Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы ФНИ, проект № 0422-2019-0146-С-02 (регистрационный номер темы НИОКТР: АААА-А18-118040690028-5)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Спасский Б.А. Учет верхней части разреза в сейсморазведке. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1990. – 181 с.
2. Козырев В.С., Жуков А.П., Коротков И.П., Жуков А.А., Шнеерсон М.Б. Учет неоднородностей верхней части разреза в сейсморазведке. Современные технологии. – М.: Недра, 2003. – 226 с.
3. Горелик Г.Д. Анализ кинематики волнового поля в задаче компенсации влияния рельефа поверхности области наблюдений // Геофизические методы исследования земли и ее недр: материалы X междунар. науч.-практ. конкурс-конф. молодых специалистов «Геофизика-2015». – СПб., 2016. – С. 22-29. – DOI: 10.13140/RG.2.1.2075.8005.

УДК 550.83.016 DOI:10.7242/echo.2021.1.15

НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

А.С. Долгаль
Горный институт УрО РАН, г. Пермь

Аннотация. Приводятся сведения из теории решения обратных задача гравиразведки и магниторазведки. Представлена базовая схема моделирования аномалиеобразующего объекта, включающая в себя скрытую, потерянную и ложную информацию. Предлагается альтернатива традиционному представлению результатов количественной интерпретации в виде единичного оптимального решения, отвечающего минимуму невязки наблюденного и модельного полей. Её основой является построение репрезентативного подмножества допустимых решений нелинейной обратной задачи и анализ его структуры. Новой математической формой результатов моделирования является «пакет информации», включающий в себя несколько оценочных функций, а также одну или несколько интерпретационных моделей, для выбора которых используются критерии принятия решений в условиях неопределенности.

Ключевые слова: гравиразведка, магниторазведка, обратная задача, источник, информация, множество допустимых решений, критерий, гарантированный подход, оценочная функция.

Введение

В области математического моделирования традиционно выделяются два класса задач: прямые и обратные. В первом случае при известных причинах требуется определить следствия, во втором случае нужно найти причины, приведшие к определенным следствиям. В большинстве случаев обратные задачи являются некорректно поставленными. Это означает, что для этих задач одно или несколько из трех условий корректности по Ж. Адамару (существование решения, его единственность решения и устойчивость) могут не выполняться.

Обратные задачи обычно формулируются в бесконечномерных пространствах, но ограничение на количество измерений и целесообразность вычисления конечного числа неизвестных параметров приводят к изменению задачи в дискретной форме. Рассмотрим задачу определения параметров группы геологических тел и/или границ по данным полевых гравиметрических наблюдений в дискретной постановке. Согласно Е.Г. Булаху, для этого требуется зафиксировать в аномальном поле силы тяжести n-мерный $\mathbf{V} = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ – совокупность вещественных чисел, расположенных в определенном порядке [5]. Исследователь может различным образом строить такие векторы. Можно говорить об определенном банаховом пространстве W, которое объединяет различные совокупности $\mathbf{V}$: $\mathbf{V} \in W$.

Затем нужно сформулировать гипотезу о распределении плотностных неоднородностей в изучаемом объеме геологической среды. Допустим, значения плотности, пространственное расположение и размеры геологических объектов характеризуются m-мерным вектором параметров $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, .., p_m\}$. Можно говорить о нормированном векторном пространстве Q, где каждой подобной гипотезе соответствует своя точка $\mathbf{P}$: $\mathbf{P} \epsilon Q$.

Пространства W и Q связаны между собой. Установлено некоторое правило (оператор), по которому для значений параметров среды однозначно определяются значения аномального гравитационного поля. В общем виде прямую задачу гравиразведки можно описать оператором, который каждой точке пространства Q ставит в соответствие определенную точку из пространства W:

$$\mathbf{V} = L(\mathbf{P}), \quad \mathbf{V} \epsilon W, \quad \mathbf{P} \epsilon Q. \tag{1}$$

Обратная задача состоит в том, чтобы по заданным значениям компонент V определить вектор P. Таким образом, обратная задача в операторной форме может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{P} = L^{-1}(\mathbf{V}), \; \mathbf{P} \epsilon Q, \; \mathbf{V} \epsilon W. \tag{2}$$

Элементы теории решения обратных задач

В математике обратные задачи подразделяются на линейные и нелинейные в соответствии с типом оператора L^{-1}. Линейный оператор может почленно применяться к сумме аргументов $L^{-1}(\mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^2) = L^{-1}(\mathbf{V}^1) + L^{-1}(\mathbf{V}^2)$, а скаляр c можно выносить за знак оператора $L^{-1}(c\mathbf{V}) = cL^{-1}(\mathbf{V})$. В гравиразведке и магниторазведке к линейным обратным задачам обычно относят те из них, где оценке подлежат физические характеристики изучаемых геологических объектов, а к нелинейным – обратные задачи, в которых искомыми являются их геометрические параметры. В первом случае оператор L^{-1} является матрицей. Если оператор $L^{-1}: V \to P$ инъективен, то существует множество приближенных решений обратной задачи [8]:

$$Q_\delta = \{\forall \mathbf{P}: \|\mathbf{V} - L(\mathbf{P})\| \leq \varepsilon\}. \tag{3}$$

На практике часто приходится иметь дело со смешанными постановками обратных задач для геопотенциальных полей: неизвестны как геометрические, так и физические характеристики источников поля. Такие задачи обычно не рассматриваются в математической теории решения некорректных задач, однако вполне могут решаться численными методами. Принцип их решения показан на рис. 1.

Существование решений обратной задачи, соответствующих одному аномальному полю, называют эквивалентностью. Если поля моделей совпадают с абсолютной точностью во всем внешнем пространстве, то эти модели называют теоретически эквивалентными. Можно сказать, что t-эквивалентность порождает отсутствие единственности решения обратных задач.

В соответствии с леммой П.С. Новикова, распределение масс, ортогональное к произвольной гармонической функции, не порождает внешнего поля. Пусть V – конечный объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью S, и в нем задано распределение масс с плотностью $\sigma(\xi,\eta,\zeta)$. Тогда, если для любой функции $U(\xi,\eta,\zeta)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа в объеме V и ограниченной на поверхности S, выполняется условие ортогональности $\iiint \sigma(\xi,\eta,\zeta)U(\xi,\eta,\zeta)dV = 0$, то данное распределение масс не порождает внешнего поля. Множество таких распределений масс имеет мощность континиума, т.е. бесконечно.

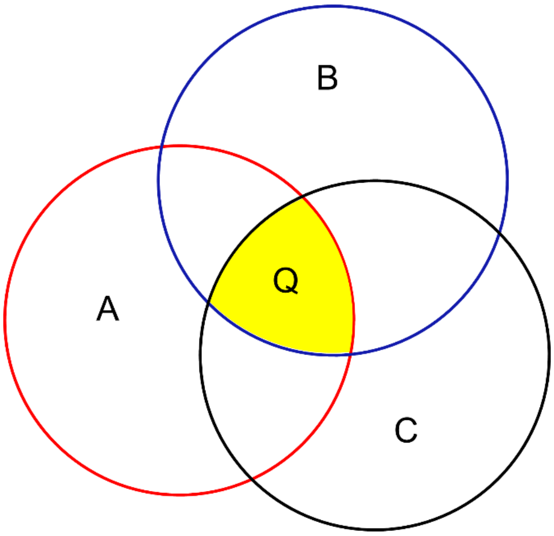

Рис. 1. Диаграммы Эйлера, иллюстрирующие решение смешанной обратной задачи: множества допустимых решений: A –отвечающее ограничениям на физические параметры источников; B – отвечающее ограничениям на геометрические параметры источников; C – отвечающее ограничениям на невязку наблюденного и модельного полей ε. Желтым цветом выделены множество искомых решений $Q = A \cap B \cap C$

В реальных физико-геологических условиях широко проявляется т.н. практическая эквивалентность, когда разные модели источников $\mathbf{P} \in Q_\delta$ создают очень близкие, но не абсолютно совпадающие внешние поля (3). Практическая эквивалентность, которую еще иногда называют ε-эквивалентностью, порождает неустойчивость решения обратных задач.

В середине XX столетия российский математик Андрей Николаевич Тихонов разработал основы теории решения некорректно поставленных задач. Он ввёл в решение обратной задачи метод регуляризации, который был основан на приближении некорректно поставленной задачи некоторой последовательностью корректно поставленных задач. Получение приближенного решения обратной задачи (2), устойчивого к помехам в наблюденном поле, сводится по А.Н. Тихонову, к построению регуляризующего оператора $L^{-1}: V \to P$ и последующему определению параметра регуляризации α по априорной информации [7]. Выполняется минимизация многопараметрического функционала:

$$F(\mathbf{P}) = \|\mathbf{V} - L(\mathbf{P})\|^2 + \alpha\|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0\|^2, \qquad (4)$$

где $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ – параметр регуляризации, зависящий от точности задания интерпретируемого поля, $\mathbf{P}_0$ – фиксированный элемент пространства Q. Решение уравнения (4) существует и единственно при любом уровне помех ε, при $\varepsilon \to 0$ оно стремится к точному.

Возможность построения устойчивого среднего квадратического приближения к решению обратной задачи (2) легла в основу множества компьютерных технологий количественной интерпретации геопотенциальных полей, обеспечивших получение новой геологической информации. Использование гипотезы о нормальном законе распределения помех в интерпретируемом поле $\mathbf{V}_\varepsilon$ позволяет считать наилучшим решением обратной задачи вектор параметров $\mathbf{P}_\delta^{\text{опт}}$, отвечающий минимуму функционала $F(\mathbf{P})$. Принято считать, что вектор оценок параметров модели источников поля является безальтернативной математической формой представления результатов количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

В чем состоит неопределенность результатов интерпретации?

Однако какими бы замечательными свойствами (в нашем случае – свойством оптимальности) ни обладал элемент множества (в нашем случае – единичное приближенное решение обратной задачи), он не способен *сколь-нибудь полно* представить собой все множество (в нашем случае – множество допустимых решений Q_δ). Как правило, наше интуитивное представление об информативности результатов интерпретации каким-то образом связано с «остаточной» неопределенностью, которая остается после получения ее результатов. Можно процитировать Клода Шеннона, которому принадлежит следующее, не претендующее на полноту понятие: «информация – это снятая неопределенность наших знаний о предмете исследования». В таком случае под информацией, которую несет в себе построенная модель источника поля S^*, логично считать его фрагмент S_0^*, одновременно являющийся и фрагментом истинного носителя $\widehat{S}$: $S_0^* \subseteq S^* \cap \widehat{S}$. Меру Лебега $\mu(S_0^*)$ можно принять за меру *достоверной* информации, которую несет приближенное решение в конкретных условиях интерпретации. Если область S_0^* указать невозможно (она существует, но не известно, где именно располагается в пространстве), логично назвать ее *скрытой достоверной* информацией об изучаемом объекте. Область $S^*/\hat{S}$, которая представляет собой предполагаемый фрагмент аномалиеобразующего объекта, но в действительности им не является, назовем *ложной* информацией. Фрагмент $S^*/\hat{S}$ области, заполненной возмущающими массами, но не нашедшей отражения в решении S^* обратной задачи, можно считать *потерянной* информацией (рис. 2). Отчетливо просматриваются аналогии между потерянной информацией и ошибкой I рода, ложной информацией и ошибкой II рода. Однако предлагаемые информационные параметры являются чисто детерминистскими характеристиками, в отличии от вероятностных оценок соответствующих ошибок.

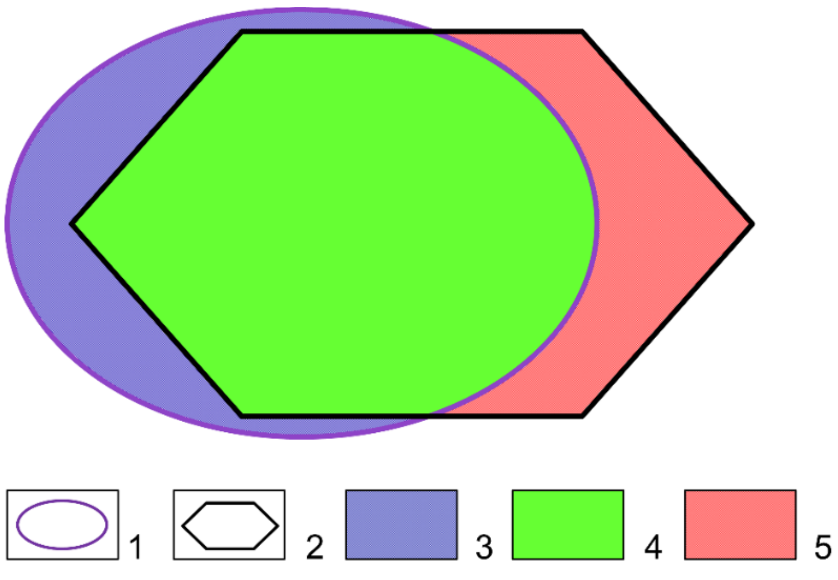

Рис. 2. Информационная модель, отражающая взаимосвязь аномалиеобразующего объекта и решения обратной задачи гравиразведки: 1 - геологический объект (источник поля); 2 – модель объекта (результат интерпретации); информация: 3 - потерянная, 4 - скрытая достоверная, 5 – ложная

Выбор критерия интерпретации

Решение задачи (2) в рамках концепции методов автоматизированного подбора всегда связано с противоречием, возникающем при попытке представить множество ее допустимых решений Q_δ одним из его элементов $\mathbf{P}_\delta^{\text{опт}}$. Эта концепция по своей сущности не предполагает суммирование информации, которую несут все решения из множества Q_δ. Развитие этого подхода обычно связывается с учетом новых типов априорных ограничений (актуальность этой проблемы не подвергается сомнению) и выявлением более эффективных критериев выбора оптимального решения из множества Q_δ. В.И. Гольдшмидт заметил, что «… выбор критерия интерпретации – наименее изученный и наиболее сложный вопрос в теории количественной интерпретации» [6].

Приведем простой пример, свидетельствующий о принципиальной ограниченности традиционной математической формы представления результатов интерпретации и о целесообразности использования всей информации, заключенной в множестве Q_δ. На рис. 3 схематически представлена ситуация, возникающая в случае, когда модель источников поля описывается двумя параметрами – p_1 и p_2, и $S = S(p_1, p_1)$ – произвольное допустимое решение обратной задачи из множества Q_δ. Пусть $p_1 = \hat{p}_1$ и $p_2 = \hat{p}_2$ – значения параметров истинного решения $\hat{S} = \hat{S}(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ обратной задачи, а точность приближенного решения $S^* = S^*(p_1^*, p_2^*)$ оценивается в евклидовой метрике $\rho(S^*, \hat{S}) = (p_1^* - p_1)^2 + (p_2^* - p_2)^2$. Предположим, что сравнению между собой подлежат два метода решения обратной задачи – A_1 и A_2, по которым оптимальными являются решения S_1^* и S_2^*, соответственно. При этом вид используемых критериев оптимальности не конкретизируется и потому последующий вывод инвариантен относительно их структуры.

Нетрудно понять, что где бы в пределах множества допустимых решений Q_δ ни располагались эти два решения, найдутся непустые открытые непересекающиеся подмножества Q_1 и Q_2 (объединение которых совпадает с множеством Q_δ) такие, что: если $\hat{S} \in Q_1$, то решение S_1^* превосходит по точности решение S_2^*, а если $\hat{S} \in Q_2$, то более предпочтительным по точности является решение S_2^*. Ясно, что аналогичная картина будет иметь место при любой параметрической размерности интерпретационной модели. Следовательно, возможность повышения точности решения обратной задачи за счет более удачной структуры скалярного критерия оптимальности F является весьма проблематичной.

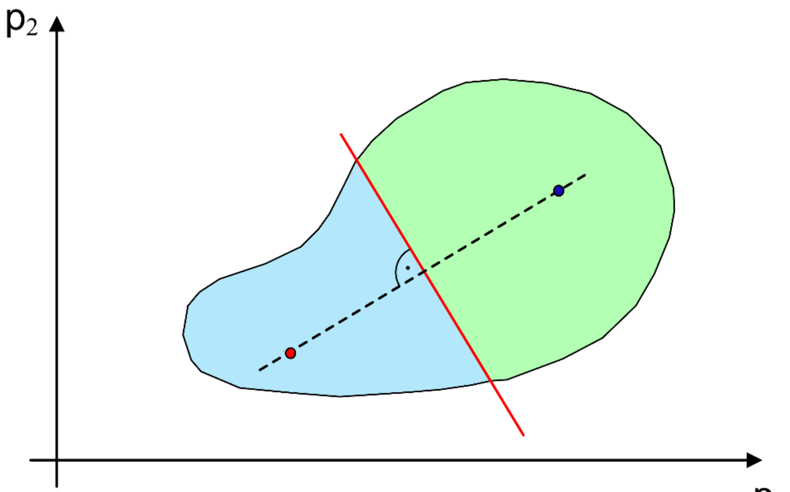

Рис. 3. Иллюстрация эквивалентности двух алгоритмов решения обратной задачи A_1 и A_2 по критерию $\rho(S^*, \hat{S})$ гарантированного превосходства точности результата: 1 – S_1^*, 2 – S_2^*, 3 – Q_1, 4 – Q_2

Новые математические формы представления результатов

Решение задачи многомерной оптимизации (4) с ограничениями на результативные параметры в виде системы равенств и неравенств еще 20-30 лет назад требовало достаточно больших вычислительных ресурсов. Возможности современных компьютеров позволяют сравнительно легко сформировать подмножество допустимых решений обратной задачи $Q_o \subset Q_\delta$, содержащее до 1000 элементов и более. Эффективным инструментом для построения подмножества Q_o является монтажный метод [3]. Чисто детерминистским подходом к анализу структуры Q_o является гарантированный подход, использующийся с целью построения геологически содержательных инвариантов [2]:

1) в рудной обратной задаче – максимальный общий фрагмент D_2 всех допустимых носителей S^* модельных возмущающих масс, и минимальную область пространства D_1, содержащую эти массы;

2) в линейной обратной задаче гравиразведки для модели источников аномалии в виде априори зафиксированного «набора» призм $S_k, k = 1,2,..,m$ – общие двухсторонние оценки σ_k^{min} и σ_k^{max} для допустимых значений эффективной плотности σ_k^* каждой из этих призм.

3) в структурной обратной задаче для границы раздела $\hat{\varphi}(x)$, $x \in [a,b]$ – внутреннюю $\varphi_2^*(x)$ и внешнюю $\varphi_1^*(x)$ огибающие семейства всех допустимых границ $\varphi^*(x)$, характеризующих предельные (минимальную и максимальную) глубины их залегания в каждой точке интервала $[a,b]$.

Развитие гарантированного подхода позволяет провести оценку вероятности p наличия возмущающих масс в пределах области $D_1 \backslash D_2$. Путем прямой проверки для каждого «элементарного» объема ω_i геоплотностной среды можно установить число m_i построенных носителей $S_m \in Q_0$, фрагментом которых он является. Если неизвестный истинный носитель масс $\hat{S}$ находится среди этих носителей, то $\omega_i \subset \hat{S}$. Соответственно, частоту, с которой среди всех n найденных допустимых решений обратной задачи встречаются те, которые включают в себя область ω_i, можно принять за оценку искомой вероятности $p_i = m_i/n$. Функцию пространственных координат $\lambda(\omega) = p(x,y,z)$ с областью определения [0,1] назовем функцией локализации, характеризующей структуру множества Q_0. Можно предложить и другие похожие по смыслу характеристики: функции гарантии, доверия и обнаружения [2]. Следует заметить, что оценочные функции представляют интерес в первую очередь для решения поисковых задач. Достаточно идентифицировать с высокой достоверностью один из фрагментов области S^*, занятой возмущающими массами, чтобы затем выбрать местоположение и глубину буровой скважины.

Для решения картировочных задач из множества Q_0 с использованием разных подходов (критериев Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица для принятия решений в условиях неопределенности), можно выбрать несколько частных решений обратной задачи $S_{\text{опт}}^*$, каждое из которых будет являться предположительно наиболее информативным относительно всех прочих [1]. Процедуры выбора базируются на оценке степени пространственной близости интерпретационных моделей и предполагают равную вероятность соответствия каждой из них реальным источникам поля [4]. В этом их принципиальное отличие от скалярных критериев оптимальности, о которых было сказано выше.

В качестве новой математической формы представления результатов решения нелинейной обратной рудной задачи гравиразведки (в т.ч. и смешанной) предлагается использовать «пакет информации», включающий в себя несколько оценочных функций $\lambda(\omega)$, а также одну или несколько интерпретационных моделей

$S^*_{\text{опт}}$, отвечающих выбранным критериям оптимальности. Это представление обеспечивает не только выявление скрытой информации, но и приближенную оценку точности интерпретации. На рис. 4 приведен простой пример новой математической формы.

Существует принцип дополнительности, сформулированный Нильсом Бором в 1927 г, согласно которому для полного описания квантово-механических явлений необходимо применять два взаимоисключающих («дополнительных») набора классических понятий, совокупность которых даёт исчерпывающую информацию об этих явлениях. В дальнейшем появилась концепция дополнительности, охватывающая не только физику, но и биологию, психологию, культурологию и др. гуманитарные науки. С методологических позиций предлагаемые математически формы представления результатов интерпретации геопотенциальных полей могут рассматриваться, как еще одно естественно-научное воплощение данной концепции.

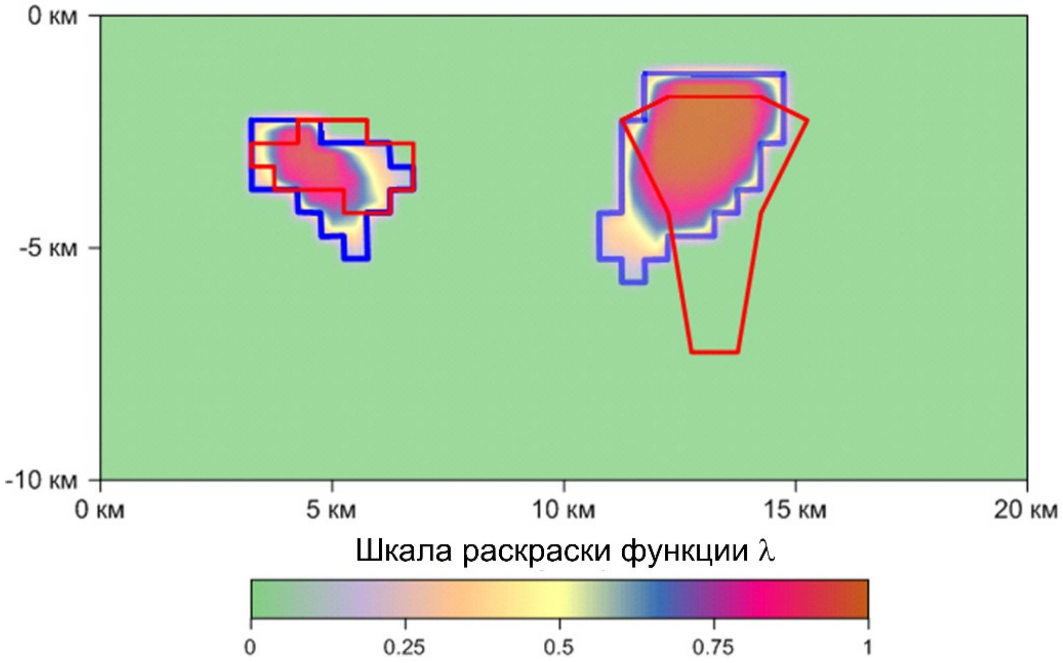

Рис. 4. Новая математическая форма представления результатов интерпретации гравитационного поля для модели двух интрузивных тел: пространственное распределение функции локализации $\lambda(\omega)$, совмещенное с частным решением обратной задачи $S^*_{\text{опт}}$, отвечающим критерию Лапласа. Примечание: красный контур – аномалиеобразующие объекты; синий контур – результат решения обратной задачи

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 18-05-70094 «Ресурсы Арктики».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Балк П.И., Долгаль А.С. Обратные задачи гравиразведки как проблема принятия решения в условиях неопределенности и риска // Физика Земли. 2017. №2. С. 45–61.
2. Балк П.И., Долгаль А.С. Аддитивные технологии решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки. М., Научный мир. 2020. 455 с.
3. Балк П.И., Долгаль А.С. Трехмерные монтажные технологии интерпретации гравиметрических данных // Доклады РАН. 2009.Т. 427. № 3. С. 380–383.
4. Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Минимаксный подход в обратных задачах геофизики // Физика Земли. 2016. № 2. С. 96–108.

5. Булах Е.Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наук. думка, 2010. 463 с.
6. Гольдшмидт В.И. Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. М.: Недра. 1984. 184 с.
7. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Курс. 2017. 400 с.
8. Ягола А.Г., Ван Янфей, Степанова И.Э., Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний. 2014. 216 с.

УДК 550.831.017 DOI:10.7242/echo.2021.1.16

РАЗВИТИЕ ВЕКТОРНЫХ МЕТОДОВ ТРАНСФОРМАЦИИ ГЕОПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ

Г.В. Простолупов
Горный институт УрО РАН, г. Пермь

Аннотация: Рассмотрены методы векторной гравиметрии «Вектор» и «Полюс», разработанные в лаборатории геопотенциальных полей, а также некоторые теоретические аспекты полярного метода, находящегося в состоянии развития. Приведены примеры и сравнение двух методов на моделях геоплотностных разрезов. Оценены их возможности при локализации отрицательных разуплотнений в диапазоне глубин водозащитной и продуктивной толщ ВКМКС и некоторые различия при решении обратной задачи гравиметрии.

Ключевые слова: гравиметрия, аномалия, вектор, градиент, трансформация, разуплотнение.

В лаборатории геопотенциальных полей с 1990 гг. ведется развитие методов гравиметрии, заложенных В.М. Новоселицким, основанных на вычислении и трансформации векторов потенциала поля. На первом этапе расчет проводился на калькуляторах, векторы вырисовывались на бумаге и сопоставлялись с геологической обстановкой. С появлением ЭВМ появилась программа «Вектор», которая непрерывно совершенствовалась. Настоящим прорывом стала идея размещения составляющих векторного разложения на вертикальной оси с интерполяцией между горизонтальными плоскостями, и получением 3D куба – позже подобные разложения получили название томографических методов. Подобное было сделано и программно реализовано одними из первых не только в нашей стране, но и в мировой практике, также проработаны теоретическое обоснование, осмысление и вопросы геологической интерпретации трансформант. Первые версии программы «Вектор» были разработаны в операционной системе DOS.

В целом к векторным можно отнести методы, в которых обнаружение искомого аномального объекта (его координаты, размер, избыточная плотность, масса) в той или иной степени связаны с анализом направлений и величин скорейшего изменения потенциала силы тяжести и его производных в пространстве.

С 2000 годов началась адаптация системы «Вектор» к новым требованиям ОС Windows. Это привело к полному переустройству внешнего вида программы, ее рабочей области, однако функциональное наполнение сохранилось и усложнилось. Базовые элементы технологии – горизонтальные градиенты силы тяжести – стали вычисляться не только при помощи численных методов и триангуляционной сети, но и аналитически, при помощи истокообразных аппроксимаций. Новый программный модуль «Вектор» позволил обрабатывать геопотенциальные поля (гравитационные, магнитные) с применением векторных технологий, истокообразных аппроксимаций и полярных трансформаций.