

# ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ НЕДР

УДК 550.8.053

DOI:10.7242/echo.2025.3.4

## ПРИМЕНЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ПОЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗЕМЛИ

А.С. Долгаль

*Горный институт УрО РАН, г. Пермь*

**Аннотация:** Усовершенствована методика трансформации региональных аномалий силы тяжести, базирующаяся на моделировании поля эквивалентными источниками (точечными массами), применительно к полярным областям Земли. Значения точечных масс определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений регуляризованным методом сингулярного разложения (SVD). Методика обеспечивает устойчивое вычисление трансформант в высокоширотных областях Земли, что подтверждается представленными результатами по территории с координатами 54°-72° с.ш., 84°-132° в.д. с размером около 5.15 млн. кв. км, которая включает в себя Сибирскую платформу и структуры ее обрамления.

**Ключевые слова:** гравитационное поле, глобальные модели, трансформация, аппроксимация, эквивалентные источники, система линейных уравнений, сингулярное разложение, Сибирская платформа.

### Введение

Полярные области Земли – это территории, расположенные на крайнем севере и крайнем юге нашей планеты и занимающие в совокупности примерно 1/12 ее поверхности. Моделирование аномалий силы тяжести набором эквивалентных источников в этих регионах при широко используемом представлении исходной информации в узлах регулярной сети (GRID-данные) имеет специфические сложности. При одинаковом шаге задания поля по широте  $B$  и долготе  $L$  (в градусной мере) за счет уменьшения длины параллелей расстояния между точками (в линейной мере) в высоких широтах заметно изменяются. Это влечет за собой резкий рост чисел обусловленности  $\nu_G$  систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение которых осуществляется с целью определения масс эквивалентных источников, создающих модельное поле [4]:

$$Gm = \Delta g_B, \quad (1)$$

где  $G = \{g_{ij}\}$  – квадратная матрица значений гравитационных эффектов для точечного источника с единичной массой ( $m = 1$ ),  $m$  – вектор неизвестных значений аномальных масс,  $\Delta g_B$  – вектор исходных значений аномалий силы тяжести в редукции Буге (1-й радиальной производной гравитационного потенциала  $V_R$  для сферической модели Земли). Под гравитационным эффектом  $g_{ij}$  в данном случае подразумевается радиальная производная гравитационного потенциала  $V_R$  точечного источника, определенная в сферической системе координат  $\sum \varphi, \lambda, r$ :  $\partial V / \partial R = V_R(R_0, \varphi_0, \lambda_0) = f(R_0 - r \cos \omega) / r_0^3$ , где  $f = 6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$  – гравитационная постоянная,  $R_0, \varphi_0, \lambda_0$  – координаты точки измерений,  $r, \varphi, \lambda$  – координаты источника,  $r_0 = \sqrt{R_0^2 + r^2 - 2R_0 r \cos \omega}$ ,  $\omega$  – угол при центре  $O$  земного шара между точкой измерений и источником:  $\cos \omega = \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)$ .

Обозначим шаг GRID-модели гравитационного поля в градусной мере по широте –  $\Delta_1$ , по долготе –  $\Delta_2$  и введем функцию  $r(\Delta)$  для преобразования градусной меры в линейную. Известно, что хорошее качество аппроксимации аномалий силы тяжести и высокую скорость сходимости итерационного процесса решения СЛАУ (1) обеспечивает соблюдение условия

$$1 \leq R^*/r(\Delta) \leq 1.5, \quad (2)$$

где  $R^*$  – удаление точечной массы от точки задания поля по радиусу Земли вниз,  $r(\Delta)$  – расстояние между точками измерений:  $r(\Delta) \cong r(\Delta_1) \cong r(\Delta_2)$ . В условиях высоких широт при  $\Delta_1 = \Delta_2$  неизбежно возникает неравенство  $r(\Delta_1) \gg r(\Delta_2)$ , поэтому условие (2) здесь не выполняется.

### Синтетический пример

Рассмотрим изменения характеристик матрицы  $G$  при перемещении модели поля от экватора к Северному полюсу по произвольно выбранному меридиану планеты Земля. Размер модели в градусной мере составляет  $20^\circ \times 20^\circ$ , сеть точек задания поля –  $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ , число точек  $k = 1681$ , глубина эквивалентных источников (точечных масс)  $R^* \cong r(\Delta_1) = 55$  км. В качестве одной из характеристик матрицы коэффициентов использовалась норма Фробениуса  $\|G\|_f = \left[ \sum_i \sum_j (g_{ij})^2 \right]^{0.5}$ . Для чистоты эксперимента будем считать, что участки суши на данной территории отсутствуют, т.е. все высотные отметки рельефа земной поверхности равны нулю (табл. 1).

**Таблица 1**

Результаты вычислительно эксперимента: влияние удаления модели поля с фиксированным размером  $20^\circ \times 20^\circ$  от экватора Земли по меридиану

Местоположение и площадь модели			Характеристики матрицы коэффициентов		
Южная граница	Северная граница	Площадь, кв. км	Ранг $r(G)$	Норма $\ G\ _f$	Число $\nu_G$
10° ю.ш.	10° с.ш.	4948158	1681	0.497	21
10° с.ш.	30° с.ш.	4640684	1681	0.509	26
30° с.ш.	50° с.ш.	3764571	1681	0.556	64
50° с.ш.	70° с.ш.	2443561	1681	0.689	2617
60° с.ш.	80° с.ш.	1667859	1502	0.849	2431481

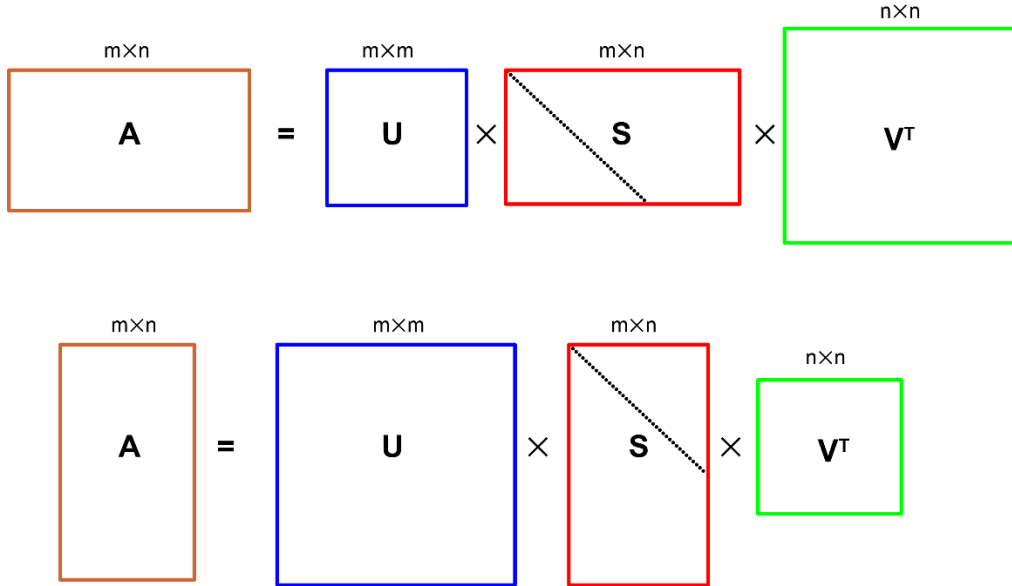
Как очевидно, площадь модели при удалении от экватора закономерно сокращается почти в 3 раза, т.к. ее линейные размеры по долготе  $L$  уменьшаются. За счет сближения точек поля для полярной области Земли отмечается резкое увеличение чисел обусловленности матрицы коэффициентов ( $\nu_G > 2.4 \times 10^6$ ), что влечет за собой вычислительные сложности при решении СЛАУ (1). При наиболее близком к полюсу местоположении модели число линейно независимых векторов-строк в системе (1) сокращается на ~10% от числа строк матрицы  $k$ , т.е. ранг матрицы  $G$  становится неполным.

### Сингулярное разложение матриц

Сингулярное разложение (Singular Values Decomposition, SVD) показывает геометрическую структуру матрицы и позволяет наглядно представить имеющиеся данные [3], в частности – позволяет оценить погрешности при работе с матрицами неполного ранга или близкими к вырождению. С помощью SVD можно определить тип и меру обусловленности матриц, вычислить псевдообратную матрицу. Усеченное сингулярное разложение матриц применяется для решения плохо обусловленных СЛАУ [1]. Матрицу коэффициентов  $G$  размером  $k \times k$  можно представить в виде:

$$G = USV^T, \quad (3)$$

где  $U, V$  – ортогональные матрицы ( $U^T = U^{-1}, V^T = V^{-1}$ ),  $S$  – диагональная матрица с коэффициентами  $\delta_i$  ( $\delta_i \geq \delta_{i+1}$ ), которые называются сингулярными числами матрицы  $G$ . При выборе ограниченного количества  $r$  сингулярных чисел, согласно теореме Эка-карта-Янга, SVD обеспечивает наилучшее приближение к матрице  $G$  на множестве всех матриц ранга, не превосходящего  $r$ . Следует добавить, что разложение (3) может применяться не только к квадратным матрицам, но и к матрицам общего вида  $A$ , у которых число строк  $m$  и число столбцов  $n$  различаются (рис. 1).

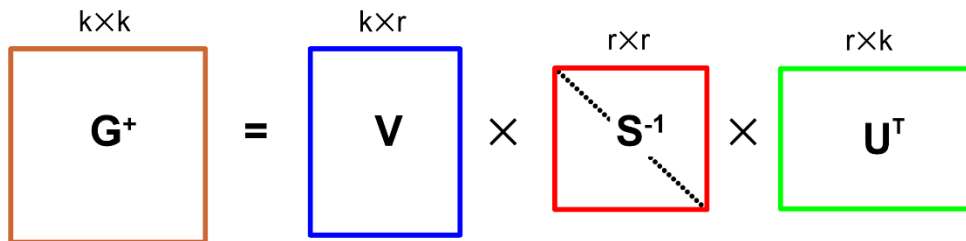


**Рис. 1.** Схематическое представление сингулярного разложения матриц при  $m > n$  (сверху) и при  $m < n$  (снизу). Черный цвет – сингулярные числа  $\delta$

С использованием (3) можно вычислить псевдообратную матрицу  $G^+$ :

$$G^+ = VS^{-1}U^T \quad (4)$$

Чтобы обеспечить устойчивое решение СЛАУ (1), достаточно вычислять только  $r$  векторов-столбцов  $U^{-1}$  и  $r$  векторов-строк  $V$ , соответствующих числу  $r$  наибольших сингулярных чисел матрицы коэффициентов  $\delta_r > \delta_{min}$ , где  $\delta_{min}$  – выбранное пороговое значение (рис. 2).



**Рис. 2.** Схематическое представление псевдообратной матрицы  $G^+$  при  $r < k$

Число обусловленности матрицы  $G^+$  можно найти с использованием минимального и максимального значений ее собственных чисел  $\lambda$  [2]:

$$v_G = \lambda_{max}/\lambda_{min} \quad (5)$$

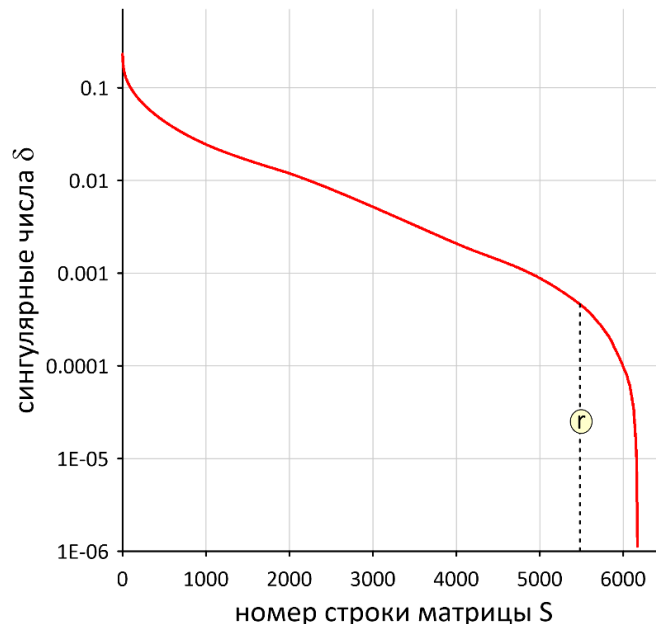
С другой стороны, собственные числа матрицы  $G^T G$  являются квадратами сингулярных чисел, полученных при разложении (3), что позволяет использовать соотношение  $\lambda_i = \delta_i^2$  при оценке  $v_G$  (5) и выборе  $r$ . Искомое регуляризованное решение СЛАУ (1) в итоге будет определяться произведением

$$m = G^+ \Delta g_B. \quad (6)$$

### Практический пример

Рассмотрим практический пример использования SVD при работе с одной из глобальных моделей гравитационного поля Земли – EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD, полученная на основе данных спутниковых миссий GRACE и SLR в 2019 г: гравитационные аномалии  $\Delta g_B$  в полной редукции Буге, определенные для плотности материков  $2.67 \text{ г/см}^3$  и плотности океанов  $1.05 \text{ г/см}^3$  [8]. Для территории размером  $\sim 5.15$  млн. кв. км, ограниченной  $52^\circ\text{--}72^\circ$  с.ш.,  $84^\circ\text{--}132^\circ$  в.д., охватывающей всю Сибирскую платформу и структуры ее обрамления, были получены значения поля с шагом  $-0.4^\circ$ . Размерность GRID модели –  $51 \times 121$  ( $k = 6171$ ). Источником информации о рельефе земной поверхности являлась модель ETOPO1 [7]. Диапазон изменения аномалий силы тяжести  $\sim 387$  мГал, высотные отметки  $H$  лежат в пределах от  $-18$  до  $2420$  м.

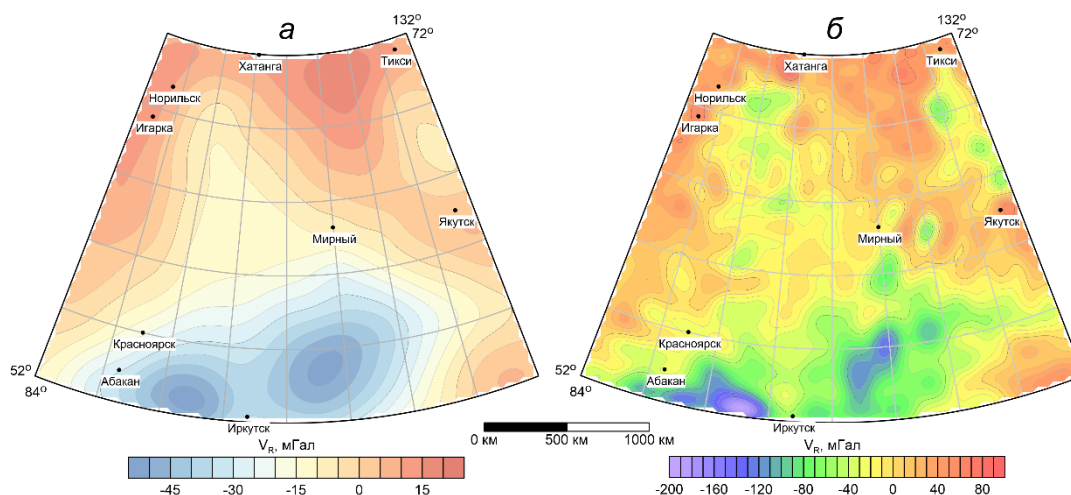
Глубина эквивалентных источников отвечает шагу сети точек поля по меридиану  $R^* \cong r(\Delta_1) = 55$  км. При выполнении регуляризованного решения СЛАУ методом сингулярного разложения было выбрано значение  $r = 5500$  (рис. 3). Найденное с помощью выражения (5) число обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ  $v_G = 2.5 \times 10^5$ , среднеквадратическое расхождение наблюдаемого и модельного полей составило  $\sim 2.9$  мГал (т.е. соизмеримо с предполагаемой точностью глобальной модели поля [6]).



**Рис. 3.** Сингулярные числа  $\delta$  матрицы коэффициентов  $G$  при моделировании аномалий силы тяжести Сибирской платформы

Полученная аналитическая модель поля ( $k$  векторов сферических координат  $\varphi, \lambda, R$  и значений  $m$  точечных масс) использовалась при восстановлении его значений на высоте  $200$  км над земной поверхностью. Как очевидно, выполненная при построении модели регуляризация обеспечивает устойчивые результаты решения прямой задачи

$\Delta g_B = G \cdot m$  (рис. 4а). Также при выборе сравнительно высоких пороговых значений  $\delta_{min}$  результаты SVD могут использоваться с целью выявления основных морфологических особенностей гравитационного поля изучаемой территории (рис. 4б).



**Рис. 4.** Карты изоаномал силы тяжести  $V_R$  в полной редукции Буге, полученные путем пересчета поля на высоту 200 км (а) и применения SVD при  $r = 500$  (б)

## Выводы

Применение метода эквивалентного источника к глобальным GRID моделям гравитационного поля Земли в пределах полярных областей Земли осложнено плохой обусловленностью СЛАУ вида (1), решение которых требуется для определения численных значений аппроксимирующих масс. Впервые апробирован подход, базирующийся на сингулярном разложении матрицы коэффициентов  $G$ , отвечающей «традиционной» аппроксимационной конструкции: размещению эквивалентных источников непосредственно под точками задания поля.

Метод SVD, который называют «томографом высокого разрешения», входит в десятку наиболее важных алгоритмических достижений XX века [1]. Сингулярное разложение позволяет определить ранг матрицы  $G$ , меру ее обусловленности, вычислить обобщенную обратную матрицу  $G^+$ , найти оптимальное решение несовместной системы уравнений с матрицами неполного ранга, а также осуществить приближенное решение систем уравнений с плохо обусловленной матрицей полного ранга. По сравнению с другими методами решения СЛАУ сингулярное разложение требует повышенных в 1,5-2 раза затрат машинного времени. Но предоставленная факторизацией (3) возможность формирования псевдообратной матрицы  $G^+$  с требуемым числом обусловленности  $\nu_G$  полностью компенсирует эти затраты.

Практическое применение представленных алгоритмов – изучение глубинного строения, структурно-тектоническое районирование и прогнозирование полезных ископаемых в Арктике и Антарктике на основе информации, представленной в спутниковых (альтиметрических) глобальных моделях гравитационного поля Земли. Следует добавить, что на практике для истокообразной аппроксимации необходимо использовать минимум две телескопированные цифровые модели гравитационного поля при разных шагах сети и различных уровнях размещения точечных масс [5].

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (рег. номер НИОКТР 124020500054-3).*

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андрушевский Н.М. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений: учеб. пособие. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 71 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 622 с.: ил.
3. Васин В.В. Основы теории некорректных задач. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2020. – 312 с.: ил.
4. Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Пугин А.В. Моделирование аномалий силы тяжести системой точечных масс на сферообразной земле // Геофизика. – 2023. – № 5. – С. 10-17. – DOI: 10.34926/geo.2023.13.94.002.
5. Долгаль А.С. Расчет трансформант с использованием региональных и глобальной моделей гравитационного поля // Геология и полезные ископаемые Западного Урала. – 2024. – Вып. 7 (44). – С. 20-27.
6. Михайлов П.С., Конешов В.Н., Соловьев В.Н., Железняк Л.К. Новые результаты оценок современных глобальных ультравысокостепенных моделей гравитационного поля Земли в Мировом океане // Гироскопия и навигация. – 2022. – Т. 30, №4. – С. 36-53. – DOI:10.17285/0869-7035.00102.
7. Amante C., Eakins B.W. ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model: Procedures, Data Sources and Analysis. – Boulder, Colorado, 2009.
8. Balmino G., Vales N., Bonvalot S., Briais A. Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies // Journal of Geodesy. – 2012. – V. 86. – P. 499-520. – DOI:10.1007/s00190-011-0533-4.

УДК 550.834

DOI:10.7242/echo.2025.3.5

СЕЙСМОФАЦИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ  
ШАХТНЫХ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

А.И. Никифорова

*Горный институт УрО РАН, г. Пермь*

**Аннотация:** Рассмотрен опыт применения методики сейсмофациального анализа при исследованиях во внутренних точках среды для изучения литологического состава и структурных особенностей продуктивной толщи Верхнекамского месторождения калийных солей.

**Ключевые слова:** сейсмофация, шахтная сейсморазведка, осложнения волнового поля, складчатость, литологическая изменчивость.

Сейсмофациальный анализ широко применяется в качестве одного из методов интерпретации сейсморазведочных исследований, направленных на поиск и разведку залежей углеводородов [1]. В отличие от стандартной структурной интерпретации, он фокусируется на совместном изучении целого ряда характеристик волновой картины, в том числе: конфигурации, амплитуды, частоты, степени непрерывности отражений и интервальных скоростей в пределах выделенных сейсмических комплексов. Это позволяет оценивать средние литологические характеристики, судить о характере напластования и условиях осадконакопления пород, от которых получены отражения.

Применение принципов сейсмофациального анализа для изучения эвапоритовой толщи Верхнекамского месторождения калийных солей позволяет без проведения дополнительных исследований повысить детальность изучения постседиментационных изменений как по площади, так и по разрезу. Однако специфика геологического строения месторождения требует адаптации традиционных подходов с учетом тонкослойной структуры и существенной латеральной изменчивости физических параметров целевых интервалов изучаемого разреза [4]. В качестве модельного объекта выбран участок шахтного поля в центральной части ВКМКС на южном склоне Клестовского поднятия (рис. 1).