наличии геоплотностных неоднородностей в широком интервале глубин в пределах всей литосферы. Этот подход может понадобиться, например, при наличии существенных различий в материалах съемок на площадях  $S_1$  и  $S_2$ , обусловленных различными методиками редуцирования результатов полевых измерений.

Преимущества многоуровневой аппроксимационной конструкции [5] вполне очевидны с физической точки зрения, в частности модель поля можно представить в виде суммы трех разночастотных составляющих  $\Delta g_i, i = \overline{1,3}$  и помехи  $\varepsilon$ :



$$\Delta g = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \varepsilon, \quad (5)$$

где  $\Delta g_1$  – низкочастотная,  $\Delta g_2$  – среднечастотная,  $\Delta g_3$  – высокочастотная составляющие гравитационного поля. Определение масс эквивалентных источников начинается с нижней части аппроксимационной конструкции, построенной с учетом соотношения  $h \approx \Delta x$  между их глубинами  $h$  и горизонтальными расстояниями  $\Delta x$  путем решения нормальной СЛАУ вида (4). Затем аналогичные действия осуществляются для двух других уровней глубин размещения источников, отвечающих средне- и высокочастотным компонентам поля. Помеха  $\varepsilon$  представляет собой не скомпенсированную в процессе подбора масс остаточную составляющую поля  $\Delta g$ . В некоторых случаях можно использовать более сложные схемы разложения поля:  $i > 3$ .

Приведем практический пример для материалов среднемасштабной гравиметрической съемки в пределах листа О-40, охватывающей территорию Пермского края. Цифровая модель поля включает в себя 39634 значения аномалий Буге, заданных в узлах квадратной сети с шагом 2 км. На рис. 4 приведены разночастотные компоненты поля  $\Delta g_1$ ,  $\Delta g_2$ ,  $\Delta g_3$ , обусловленные источниками с глубинами 50 км, 10 км и 2 км, соответственно. Амплитуда помехи  $\varepsilon$  составляет около 0.06 мГал.

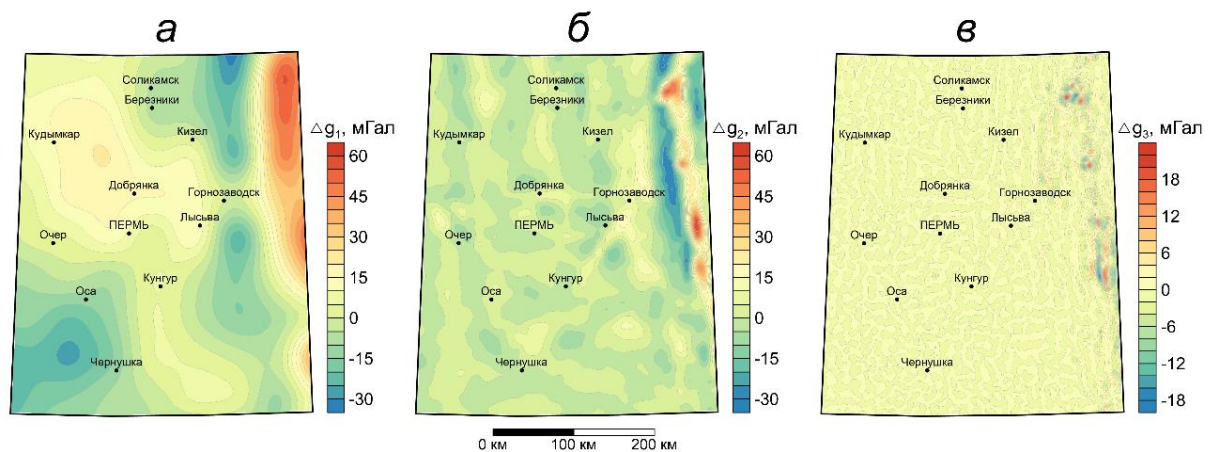


Рис. 4. Карты изоаномал составляющих гравитационного поля: а – низкочастотной; б – среднечастотной; в – высокочастотной

### Решение «плохих» СЛАУ большой размерности

Многие исследователи СЛАУ вида (1), (4) считают «плохими» (обратный оператор  $\|G^{-1}\| > c$ , где  $c$  – достаточно большое число) и для их решения используют метод регуляризации. Однако известно, что «удачная дискретизация иногда обладает дополнительными регуляризирующими свойствами. Более того, было обнаружено, что при решении некоторых типов задач можно обойтись дискретизацией, минуя шаг регуляризации (в таком случае говорят о саморегуляризации задачи при ее дискретизации). Примером служат интегральные уравнения Вольтерра I рода, для которых изучены методы квадратурных сумм и близкие алгоритмы» [3]. Разумный выбор соотношения между шагом сети  $\Delta x$  и относительной глубиной источников  $h$  приводит к эффекту саморегуляризации решения [10].

В большинстве практических случаев число неизвестных  $\alpha$  составляет порядка  $10^4 - 10^6$ , что влечет за собой необходимость использования приближенных итерационных методов для решения СЛАУ. Основные затруднения при этом связаны с необходимостью многократного вычисления элементов матрицы  $G$ , т.к. ее раз-

мерность не допускает размещения необходимого количества вещественных чисел в оперативной памяти (RAM) компьютера. При выборе итерационных методов в данной ситуации целесообразно учитывать их арифметическую сложность, которая складывается из скорости сходимости метода и арифметической сложности одной итерации.

Трудоёмкой операцией внутри каждой итерации является умножение матрицы  $A$  на вектор  $\alpha$ , что даёт преимущества простым методам, где она выполняется однократно, в частности – методам Якоби, Зейделя, релаксации [4]. Строгое доказательство сходимости метода Зейделя для СЛАУ (1) при криволинейной поверхности задания поля  $z = f(x, y)$  отсутствует, однако у автора имеется многолетний опыт его успешного применения [6]. В этом методе текущая оценка невязки  $\|G\alpha - u\|$  на итерации с номером  $k + 1$  выполняется с использованием значений  $\alpha^k$  и  $\alpha^{k+1}$ . Приближённая величина невязки  $\delta$  может заметно отличаться от её истинного значения, поэтому после выполнения последней итерации необходим расчёт  $\|G\alpha^{k+1} - u\|$ .

Достаточно эффективным является также метод наискорейшего градиентного спуска (DG). Он применяется для минимизации весьма широкого класса функций и сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q = (M - m)/(M + m)$ , где  $M, m$  – максимальное и минимальное собственные значения матрицы  $G$ . На каждой итерации метод DG требует выполнения двух трудоёмких операций умножения матрицы  $G$  на вектор  $\alpha$ . Снизить вычислительные затраты удастся при учёте специфики структуры матрицы коэффициентов  $G$ , обусловленной затуханием поля эквивалентного источника при значительном удалении  $r$  от него по горизонтали.

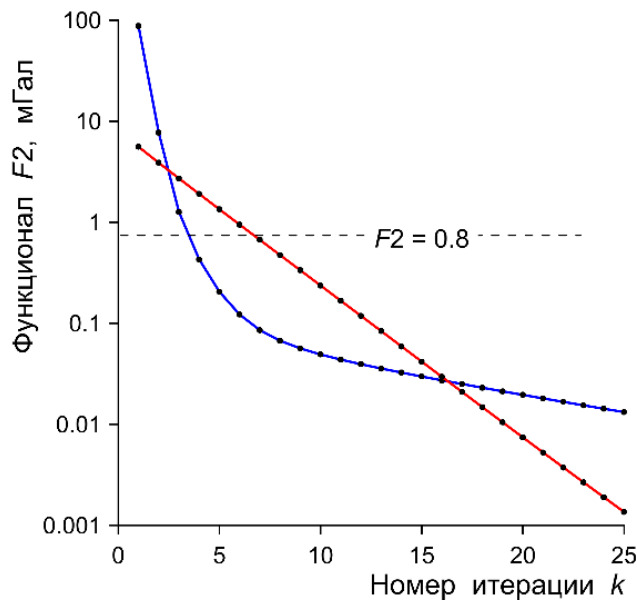
Можно выбрать пороговое значение  $R_0$ , предполагая, что при  $r > R_0$  выполняется условие  $G(r) = 0$ , то разрежённую матрицу коэффициентов  $\tilde{G}$  во многих случаях удастся поместить в оперативную память компьютера. Если вектор  $u$  имеет размерность  $m \times n$ , а внутри окружности радиусом  $R_0$  находится  $k$  точек поля, то разрежённая матрица  $\tilde{G}$  включает в себя только  $m \times n \times k$  элементов. На практике пороговое значение  $r$  обычно лежит в интервале  $10\Delta x \leq R_0 \leq 40\Delta x$ . Таким образом число операций в одном из двух циклов внутри итерации при выборе шага спуска  $\tau$  будет меньше в  $(m \times n)/k$  раз:

$$\tau = (\tilde{G}\alpha - u, \tilde{G}\alpha - u) / (\tilde{G}(\tilde{G}\alpha - u), \tilde{G}\alpha - u). \quad (6)$$

Ранее отмечалось, что решаемые СЛАУ являются плохо обусловленными  $M/m \gg 1$ , т.е. линии уровня целевой функции представляют собой вытянутые рассмотренных эллипсоиды [2]. Поэтому целесообразно использовать два критерия завершения итерационного процесса: 1)  $F2 = \|G\alpha - u\|_{L^2} \leq \delta$ ; 2)  $[F2(k) - F2(k - 1)] < 0.25\delta$ . В последнем случае при резком снижении скорости убывания минимизируемого квадратичного функционала  $F2$  вычислительный процесс заканчивается, что является типичной ситуацией для метода DG.

На примере данных гравиметрической съёмки в пределах листа карты О-40 (рис. 4) проведем сопоставление возможностей итерационных методов решения СЛАУ. При заданном пороговом значении  $\delta = 0.001$  мГал предусматривалось выполнение 25 итераций. Метод наискорейшего градиентного спуска обеспечил достижение значения  $F2 = 0.011$  мГал за время 37 мин 55 сек; модифицированный метод DG с расчётом шага спуска по матрице  $\tilde{G}$  (6) –  $F2 = 0.013$  мГал за 20 мин 27 сек (т.е. в 1.8 раз быстрее при  $R_0 = 30$  км); метод Зейделя –  $F2 = 0.003$  мГал за 20

мин 17 сек. Характеристику итерационных процессов для двух последних методов демонстрирует рис. 5. Среднеквадратическая погрешность определения аномалий Буге для конкретной съемки составляет 0.8 мГал и, как очевидно, при выборе реального значения  $\delta = 0.8$  мГал преимущество модифицированного метода DG в быстродействии за счет сходимости очевидно. Скорость при вычислении шага  $\tau$  по сравнению с «классическим» вариантом наискорейшего градиентного спуска возросла примерно в 40 раз.



**Рис. 5.** Характеристика итерационных процессов при решении СЛАУ методами Зейделя (красный цвет) и DG с ускоренным вычислением шага  $\tau$  (синий цвет): лист О-40

### Заключение

Метод аппроксимации геопотенциальных полей эквивалентными источниками находит все более широкое применение в мировой практике. Основными тенденциями его развития в настоящее время являются [11]:

- применение многоуровневых аппроксимационных конструкций, адаптированных к структуре сети задания исходных данных и морфологическим особенностям поля;
- развитие методов решения СЛАУ с числом неизвестных  $O(10^6)$ , направленное на снижение времени вычислений и повышение точности результатов;
- декомпозиция общей задачи истокообразной аппроксимации на ряд подзадач меньшей размерности;
- анализ краевых эффектов и борьба с их проявлениями;
- определение масс эквивалентных источников без решения СЛАУ (одномерная оптимизация, статистические зависимости);
- использование в процессе 3D-интерполяции данных полевых магнитометрических и гравиметрических измерений;
- применение для трансформации полей (продолжение в верхнее полупространство, подавление эффекта разновысотности путем пересчета на горизонтальную плоскость, пересчет на различные криволинейные поверхности – драппинг и т.п.);
- создание алгоритмов, учитывающих сферообразную форму Земли, предназначенных для построения глобальных и региональных моделей геофизических полей;
- аппроксимация данных многокомпонентных (в частности - градиентов силы тяжести при аэрогравиметрических работах) и разноуровневых полевых измерений.



Актуальными задачами являются совершенствование аппроксимационных конструкций (в плане их приближения к реальному распределению масс) и развитие методов решения «плохих» СЛАУ большой размерности. Успешное решение этих задач является важным фактором повышения точности и скорости преобразования цифровых моделей геопотенциальных полей. Определенные резервы для этого существуют, причем не только в области вычислительной математики и в сфере применения многопроцессорных систем.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и образования РФ в рамках соглашения по государственному заданию № 075-03-2021-374 от 29 декабря 2020 г. (рег. номер 122012000398-0).*

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аронов В.И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. – М.: Недра, 1990. – 301 с..
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 622 с.: ил.
3. Вайникко Г.М., Хямарик У.А. Проекционные методы и саморегуляризация в некорректных задачах // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 10 (281). – С. 3-17.
4. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. Справочник геофизика / под ред. В.И. Дмитриева. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Недра, 1990. – 498 с.
5. Гордин В.М., Михайлов Б.О., Михайлов В.О. Физические аспекты аппроксимации и фильтрации потенциальных полей // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1980. – № 1. – С. 78-93.
6. Долгаль А.С. Компьютерные технологии интерпретации гравитационного и магнитного полей в условиях горной местности: дис. ... д.ф.-м.н.: 25.00.10. – М., 2002. – 351 с.: ил.
7. Долгаль А.С. Оценка влияния формы поверхности измерений в методе истокообразной аппроксимации геопотенциальных полей // Горное эхо. – 2020. – № 2 (79). – С. 49-57. – DOI: 10.7242/echo.2020.2.10.
8. Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Ворошилов В.А. Совершенствование методики аналитической аппроксимации данных магниторазведки // Геофизика. – 2020. – № 5. – С. 31-38.
9. Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Пугин А.В. Алгоритмы аппроксимации геопотенциальных полей истокообразными функциями // Геофизика. – 2016. – № 5. – С. 4-10.
10. Долгаль А.С., Новикова П.Н., Осипова Е.Н., Пугин А.В., Рашидов В.А. «Томографическое преобразование» аномального магнитного поля с использованием сеточного распределения эквивалентных источников // Вестн. КРАУНЦ. Сер. Науки о Земле. – 2021. – № 1 (49). – С. 10-23. – DOI: 10.31431/1816-5524-2021-1-49-10-23.
11. Долгаль А.С., Пугин А.В., Новикова П.Н. История метода истокообразных аппроксимаций геопотенциальных полей // Физика Земли. – 2022. – № 2. – С. 3-26. – DOI: 10.31857/S0002333722020028.
12. Пугин А.В. Истокообразные аппроксимации геопотенциальных полей. От теории к практике // Геофизические исследования. – 2018. – Т.19, № 4. – С. 16-30. – DOI:10.21455/gr2018.4-2.
13. Результаты применения моделирования в рудной геофизике в различных районах Сибири / [сост. Н.А. Гладков и др.]; под ред. В.С. Моисеева, Г.Г. Ремпеля. – М.: Недра, 1988. – 219 с.: ил.
14. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев, Наук. думка, 1978. – 227 с.: ил.
15. Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э. Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. – М.: ИФЗ РАН, 2009. – 254 с.: ил.
16. Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике [Электронный ресурс]. – 2-е изд. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2014. – 216 с. – (Математическое моделирование).