

5. Земсков А.Н., Кондрашев П.И., Травникова Л.Г. Природные газы калийных месторождений и меры борьбы с ними. – Пермь: Тип. Купца Тарасова, 2008. – 412 с.: ил., табл.
6. Андрейко С.С., Иванов О.В., Нестеров Е.А., Литвиновская Н.А. Исследование газоносности продуктивных калийных пластов на новых участках шахтных полей калийных рудников ОАО «Уралкалий» и ОАО «Сильвинит» // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2010. – № 4. – С. 186-190.
7. Андрейко С.С., Иванов О.В., Нестеров Е.А., Головатый И.И., Береснев С.П. Исследование газоносности соляных пород третьего калийного пласта на шахтном поле Краснослободского рудника // Горн. журн. – 2013. – № 6. – С. 69-73.
8. Андрейко С.С., Лукьянец Е.В. Анализ факторов газоносности и тектонического строения сильвинитовых пластов в надвиговых и сдвиговых зонах шахтных полей рудников БКПРУ-2 и БКПРУ-4 ПАО «Уралкалий» // Вестн. Кузбасского гос. технич. ун-та. – 2017. – № 6. – С. 31-41.
9. Андрейко С.С., Бобров Д.А., Нестеров Е.А., Лукьянец Е.В. Оценка газоносности и газодинамических характеристик пород соляных и глинисто-карбонатных пачек на шахтном поле рудника второго рудоуправления ОАО «Беларуськалий» // Недропользование. – 2020. – Т. 20, № 3. – С. 270-279. – DOI: 10.15593/2712-8008/2020.3.7.
10. Андрейко С.С., Иванов О.В., Лялина Т.А., Нестеров Е.А. Газоносность по свободным газам пород сильвинитовой и сильвинито-карналлитовой зон Верхнекамского месторождения // Горная промышленность. – 2021. – № 4. – С. 125-133. – DOI: 10.30686/1609-9192-2021-4-125-133.
11. Андрейко С.С., Чайковский И.И., Нестеров Е.А., Папулов А.С. Экспериментальные исследования газоносности пластов сильвинит-карналлитового состава в условиях Верхнекамского месторождения калийно-магниевых солей // Горный журнал. – 2023 – № 11. – С. 89-93. – DOI: 10.17580/gzh.2023.11.15.
12. Иванов О.В. Оценка газоносности пластов А, Б, В, КРІ, КРІІ, КРІІІ по связанным газам в скважинах на шахтном поле южного рудника СКРУ-2 ПАО «Уралкалий» // Горное эхо. – 2021. – № 1 (82). – С. 109-115. – DOI: 10.7242/echo.2021.1.20.

УДК 622.4

DOI:10.7242/echo.2025.3.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ АСИММЕТРИЧНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ ДИСПЕРСИИ ВРЕДНЫХ ПРИМЕСЕЙ В ГОРНЫХ ВЫРАБОТКАХ

М.А. Семин

Горный институт УрО РАН, г. Пермь

Аннотация: Рассмотрено моделирование переноса вредных примесей в системах горных выработок с учётом асимметрии продольной дисперсии. Показано, что классическое одномерное конвективно-диффузионное уравнение не отражает наблюдаемую несимметрию фронта примеси, возникающую из-за неоднородности поля скоростей воздушного потока. Для корректного описания эффекта продольной дисперсии предложено использовать подход аномальной диффузии. Рассмотрены три варианта его реализации: применение фракционных производных, учёт анизотропной дисперсии и введение временного запаздывания. Сравнение показало, что последний подход наиболее адекватно описывает асимметричный характер распространения примеси вдоль выработки.

Ключевые слова: рудничная вентиляция, продольная дисперсия, аномальная диффузия, фракционное дифференцирование, анизотропная дисперсия.

Перенос концентрации вредных примесей C (а также других скалярных характеристик потока) по произвольным системам горных выработок в рудничной вентиляции обычно описывается с использованием одномерного конвективно-диффузионного уравнения [1, 2]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial CU}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где t – время, x – координата по пространству, U – средняя скорость потока воздуха в сечении горной выработки, а D – коэффициент продольной дисперсии.

Уравнение (1) следует из более общего трёхмерного уравнения переноса скалярных пассивных примесей

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c u}{\partial x} = \nabla \cdot (D_t \nabla c), \quad (2)$$

записанного для условий, когда только одна из компонент усредненного по Рейнольдсу поля скорости является ненулевой – компонента u , направленная вдоль оси x . Здесь D_t – турбулентная вязкость, отличная от коэффициента дисперсии в (1), $c = c(t, x, y, z)$ – функция, описывающая трехмерное поле концентраций в объеме горной выработки (в отличие от функции $C = C(t, x)$, которая описывает усредненные по поперечному сечению концентрации вдоль оси выработки), $u = u(x, y, z)$ – трехмерное распределение компоненты скорости воздушного потока, сонаправленной с осью выработки.

Несмотря на то, что поле скорости имеет одну ненулевую компоненту, оно существенно неоднородно в поперечном сечении. Особенно сильная неоднородность наблюдается вблизи стенок, где выполняется условие прилипания потока. Эта неоднородность поля скорости вызывает соответствующую неоднородность поля концентрации.

Это неявным образом учитывается в диффузионном слагаемом в (1) справа, где коэффициент продольной дисперсии D много выше турбулентной диффузии и определяется в основном вкладом так называемой Тейлоровской дисперсией [3, 4]. Однако гипотеза о том, что пространственная неоднородность поля скорости воздушных потоков может быть описана по аналогии с молекулярной и турбулентной диффузией с помощью диффузионного слагаемого вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right)$$

имеет определенную погрешность. Если провести операцию усреднения уравнения (2) в поперечном сечении горной выработки, то получится не уравнение (1), а несколько иное выражение, где справа присутствует дополнительное слагаемое, зависящее от величин δc и δu , характеризующих, соответственно, отклонения концентраций и скоростей потока от своих средних значений в поперечном сечении [5]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(D_t \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S} \int_S \delta c \delta u dS \right), \quad (3)$$

где S – поперечное сечение горной выработки.

Интеграл в (3) по размерности представляет собой дополнительный эффективный поток примеси, обусловленный неравномерностью скоростей и концентраций. Он описывает эффект «обгона» быстрых слоёв медленными, формируя асимметрию фронта загрязнения.

Поскольку (3) содержит две неизвестные функции $\delta c = \delta c(t, x, y, z)$ и $\delta u = \delta u(t, x, y, z)$, решение в таком виде затруднительно. Поэтому на практике этот член заменяют диффузионным аналогом из (1), что математически удобно, но физически приводит к потере асимметрии переноса.

В качестве примера, демонстрирующего ограниченность подхода (1) можно рассмотреть ситуацию турбулентного течения воздуха с примесью в длинном канале кругового профиля радиусом R . Для описания профиля скорости турбулентного потока в таких каналах часто используется приближенная формула, основанная на степенном законе. Скорость в канале зависит от расстояния r от оси трубы. Этот профиль описывается следующим образом:

$$u(r) = u_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^n \right]. \quad (4)$$

Здесь n – показатель степени (обычно для турбулентного режима равен около 7), u_{max} – максимальная скорость в сечении канала. Если принять, что

$$u_{max} = U \frac{2+n}{n}, \quad (5)$$

то средняя по сечению скорость воздуха U в канале будет равна единице при любом $n > 0$.

Пусть начальное распределение концентрации имеет вид:

$$c(0, x, y, z) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ C_0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

где C_0 – начальная концентрация.

Принимается, что в начальный момент концентрация зависит только от одной пространственной координаты (x), а в точке $x = 0$ поле концентрации имеет разрыв. Сам канал считается неограниченно протяженным по обоим направлениям вдоль оси x . Задачу о «размытии» существующего в начальный момент разрыва поля концентрации в результате эффекта продольной дисперсии будем решать в предположении об отсутствии диффузионного слагаемого в уравнении (2), которое в этом случае редуцируется до простого адвективного уравнения:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial cu}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

Исключение молекулярной и турбулентной диффузии трехмерного потока важно с целью выделения эффекта дисперсии, а также для упрощения выкладок.

Задача Коши (6)-(7) допускает аналитическое решение. Его анализ удобно проводить в терминах средней по поперечному сечению выработки концентрации C . Если рассматривать систему координат,двигающуюся вместе с потоком с его средней скоростью U , то величина C рассчитывается так:

$$C = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r c dr = \frac{C_0}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r \theta(u(r)t - Ut - x) dr, \quad (8)$$

где θ – функция Хэвисайда.

На рис. 1а представлены распределения безразмерной средней концентрации C/C_0 при различных значениях параметра n . По оси абсцисс отмечена безразмерная координата x/L ($L = Ut$ – расстояние, на которое переместился поток за время t ,двигающийся со средней скоростью U).

Из рис. 1а видно, что рассчитанные поля безразмерной средней концентрации C/C_0 существенно отличаются от начального распределения (6) – изначальный скачок концентрации в точке $x = 0$ стал более размытым. Степень размытия существенно зависит от величины n , определяющей профиль поперечной скорости потока.

Поле безразмерной средней концентрации C/C_0 во всех рассмотренных случаях существенно несимметрично относительно плоскости $x = 0$ – это связано с несимметричностью профиля скорости воздушного потока относительно его среднего значения U .

Вместе с тем, если бы мы учитывали дисперсионное размытие поля концентрации в рамках подхода (1), то полученные поля безразмерной средней концентрации C/C_0 во всех рассмотренных случаях были бы симметричными относительно плоскости $x = 0$ (рис. 1б) – это следует из свойств решения одномерного уравнения диффузии. Четыре различные кривые на рис. 1б соответствует четырем различным временам t .

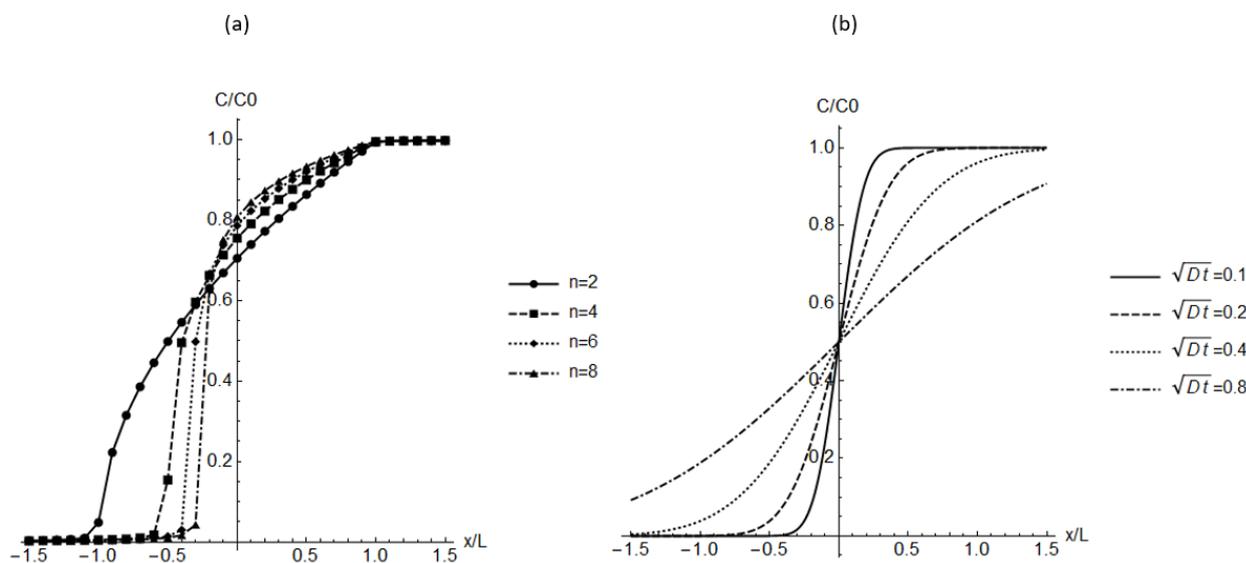


Рис. 1. Зависимости средней концентрации примеси в поперечном сечении от безразмерной продольной координаты вдоль оси выработки: (а) – точное решение конвективного уравнения с учетом степенного профиля скорости воздуха, (б) – решение конвективно-диффузионного уравнения с учетом диффузионного члена (1) и однородной по сечению скорости U

Зависимости безразмерной средней концентрации C/C_0 в области $x > 0$ (выше по потоку относительно начала координат) на рис. 1а для переходного и турбулентного режимов течения ($n > 2$) в целом можно считать экспоненциальными и приближенно описывать с помощью диффузионного слагаемого (1), однако аналогичный вывод нельзя сделать для области $x < 0$ (ниже по потоку).

Классическое решение одномерного уравнения диффузии предсказывает, что ниже по потоку концентрация примеси будет меняться по закону, схожему с тем, что имеет место в области выше по потоку. При этом фактическое распределение безразмерной средней концентрации C/C_0 в области $x < 0$ будет иметь другую кривизну и достаточно быстро снижаться до нуля, особенно в сильно развитых турбулентных потоках при относительно больших n . Т.е. дисперсия примеси в этой области выражена крайне слабо.

Для учёта такой асимметрии можно перейти в уравнении (1) от классического диффузионного члена к т.н. «аномальной» диффузии [6]. Можно выделить несколько подходов по модификации диффузионного слагаемого в уравнении (1) для более корректного описания Тейлоровской дисперсии:

- 1) фракционное (дробное) дифференцирование;
- 2) анизотропная дисперсия;
- 3) введение временного запаздывания.

В рамках первого подхода слагаемое справа в уравнении (1) заменяется на асимметричный оператор диффузии [6, 7]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial CU}{\partial x} = D \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\partial^\alpha C}{\partial x^\alpha} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \frac{\partial^\alpha C}{\partial (-x)^\alpha} \right], \quad (9)$$

где α – порядок дробной (фракционной) производной ($2 \geq \alpha \geq 1$), а параметр β характеризует в каком направлении (по потоку или против потока) преимущественно действует дисперсия. При $-1 \leq \beta \leq 0$ действие дисперсии смещено в направлении вверх по потоку, а при $0 \leq \beta \leq 1$ – в направлении вниз по потоку.

Проведённый анализ показал, что введение дробных производных в уравнение переноса (1) действительно создаёт математически асимметричное решение. Однако физически этот эффект в основном выражается в смещении поля концентрации вверх или вниз по потоку, не затрагивая внутреннюю структуру процесса перемешивания (см. рис. 2а). На рисунке показано, как со временем происходит размытие границ «облака» вредной примеси, заданного в момент времени $t = 0$ в виде ступенчатой функции. Штриховой линией показано решение классического уравнения (1), а сплошной линией – уравнения (9).

Следовательно, данный подход не отражает фактические механизмы дисперсии, показанные на рис. 1а.

В рамках подхода анизотропной дисперсии в слагаемом справа уравнения (1) учитывается различие коэффициентов дисперсии по потоку и против потока:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial CU}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_+ \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_+ + D_- \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_- \right], \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_+ = \max \left(\frac{\partial C}{\partial x}; 0 \right), \quad \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_- = \min \left(\frac{\partial C}{\partial x}; 0 \right), \quad (11)$$

где D_+ – коэффициент дисперсии по потоку, D_- – коэффициент дисперсии против потока.

Такой подход позволяет описать не только смещение поля концентрации вверх или вниз по потоку, но и различную скорость изменения наклона кривой $C(t)$. Иными словами, при распространении «облака» вредной примеси размытие его передней и задней границ происходит с разной скоростью (см. рис. 2б), хотя форма участков нарастания и спада концентрации остаётся схожей.

Более сложный подход, полностью отходящий от уравнения (1), связан с введением временного запаздывания для поля концентрации C . В этом случае уравнение (1) заменяется системой:

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} + \frac{\partial C^* U}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{D}{S} \frac{\partial C}{\partial t} = C^* - C, \quad (13)$$

где из уравнения (12) сначала определяется распределение переменной C^* вдоль выработки, отражающее чисто адвективный перенос примеси, а затем с помощью уравнения (13) учитывается эффект дисперсии. Здесь S – площадь поперечного сечения горной выработки.

Подход (12)-(13) позволяет корректно описывать различный характер дисперсии примеси по потоку и против потока как качественно, так и количественно, что наглядно видно из рис. 2в.

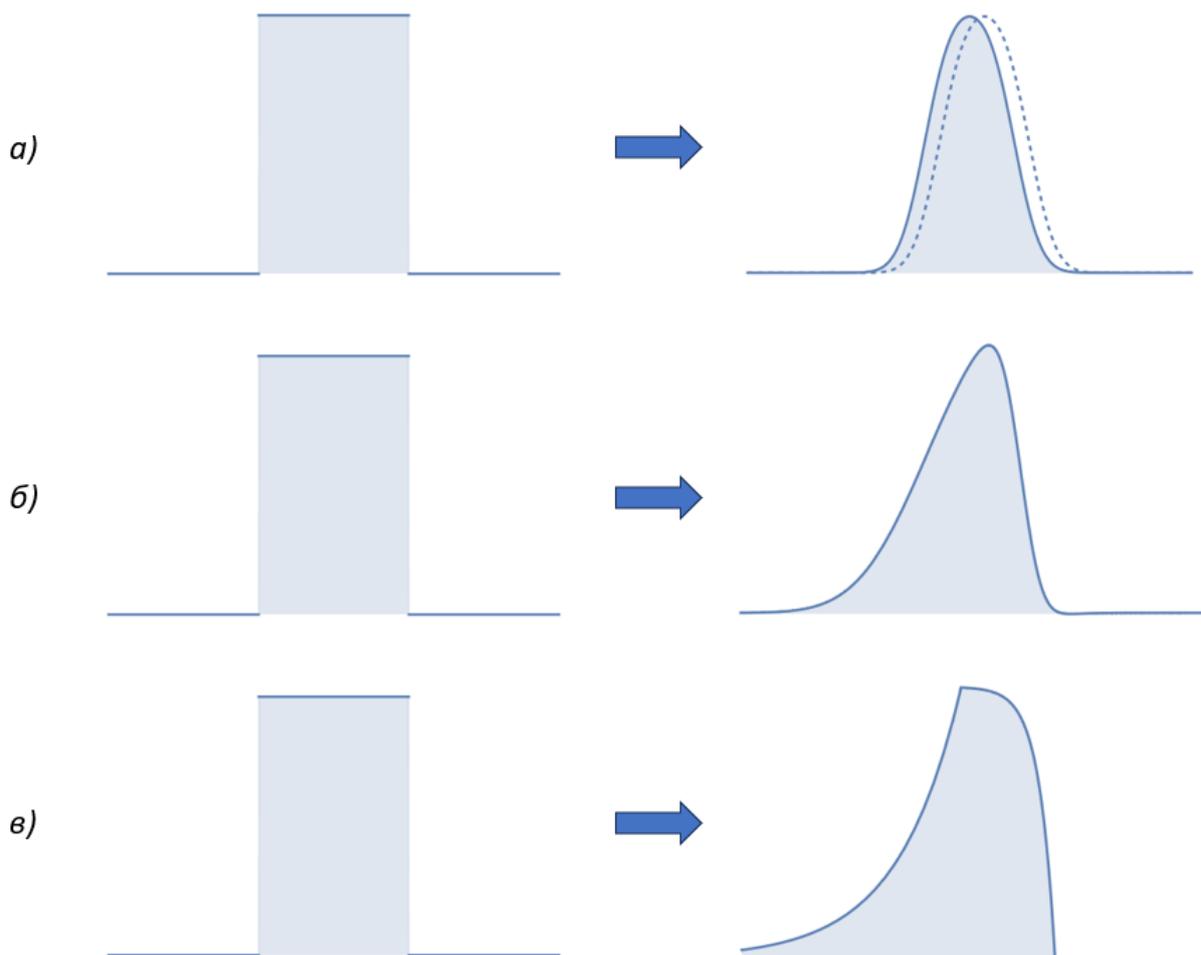


Рис. 2. Подходы аномальной диффузии: а) – фракционное (дробное) дифференцирование, б) – анизотропная дисперсия, в) – введение временного запаздывания

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Качурин Н.М., Мохначук И.И., Поздеев А.А., Стась Г.В. Математические модели газовыделения и диффузионного переноса газовых примесей на очистных участках шахт и рудников // Изв. Тульского гос. ун-та. Технич. науки. – 2013. – № 4. – С. 195-206.
2. Ольховский Д.В., Паршаков О.С., Бублик С.А. Исследование динамики газовой обстановки подземных выработок после проведения взрывных работ // Горные науки и технологии. – 2023. – Т. 8, № 1. – С. 47-58. – DOI: 10.17073/2500-0632-2022-08-86.
3. Семин М.А., Исаевич А.Г., Трушкова Н.А., Бублик С.А., Казаков Б.П. К вопросу о расчете распространения вредных примесей в системах горных выработок // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 2022. – № 2. – С. 82-93. – DOI: 10.15372/FTPRPI20220208.
4. Трушкова Н.А., Бублик С.А. Расчет распространения газовых примесей в горных выработках на основе модели конвективно-диффузионного переноса // Горное эхо. – 2021. – № 3 (84). – С. 110-117. – DOI: 10.7242/echo.2021.3.20.
5. Красноштейн А.Е., Файнбург Г.З. Диффузионно-сетевые методы расчета проветривания шахт и рудников / УрО РАН. – Екатеринбург, 1992. – 244 с.: ил.
6. Taylor dispersion and anomalous diffusion // Jou D., Casas-Vázquez J., Criado-Sancho M. Thermodynamics of Fluids Under Flow. – Second Edition. – Dordrecht : Springer Netherlands, 2010. – С. 187-209.
7. Sousa E. Finite difference approximations for a fractional advection diffusion problem // Journal of Computational Physics. – 2009. – V. 228, № 11. – P. 4038-4054. – DOI: 10.1016/j.jcp.2009.02.011.