

## ИСТОКООБРАЗНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕГИОНАЛЬНЫХ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

А.С. Долгаль

Горный институт УрО РАН, г. Пермь

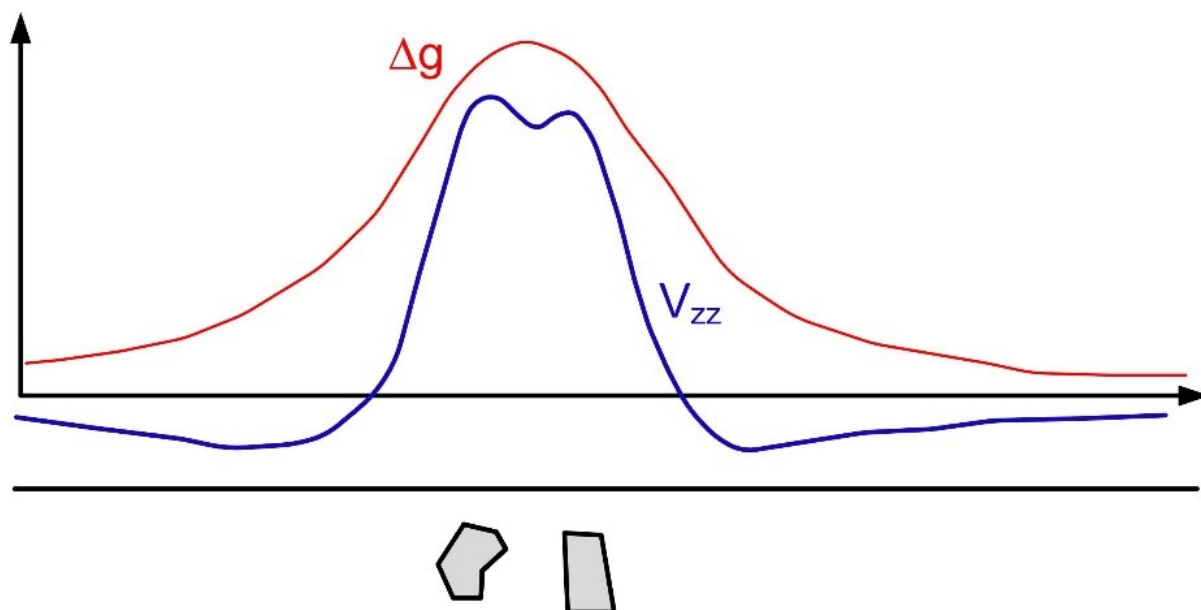
**Аннотация.** Рассмотрены вопросы, связанные с разработкой компьютерной технологии трансформации аномалий силы тяжести в пределах больших территорий на примере п-ва Таймыр. На основе серии вычислительных экспериментов установлена целесообразность использования при расчетах сферы Каврайского. Проведены оценки обусловленности матриц коэффициентов систем уравнений, возникающих в процессе истокообразной аппроксимации. Реализован алгоритм Хагера для приближенного определения нормы обратной матрицы без ее вычисления в явном виде. Даны рекомендации по выбору глубин эквивалентных источников при работе с глобальными моделями гравитационного поля в высоких широтах.

**Ключевые слова:** гравиразведка, трансформация, сфера Каврайского, широта, долгота, эквивалентный источник, система уравнений, матрица, оценка, обусловленность.

### Введение

На величину гравитационных аномалий в каждой из точек наблюдения оказывают влияние многочисленные геологические объекты, имеющие разную плотность и форму, залегающие на различных глубинах. Для решения практических задач важно осуществить такое преобразование наблюдаемого поля, которое «сфокусировало» содержащуюся в суммарном поле информацию об аномалиях, связанных с отдельными геологическими образованиями и позволило их увидеть.

В основе использования трансформаций геопотенциальных полей лежит «принцип фильтрации», формулируемый следующим образом: трансформация осуществляется с целью подавления мешающей информации и наиболее четкого выявления части полезной информации [4]. Иллюстрацией служит рис. 1, на котором показаны результаты вычисления производной  $V_{zz}$  по данным измерений силы тяжести  $\Delta g$  над двумя сближенными объектами.



**Рис. 1.** Локализация аномалий от двух близко расположенных объектов путем трансформации поля силы тяжести  $\Delta g$  в вертикальный градиент  $V_{zz}$  (по Ю.И. Блоху)

Пусть  $u(x, y)$  – некоторый элемент аномального поля (для гравиразведки обычно  $u = \Delta g$ ), заданный на поверхности  $S$  в системе декартовых координат  $\Sigma xyz$ . Во многих случаях принимают, что  $S$  – горизонтальная плоскость  $z = 0$ , но в общем случае это поверхность, описываемая уравнением  $z = f(x, y)$ , характеризующим рельеф земной поверхности или фактическую линию полета при аэросъемке. Трансформантой функции  $u(x, y)$  называется новая функция  $v(x, y, z)$ , определенная на новой поверхности  $S^*$ :

$$v(x, y) = T\{u(x, y)\}, u = \Delta g \quad (1),$$

где  $T$  – некоторый оператор трансформации (например, обеспечивающий вычисление 1-й вертикальной производной поля  $\partial u / \partial z$ ).

Трансформации могут выполняться для совокупности 2D или 3D дискретных значений поля  $u$ , являющихся результатами профильных или площадных измерений, соответственно. Выбор типа трансформации (вида функции  $v$ ) определяется характером решаемой геологической задачи, объемом имеющейся априорной информации и зависит от интуиции интерпретатора.

При трансформации региональных аномалий силы тяжести, зафиксированных в пределах больших территорий, требуется учет сферообразной формы Земли. По оценкам В.Н. Страхова, речь идет о площадях с размерами от 100 км в поперечнике [12]. В этом случае могут использоваться сферическая система координат  $\Sigma \varphi \lambda R$  или глобальная прямоугольная система координат  $\Sigma XYZ$ . Соответственно, в роли элементов гравитационного поля  $u$  будут выступать радиальная производная  $V_R = \partial V / \partial R$  гравитационного потенциала  $V$  или нормальная (по отношению к земному эллипсоиду) составляющая поля  $V_n = \partial V / \partial n$  [6].

Далее будем говорить о трансформации региональных аномалий с использованием наиболее эффективного подхода – истокообразной аппроксимации [1, 8]. В его основе лежит приближение наблюдаемого поля  $U$  теоретическим полем  $U^*$ , представленным в виде системы истокообразных функций. Поле  $U^*$  отвечает аномальному эффекту элементарных источников, обладающих соответствующими значениями масс. Несомненными достоинствами метода является высокая точность преобразований цифровых моделей геофизических полей, учет различий в высотах точек измерений, подавление негармонической составляющей (помехи), возможность одновременного выполнения 3D-интерполяции и трансформации данных [7]. В сферической системе координат расчет трансформант выглядит следующим образом:

$$v(\varphi, \lambda, R) = T\{u(\varphi, \lambda, R)\}, u = V_R. \quad (2)$$

В статье будет рассмотрен ряд вопросов, связанных с выбором модели Земли при моделировании региональных гравитационных аномалий и обусловленностью систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих при определении масс эквивалентных источников.

### Выбор модели Земли

Основные геометрические модели Земли в геодезии – это сфера и сфероид. Частным случаем сфероида является эллипсоид вращения с малым сжатием. Эту фигуру Земля могла бы принять, если бы находилась в состоянии гидростатического равновесия, только под влиянием сил взаимного тяготения ее частиц и центробежной силы вращения вокруг неизменной оси [9]. В 2021 г автором был предложен алгоритм трансформации аномалий силы тяжести на «квазиэллипсоидальной Земле» – сфере Каврайского,

занимающей промежуточное положение между «сферической» и «эллипсоидальной» моделями [3].

Далее будут рассмотрены экспериментальные оценки различий результатов трансформации аномалий силы тяжести для указанных выше моделей. Эквивалентными источниками во всех случаях являлись шары (точечные массы), находящиеся под точками задания поля на фиксированной глубине  $R^*$ , близкой к шагу сети цифровой GRID модели поля. Подбор масс осуществлялся путем приближенного решения СЛАУ:

$$\mathbf{Gm} = \mathbf{u}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{G}$  – квадратная матрица значений гравитационных эффектов для точечного источника с единичной массой ( $m = 1$ ),  $\mathbf{m}$  – вектор неизвестных значений аномальных масс,  $\mathbf{u}$  – вектор значений аномалий силы тяжести  $V_R$  или  $V_n$ .

Элементами матрицы  $\mathbf{G} = \{g_{ij}\}$  для «сферической Земли» являются значения радиальной производной гравитационного потенциала точечного источника  $V_R$ , определенные в сферической системе координат:

$$V_R(R_0, \varphi_0, \lambda_0) = fm(R_0 - r \cos \omega) / r_0^3, \quad (4)$$

где  $f = 6,67 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$  – гравитационная постоянная;  $m$  – масса источника;  $R_0, \varphi_0, \lambda_0$  – координаты точки измерений;  $r, \varphi, \lambda$  – координаты источника;  $r_0 = \sqrt{R_0^2 + r^2 - 2R_0r \cos \omega}$ ;  $\omega$  – угол при центре  $O$  земного шара между точкой измерений и источником:  $\cos \omega = \cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi \cos(\lambda_0 - \lambda)$ .

Для «эллиптической Земли» коэффициенты СЛАУ (1)  $\{g_{ij}\}$  представляют собой нормальную (по отношению к поверхности земного эллипсоида) составляющую гравитационного поля  $V_n$ , определенную в глобальной геоцентрической прямоугольной системе координат:

$$V_n(\xi, \eta, \zeta) = fm(\alpha V_X + \beta V_Y + \gamma V_Z), \quad (5)$$

где  $\xi, \eta, \zeta$  – координаты точки измерений;  $X, Y, Z$  – координаты источника;  $V_X = (\xi - X) / r^3$ ,  $V_Y = (\eta - Y) / r^3$ ,  $V_Z = (\zeta - Z) / r^3$  – первые производные гравитационного потенциала  $V$  по осям  $X, Y, Z$ ;  $r = \sqrt{(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2}$ ;  $\alpha = \cos B \cos L$ ,  $\beta = \cos B \sin L$ ,  $\gamma = \sin B$  – направляющие косинусы,  $B$  – широта,  $L$  – долгота. Напомним, что геодезическая широта  $B$  точки – это угол между нормалью к поверхности земного эллипсоида в этой точке и плоскостью геодезического экватора. Геодезическая долгота  $L$  точки – это двугранный угол между ее геодезическим меридианом и Гринвичским меридианом.

Переход от геодезических координат точек задания поля к сферическому осуществляется просто:

$$\begin{cases} \varphi = \pi/2 - B, \\ \lambda = L, \\ R = R_{\text{зем}} + H, \end{cases} \quad (6)$$

где  $R_{\text{зем}} = 6371,1 \text{ км}$  – радиус Земли, отвечающей по объему референц-эллипсоиду Ф.Н. Красовского,  $H$  – геодезическая высота, представляющая собой расстояние от точки до поверхности земного эллипсоида, отсчитанное по нормали к этой поверхно-

сти. В случае использования сферы Каврайского преобразование широты выглядит следующим образом:

$$\varphi = \pi/2 - B + 8'39'' \sin 2B \quad (7)$$

Для сферы Каврайского относительные погрешности в расстояниях составляют 0,08%, в угловых величинах – до 0,1% по сравнению с эллипсоидом вращения [3]. Для сферы с радиусом 6371,1 км погрешности вычисления расстояний и углов заметно выше – до 0,5% и до 0,4%, соответственно [3].

В глобальной геоцентрической системе координат  $\Sigma XYZ$ , начала осей которой совпадает с центром масс Земли, преобразование координат выглядит сложнее:

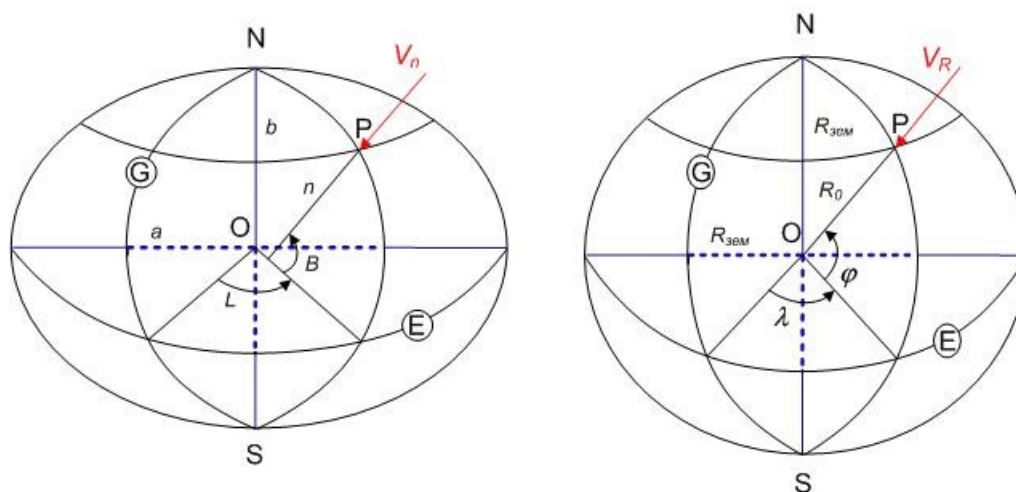
$$\begin{cases} X = (N + H)\cos B\cos L \\ Y = (N + H)\cos B\sin L \\ Z = [(1 - e^2)N + H]\sin B \end{cases} \quad (8)$$

где  $X, Y, Z$  – прямоугольные координаты точки;  $B, L, H$  – геодезические координаты;  $N$  – радиус кривизны первого вертикала;  $e$  – эксцентриситет эллипсоида. Радиус кривизны первого вертикала  $N$  и эксцентриситет  $e$  эллипсоида вычисляются по формулам:

$$N = a/\sqrt{1 - e^2\sin^2 B} \quad (9)$$

$$e^2 = (a^2 - b^2)/b^2 \quad (10)$$

На рис. 2 показаны «эллипсоидальная» (с полуосями  $a$  и  $b$ ) и «сферическая» (с радиусом  $R_{\text{зем}}$ ) модели Земли.



**Рис. 2.** «Эллипсоидальная» и «сферическая» модели Земли:  
 N,S – полюса; G – плоскость Гринвичского меридиана; E – плоскость экватора;  
 B – геодезическая широта;  $\varphi$  – геоцентрическая широта; L,  $\lambda$  – долгота.  
 Красный цвет – вектор силы тяжести

В настоящее время широкое применение в практике геодезии, геофизики и других наук находят глобальные модели геопотенциала Земли. Более 150 моделей представлены на сайте Немецкого научно-исследовательского центра наук о Земле в городе

Потсдам (ICGEM), который является одним из шести центров Международной гравитационной полевой службы Международной ассоциации геодезии. Все эти модели доступны в виде нормированных коэффициентов сферических гармоник в стандартном формате, который был принят Европейским космическим агентством (ESA – European Space Agency) в качестве официального формата данных международного космического проекта GOCE (Global Ocean Circulation Experiment). При выполнении данной работы использовалась одна из этих моделей – EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD, полученная на основе данных спутниковых миссий GRACE и SLR в 2019 г.

Для эксперимента была выбрана территория на п-ве Таймыр с координатами  $68^{\circ}$ - $76^{\circ}$  с.ш.,  $84^{\circ}$ - $108^{\circ}$  в.д., имеющая площадь  $\sim 893$  тыс. км<sup>2</sup>. Основными населенными пунктами в ее пределах являются г. Норильск, поселки Волочанка и Хатанга. Модель поля включала в себя гравитационные аномалии в полной редукции Буге с плотностью промежуточного слоя  $2,67$  г/см<sup>3</sup>, с включенными поправками за влияние топографических масс, а также за влияние атмосферных масс. Также использовалась глобальная модель рельефа земной поверхности ETOPO1. Все данные представлены в системе геодезических параметров Земли WGS84.

Сеть задания значений поля  $\Delta g$  и высот земной поверхности составила  $12'$  по широте  $B$  и  $36'$  по долготе  $L$ , т.е. расстояния  $s$  между точками по меридиану составили  $\sim 22,2$  км, по параллели  $\sim 25,1$  км на южной границе и  $\sim 16,2$  км – на северной границе. Точки задания поля находились на поверхности Земли (нижней границе атмосферы), их число  $N = 1681$ . Амплитуда аномалий силы тяжести изменялись от  $-107,8$  мГал до  $33,5$  мГал, максимальная высотная отметка рельефа достигала  $1454$  м (рис. 3).

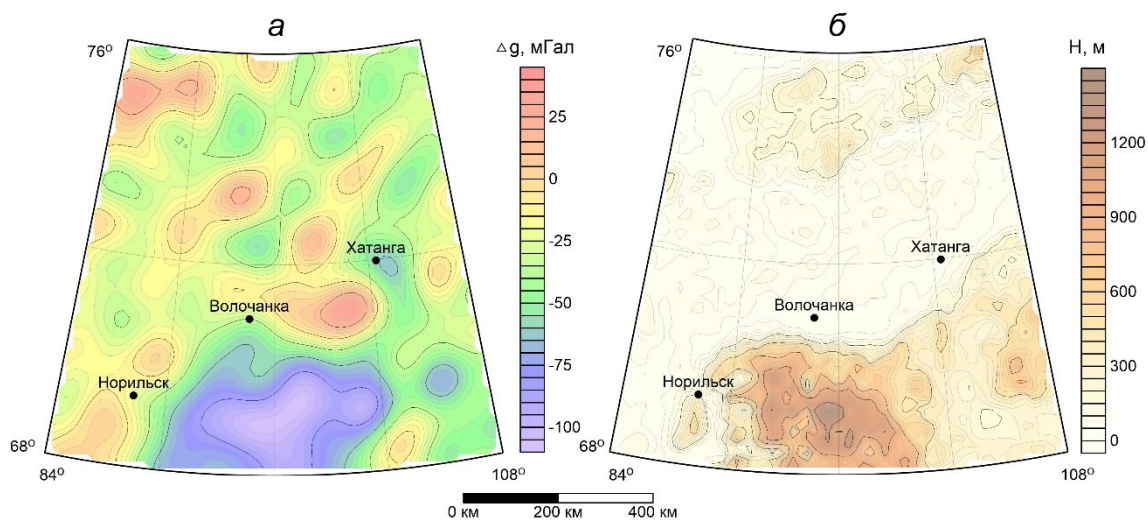


Рис. 3. Карты изоаномал силы тяжести в редукции Буге (а) и изогипс рельефа дневной поверхности (б) района исследований

Модель гравитационного поля EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD, представленная 300 сферическими гармониками, не содержит негармонических помех, поэтому представленные в ней значения поля условно можно считать точными. Для сопоставления трансформант использовался подбор исходного поля с точностью  $\|U - U^*\|_{L^2} = 0,001$  мГал. Глубина эквивалентных источников  $R^* = 36$  км. Решение СЛАУ (1) осуществлялось методом Зейделя при числе итераций от 56 до 59. Созданная аппроксимационная конструкция (множество векторов  $\{X, Y, Z, m\}$ ) применялась для восстановления вторых производных силы тяжести  $\partial^2 V / \partial R^2$  и  $\partial^2 V / \partial n^2$  на высоте 10 км путем решения прямой задачи гравиразведки (рис. 4). Статистические характеристики полученных трансформант приведены в табл. 1.

Для всех «эллипсоидальных» моделей результаты совпали с точностью до 3-го знака после запятой. Следовательно, использование любой из представленных моделей эллипсоидов при полосовой фильтрации аномального гравитационного поля позволяет получать практически тождественные результаты. Поэтому любую из этих моделей можно взять в качестве базовой для сравнения со сферическими представлениями о Земле. В данном случае базовой моделью служил общеземной эллипсоид ПЗ-90.11, который Постановлением правительства РФ от 28 декабря 2012 г. введен в качестве единой государственной системы координат в целях геодезического обеспечения орбитальных полетов и решения навигационных задач. Характеристики разностных полей даны в табл. 2.

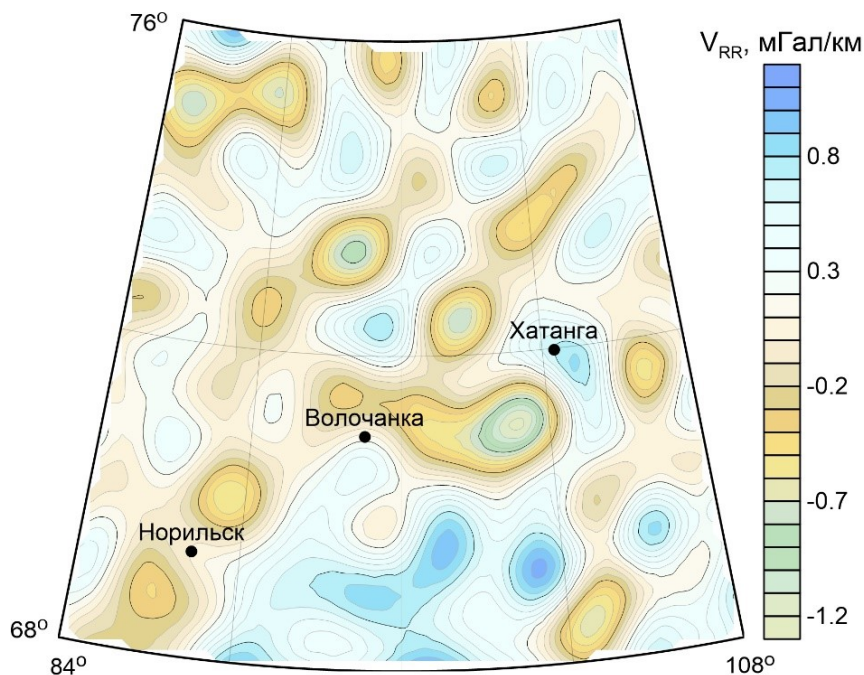


Рис. 4. Карта изолиний второй радиальной производной силы тяжести  $V_{RR}$  района исследований на сфере Каврайского

Таблица 1  
Статистические характеристики вторых производных силы тяжести на высоте 10 км (п-ов Таймыр)

Модель Земли	Параметр	Статистические параметры, мГал/км			
		Минимум	Максимум	Среднее	СКО
«Сферическая Земля»	$\partial^2 V / \partial R^2$	-1,280	1,018	0,126	0,355
Сфера Каврайского	$\partial^2 V / \partial R^2$	-1,302	1,106	0,128	0,374
Эллипсоид ПЗ-90.11	$\partial^2 V / \partial n^2$	-1,303	1,106	0,128	0,374
Эллипсоид WGS-84	$\partial^2 V / \partial n^2$	-1,303	1,106	0,128	0,374
Эллипсоид GRS-80	$\partial^2 V / \partial n^2$	-1,303	1,106	0,128	0,374
Эллипсоид Красовского	$\partial^2 V / \partial n^2$	-1,303	1,106	0,128	0,374



Таблица 2

Характеристики разности  $\delta$  трансформант силы тяжести на высоте 10 км

Разность $\delta$	Статистические параметры, мГал			
	Минимум	Максимум	Среднее	СКО
$\partial^2 V / \partial R^2$ (сфера Каврайского) – $\partial^2 V / \partial R^2$ («сферическая Земля»)	-0,003	0,004	$3 \times 10^{-4}$	0,001
$\partial^2 V / \partial R^2$ (сфера Каврайского) – $\partial^2 V / \partial n^2$ (эллипсоид ПЗ-90.11)	-0,0005	0,0007	$4 \times 10^{-5}$	$2 \times 10^{-4}$
$\partial^2 V / \partial R^2$ («Сферическая Земля») – $\partial^2 V / \partial n^2$ (эллипсоид ПЗ-90.11)	-0,003	0,003	$-3 \times 10^{-4}$	0,001

Как очевидно, дисперсия разности  $\delta$  для сферы Каврайского и эллипсоида ПЗ-90,11 на превышает 0,03% от дисперсии самого поля, т.е. различием  $\partial^2 V / \partial R^2$  и  $\partial^2 V / \partial n^2$  можно пренебречь. Для модели «сферической Земли» различия примерно на порядок выше. Следовательно, при трансформации региональных аномалий гравитационного поля достаточно выполнять расчеты на сфере Каврайского. Использование моделей «эллипсоидальной Земли» в данном случае может лишь увеличить вычислительную сложность задач, но не приведет к реальному повышению точности результатов.

#### Оценка обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ

Как правило, порядок СЛАУ (1) составляет  $N = 10^4 - 10^6$ , что влечет за собой использование приближенных итерационных методов для ее решения [2]. Нужно заметить, что матрица коэффициентов  $\mathbf{G}$  размером  $N \times N$  имеет значительно более высокую точность (которая зависит только от ошибок округления – обычно это 7-20 значащих цифр), чем правая часть системы  $\mathbf{u}$  (включающая в себя погрешности наблюдений и редуцирования, т.е. не более 5-6 значащих цифр). Обусловленность матрицы коэффициентов СЛАУ является важнейшей характеристикой, определяющей сложность процесса ее решения и точность полученных результатов [13, 14]. Стандартное число обусловленности ( $H$ -число Тодда) матрицы  $\mathbf{G}$ :

$$\text{cond } \mathbf{G} = \nu_{\mathbf{G}} = \|\mathbf{G}^{-1}\| \|\mathbf{G}\| \quad (11)$$

определяет влияние неточностей в задании исходных данных на окончательный результат [10]. Напомним, что минимально возможная величина  $\nu_{\mathbf{G}} = 1$ , СЛАУ с высокими значениями  $\nu_{\mathbf{G}} \gg 1$  называют плохо обусловленными.

Числа обусловленности матрицы коэффициентов часто используются как средства априорной оценки ошибок, возникающих при решении СЛАУ. Связь относительной погрешности  $\tau$  решения СЛАУ с погрешностями ее правой части определяется числом  $\nu_{\mathbf{G}}$ :

$$\tau = \frac{\|\Delta \mathbf{m}\|}{\|\mathbf{m}\|} \leq \nu_{\mathbf{G}} \frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}. \quad (12)$$

Размерность подавляющего большинства практических задач истокообразной аппроксимации такова, что формирование обратной матрицы  $\mathbf{G}^{-1}$  связано с большими вы-

числительными затратами [5]. Это существенно ограничивает возможности использования прямых вычислений чисел обусловленности по формуле (11). В статье [15] Хагер (Hager) опубликовал метод оценки числа обусловленности обратной матрицы на основе матрицы коэффициентов СЛАУ. В рамках этого подхода российскими учеными А.Н. Рогалевым, С.В. Дорониным разработано несколько алгоритмов вычисления оценки  $\gamma \leq \|A^{-1}\|$  для заданной матрицы  $A \in R^{N \times N}$  [11]. В одном из них для оценки  $\|A^{-1}\|$  требуется последовательно решить две СЛАУ. Первая СЛАУ  $A^T y = e$ , где вектор  $e$  с компонентами  $\pm 1$  выбирается случайным образом. Затем решается система  $Aw = y$  и  $\|A^{-1}\|$  оценивается отношением  $\|w\|/\|y\|$ .

Сравним результаты применения этого алгоритма со стандартными значениями чисел обусловленности  $\nu_G$ , полученными с помощью обращения матрицы  $G$  методом Шульца второго порядка [10]. Будем использовать те же цифровые данные по п-ву Таймыр, но с разреженной сетью значений исходных параметров:  $1^\circ$  по широте  $B$  и  $3^\circ$  по долготе  $L$ . В этом случае расстояния  $s$  между точками по меридиану составили  $\sim 111.1$  км, по параллели  $81,0 \leq s \leq 125,5$  км. Моделью Земли здесь и далее является сфера Каврайского. Рассматривались четыре варианта размещения эквивалентных источников на глубинах  $R^* = 55.5, 111.1, 165.7, 222.2$  км. Для характеристики матрицы  $G$  была выбрана норма  $\|G\|_1 = \max_j (\sum_i |g_{ij}|)$ , согласованная с нормой  $\|m\|_1 = \sum_j |m_j|$  в пространстве векторов  $m$ . Точность решения всех СЛАУ была не ниже 0,001 мГал в метрике  $L^2$ . Результаты расчетов приведены в таблицах 3, 4.

Таблица 3

Точные и приближенные значения  
нормы обратной матрицы  $G^{-1}$  (сеть  $1^\circ \times 3^\circ$ )

Глубина $R^*$ , км	55,5	111,1	166,7	222,2
Точная величина $\ G^{-1}\ _1$	770,3	10258	127375	1484612
Оценка $\gamma \leq \ G^{-1}\ _1$	493,3	4838	53672	765210

Таблица 4

Характеристика обусловленности матрицы  $G$  (сеть  $1^\circ \times 3^\circ$ )

Глубина $R^*$ , км	55,5	111,1	166,7	222,2
Норма $\ G\ _1$	0,0045	0,0033	0,0028	0,0024
Стандартное число $\nu_G$	3,5	33,9	356,7	3563,1
Оценка $\nu_G$ по Хагеру	2,2	16,0	150,3	1836,5

Установлено совпадение результатов, полученных путем точного и приближенного определения чисел обусловленности  $\nu_G$  матрицы  $G$ , достаточное для априорной оценки сложности решения СЛАУ (1). Отмечается закономерное увеличение чисел обусловленности  $\nu_G$  с ростом относительных глубин  $R^*$ . Влияние величины  $\nu_G$  на процесс решения СЛАУ будет продемонстрировано ниже.

Выполним оценку обусловленности матриц коэффициентов по Хагеру с использованием всех имеющихся цифровых данных, т.е. при увеличенной в 5 раз плотности сети точек. Размер матрицы  $G$  в этом случае составляет  $1681 \times 1681$  (табл. 5). Отношения



глубины источников к шагу сети задания поля по меридиану сохранялись прежними: 0.5s, 1s, 1.5s, 2s.

Таблица 5

Характеристика обусловленности матрицы G (сеть 0,2°×0,6°)

Глубина $R^*$ , км	11,1	22,2	33,3	44,4
Норма $\ G\ _1$	0,1248	0,1030	0,0982	0,0945
Оценка $\gamma \leq \ G^{-1}\ _1$	19,8	196	2395	31481
Оценка $\nu_G$ по Хагеру	2,5	20,2	235,2	2975
Число итераций $k$	10	22	37	165

Как очевидно, тенденция к росту значений  $\nu_G$  с увеличением параметра  $R^*$  сохраняется. По мере приближения матрицы коэффициентов к вырожденной возрастает число итераций  $k$  в методе Зейделя, необходимых для достижения невязки ~0,001 мГал. Сравнение табл. 4 и 5 свидетельствует о некотором ухудшении обусловленности СЛАУ (1) при увеличении размерности решаемых задач.

### Заключение

Модель «квазиэллипсоидальной Земли» (сфера Каврайского) позволяет осуществлять высокоточный расчет трансформант аномального гравитационного поля с использованием системы точечных масс и геодезических координат  $B, L$  точек задания поля. Адекватность этой модели подтверждается результатами экспериментального сопоставления вторых производных  $\partial^2 V / \partial R^2$  и  $\partial^2 V / \partial n^2$  гравитационного потенциала на высоте 10 км. Основные вычислительные сложности при трансформации связаны с решением СЛАУ большой размерности ( $N = 10^4 - 10^6$ ) итерационными методами. Точность и скорость решения систем уравнений зависят от их обусловленности.

Выполнены оценки обусловленности матриц G коэффициентов СЛАУ при разных глубинах размещения эквивалентных источников при аппроксимации аномалий силы тяжести на территории п-ва Таймыр (68°-76° с.ш., 84°-108° в.д.). При вычислении чисел обусловленности  $\nu_G = \|G\|_1 \|G^{-1}\|_1$  использовались обращение матрицы G методом Шульца и алгоритм Хагера. Последний представляет собой эффективный метод приближенного определения нормы  $\|G^{-1}\|_1$  без вычисления обратной матрицы в явном виде. Он может применяться к задачам большой размерности, т.к. затраты машинного времени являются сопоставимыми с удвоенным временем приближенного решения СЛАУ (1) при тех же цифровых данных.

Отмечается увеличение  $\nu_G$  для цифровой модели аномального гравитационного поля при погружении источников на глубину  $R^*$ , превышающую длину  $s$  шага сети по меридиану. Это увеличение существенно сказывается, в первую очередь, на точности и скорости приближенного решения СЛАУ итерационными методами. Поэтому в условиях высоких (от 60°) при формировании аппроксимационной конструкции желательно приближенное равенство между  $R^*$  и расстояниями  $s$  между точками задания поля по широте и долготе. Выбор одинакового шага  $\Delta B = \Delta L$  в градусной мере не рекомендуется.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда  
№ 23-27-00113.*

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аронов В.И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. – М.: Недра, 1990. – 301 с.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 622 с.: ил.
3. Воздушная навигация: справочник / [Белкин А.М. и др.]. – М.: Транспорт, 1988. – 303 с.
4. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий: учеб. пособие. – 2009. – 232 с. – Текст электронный. – URL: <http://sigma3d.com/index.php/publications/books> (Дата обращения 14.02.2022 г.).
5. Долгаль А.С. Оценка влияния формы поверхности измерений в методе истокообразной аппроксимации геопотенциальных полей // Горное эхо. – 2020. – № 2 (79). – С. 49-57. – DOI: 10.7242/echo.2020.2.10.
6. Долгаль А.С., Костицын В.И., Пугин А.В., Хохлова В.В. Выбор модели Земли для трансформации аномалий силы тяжести в процессе региональных исследований // Геофизика. – 2022. – № 5. – С. 6-12.
7. Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Пугин А.В. Алгоритмы аппроксимации геопотенциальных полей истокообразными функциями // Геофизика. – 2016. – № 5. – С. 4-10.
8. Долгаль А.С., Пугин А.В., Новикова П.Н. История метода истокообразных аппроксимаций геопотенциальных полей // Физика Земли. – 2022. – № 2. – С. 3-26. – DOI: 10.31857/S0002333722020028.
9. Кауфман А.А., Хансен Р. Принципы метода гравиметрии: Пер. с англ. В.А. Ефремова, Т.А. Тимакиной. – Тверь: Междунар. Ассоц. «АИС», 2011. – 376 с.
10. Математический форум Math Help Planet. – Текст электронный. – URL: <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=iteratsionnyi-metod-shultsa-nakhozheniya-obratnoi-matritsy> (Дата обращения 2.02.2023 г.)
11. Роголев А.Н., Доронин С.В. Использование критериев обусловленности при численных расчетах напряженного состояния силовых конструкций // Системы. Методы. Технологии. – 2016. – № 2 (30). – С. 91-99.
12. Страхов В.Н., Керимов И.А., Степанова И.Э. Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей. – М.: ИФЗ РАН, 2009. – 254 с.: ил.
13. Фадеев Д.К. Об обусловленности матриц // Труды математического института АН СССР. – 1959. – Т. 53. – С. 387-391.
14. Цей Р., Шумафов М.М. Число обусловленности матрицы как показатель устойчивости при решении прикладных задач // Труды ФОРА. – 2011. – № 16. – С. 61–67.
15. Hager W.W. Condition estimates // SIAM Journal on scientific and statistical computing. – 1984. – V. 5, № 2. – P. 311-316.

УДК 550.837

DOI:10.7242/echo.2023.1.12

**ЛОКАЛИЗАЦИЯ ГОРИЗОНТОВ-КОЛЛЕКТОРОВ  
В НАДСОЛЕВОЙ ТОЛЩЕ ПОРОД МЕТОДОМ СОПРОТИВЛЕНИЙ  
С ЦЕЛЬЮ ЗАКАЧКИ ИЗБЫТОЧНЫХ РАССОЛОВ**

Е.С. Зубрикова, М.С. Лучников  
Горный институт УрО РАН, г. Пермь

**Аннотация.** В работе представлены результаты электроразведочных работ, направленные на поиск и локализацию горизонтов-коллекторов, с целью закачки избыточных рассолов. Для выделения разуплотненных участков пониженных удельных сопротивлений проведен расчет суммарной продольной проводимости.

**Ключевые слова:** электроразведка, избыточные рассолы, горизонт-коллектор, удельное электрическое сопротивление, суммарная продольная проводимость.