ISSN: 1999-6691 e-ISSN: 2782-3709 DOI: 10.7242/1999-6691/2026.19.3.28

Научная статья

Анализ нерегулярного поведения солнечного цикла магнитной активности

***Г.А. Ташкинов*[1,2], *А.В. Гладких*[1,2], *Р.А. Степанов*[1,2]**

[1] *Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация*
[2] *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Численно исследовано нерегулярное поведение нелинейной модели солнечного динамо с алгебраическим подавлением α-эффекта и динамической обратной связью через токовую спиральность мелкомасштабного магнитного поля. Устойчивое вычисление функций подавления обеспечивается использованием асимптотических разложений, устраняющих потерю значащих цифр при вычитании близких величин. Выполнено параметрическое исследование влияния динамо-числа и вклада магнитной составляющей α-эффекта на статистические и спектральные характеристики циклов. По длительным временным рядам энергии дипольной составляющей тороидального поля определены распределения амплитуд, периодов и фазовых отклонений максимумов. Показано, что собственная динамика модели создает нерегулярную модуляцию без внешнего случайного воздействия при сохранении выраженной цикличности. Усложнение ее поведения сопровождается появлением широкополосной составляющей в спектрах энергии и токовой спиральности. Сравнением с числом солнечных пятен продемонстрировано, что сходство отдельных последовательностей циклов не гарантирует соответствия их статистических распределений: при наибольшем из рассмотренных модуле динамо-числа относительный разброс периодов и амплитуд превышает наблюдаемый. Интерпретация различий требует учета малой наблюдательной выборки и связи магнитной энергии с индексом активности. Исследована устойчивость статистических оценок при увеличении числа анализируемых циклов. В контрольном режиме распределения стабилизируются, а локальная концентрация фаз ослабевает. Разброс гистограмм в последовательных блоках убывает приблизительно обратно пропорционально квадратному корню из числа циклов. Показана необходимость длительного интегрирования для достоверной оценки изменчивости циклов и фазовой упорядоченности.

Ключевые слова: солнечный цикл, нелинейная динамо-модель, численное моделирование, хаотическая динамика, альфа-эффект

Получение: 21.11.2025 / *Принятие:* 12.12.2025 / *Публикация онлайн:* 31.10.2026 УДК 523.98:517.957:519.63

1. Введение

Теоретические основы динамо-механизма солнечной цикличности заложены в работах по солнечному динамо [1] и электродинамике средних полей [2, 3]. Совместное действие дифференциального вращения и спиральных турбулентных движений обеспечивает взаимное преобразование тороидальной и полоидальной составляющих крупномасштабного магнитного поля. Соответствующая $\alpha\Omega$-модель допускает возбуждение распространяющихся динамо-волн и позволяет физически обосновать описание магнитного цикла Солнца.

Для описания солнечной активности необходимо объяснить не только существование циклов, но и их изменчивость. Последовательные циклы различаются амплитудой, продолжительностью и формой, а на больших временных масштабах наблюдаются модуляции активности и длительные глубокие минимумы. Спектральные исследования показывают, что циклическая составляющая сосуществует с флуктуациями в широком диапазоне временных масштабов [4, 5]. Поэтому необходимо выяснить не только происхождение характерного периода, но и механизмы изменчивости циклов, а также проверить, согласуются ли создаваемые ими статистические свойства с наблюдениями.

В моделях динамо рассматриваются два взаимодополняющих источника нерегулярности: собственная нелинейная динамика и случайные флуктуации параметров, отражающие изменчивость турбулентных течений. Возможность перехода от периодических динамо-волн к модулированным и хаотическим режимам продемонстрирована в работе [6]. В моделях с флуктуирующим α-эффектом исследованы статистические связи между амплитудой, длительностью и формой циклов [7]. Модель слабонелинейного осциллятора со случайным воздействием также позволяет воспроизводить существенные свойства долговременной изменчивости солнечной активности [4, 8]. Таким образом, нерегулярность солнечного цикла сама по себе не указывает на конкретный механизм ее возникновения, и для проверки модели требуется совокупность статистических и спектральных характеристик.

Одним из механизмов нелинейной обратной связи является магнитный вклад в α-эффект, обусловленный токовой спиральностью мелкомасштабного поля [9]. Его динамическое описание основывается на уравнении эволюции спиральности [10]. В отличие от мгновенного алгебраического подавления α-эффекта такая обратная связь обладает собственными временами релаксации и переноса и может влиять на модуляцию магнитных циклов. В одномерной модели, учитывающей оба вида нелинейности, обнаружены регулярные, модулированные и хаотические режимы и выполнено сопоставление модельных чисел Вольфа с наблюдениями [11]. Дальнейшее развитие этой модели связывается с прогнозированием активности, в том числе с использованием нейронных сетей [12, 13].

В настоящей работе рассматривается самостоятельная задача проверки этой модели путем исследования статистики ее собственной динамики при постоянных управляющих параметрах, без внешнего случайного воздействия и коррекции решения по наблюдениям. Сходство отдельного фрагмента модельного ряда с

©Авторы 2026 Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

хронологическим рядом наблюдений отражает лишь конкретные реализации, но не гарантирует адекватного воспроизведения их долговременных статистических закономерностей. Поэтому анализ отдельных последовательностей циклов дополняется распределениями их характеристик, спектрами и оценкой зависимости результатов от длины выборки. При сравнении учитывается также различие между модельной магнитной энергией и наблюдаемым числом солнечных пятен.

Особый вопрос вызывает фазовая упорядоченность циклов и возможность их синхронизации с внешним периодическим воздействием [14]. В численном эксперименте с нелинейной моделью динамо, включающей обратную связь через токовую спиральность, показана реализуемость устойчивой фазовой привязки при периодической модуляции кинетической части α-эффекта даже в хаотическом режиме [15]. Интерпретация наблюдательных данных остается дискуссионной. Статистические аргументы против синхронизации [16] обсуждаются наряду с результатами повторного анализа, допускающими фазовую устойчивость при иной идентификации циклов в реконструированном ряду [17]. Прояснение этого вопроса требует различать характерный период, концентрацию фаз на конечном интервале и долговременную привязку к внешнему воздействию.

Цель работы заключается в том, чтобы установить, как интенсивность генерации магнитного поля и вклад динамической обратной связи через токовую спиральность влияют на изменчивость циклов, и оценить возможности и ограничения сопоставления полученных результатов с данными о солнечной активности. Для этого в модифицированной модели [11] варьируются динамо-число D и параметр σ, определяющий магнитную составляющую α-эффекта. Анализируются распределения амплитуд, периодов и фазовых отклонений максимумов энергии тороидального поля дипольной четности, а также спектры энергии и токовой спиральности. Основное внимание уделяется сочетанию устойчивой циклической составляющей с нерегулярной модуляцией, статистическим различиям между модельными и наблюдательными данными, а также зависимости фазовой диагностики от продолжительности ряда.

2. Модель нелинейного динамо

Основой модели динамо в турбулентных электропроводящих средах служит уравнение индукции среднего магнитного поля:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} - \eta \nabla \times \mathbf{B}), \tag{1}$$

где $\mathbf{B}$ и $\mathbf{V}$ — среднее магнитное поле и поле скорости соответственно, η — коэффициент микроскопической магнитной диффузии, $\mathbf{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$ — средняя турбулентная электродвижущая сила, обусловленная турбулентными пульсациями скорости $\mathbf{u}$ и магнитного поля $\mathbf{b}$. В работе [3] предложен наиболее часто используемый вид $\mathbf{E}$ для однородной изотропной и зеркально несимметричной турбулентности: $\mathbf{E} = \alpha \mathbf{B} - \eta_t \nabla \times \mathbf{B}$, где α — коэффициент α-эффекта, а η_t — коэффициент турбулентной магнитной диффузии. В дальнейшем микроскопической магнитной диффузией пренебрегается по сравнению с турбулентной.

В задаче осесимметричного солнечного динамо уравнение (1) удобно решать в сферической системе координат $\{r, \theta, \phi\}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ относительно магнитного поля, представленного через компоненты: тороидальную B_ϕ и полоидальную, которая выражается азимутальной составляющей векторного потенциала A_ϕ: $\mathbf{B} = B_\phi \mathbf{e}_\phi + \nabla \times (A_\phi \mathbf{e}_\phi)$. В приближении тонкого сферического слоя (без учета кривизны) можно прийти к модели солнечного $\alpha\Omega$-динамо [1], описывающей совместное действие дифференциального вращения (Ω-эффекта) и мелкомасштабных спиральных движений (α-эффекта), приводящих к генерации бегущих по широте волн магнитного поля. В работе [11] используется модификация этой модели, полученная путем усреднения по глубине конвективной зоны. В безразмерном виде соответствующие уравнения записываются следующим образом:

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = D \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \sin\theta + \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial \theta^2} - \mu^2 B_\phi, \tag{2}$$

$$\frac{\partial A_\phi}{\partial t} = \alpha B_\phi + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial \theta^2} - \mu^2 A_\phi, \tag{3}$$

где μ — параметр, учитывающий радиальные диффузионные потери, $D = R_\alpha R_\omega$ — динамо-число. Пространственный и временной масштабы соответственно равны: $R_\odot$ и $R_\odot^2/\eta_t$. Здесь $R_\alpha = \alpha_0 R_\odot/\eta_t$ и $R_\omega = \delta\Omega R_\odot^2/\eta_t$, где $\delta\Omega$ — характерное значение дифференциального вращения, α_0 — максимальный модуль кинетической части α-эффекта. Тороидальное поле измеряется в единицах B_0, а потенциал — в единицах $B_0 R_\odot R_\alpha$.

Нелинейность модели связана с зависимостью альфа-эффекта от магнитного поля. Полный альфа-эффект $\alpha(t,\theta)$ выражается в виде суммы магнитной и кинетической составляющих:

$$\alpha = \sigma \chi^c \phi_c(B) + \chi^v \phi_v(B).$$

Кинетическая часть задается стационарным профилем

$$\chi^v(\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos\theta \sin^2\theta. \tag{4}$$

Магнитная часть определяется уравнением для безразмерной токовой спиральности:

$$\frac{\partial \chi^c}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} + \mu^2 A_\phi B_\phi\right) - \left(\frac{1}{T} + \kappa_t \mu^2\right)\chi^c - \alpha B^2 - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(B_\phi \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} - \kappa_t \frac{\partial \chi^c}{\partial \theta}\right). \tag{5}$$

Здесь T — время релаксации токовой спиральности, κ_t — коэффициент ее турбулентной диффузии. Параметр σ задает эффективный вклад токовой спиральности в α-эффект. Алгебраическое подавление описывается функциями

$$\phi_c(B) = \frac{3}{B^2}\left(1 - \frac{\arctan B}{B}\right), \qquad \phi_v(B) = (4\phi_c(B) + 3L(B))/7, \qquad L(B) = 1 - 2B^2 + 2B^4 \ln(1 + B^{-2}),$$

где величина магнитного поля определяется как

$$B = \left\{ B_\phi^2 + R_\alpha^2 \left[\mu^2 A_\phi^2 + \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}.$$

Система уравнений (2), (3) и (5) дополняется условиями $A_\phi = B_\phi = 0$ и $\partial_\theta \chi^c = 0$ при $\theta = 0, \pi$. Начальные условия для каждой реализации имеют вид:

$$B_\phi(0,\theta) = s_1 \sin\theta + s_2 \sin 2\theta, \qquad A_\phi(0,\theta) = \chi^c(0,\theta) = 0,$$

где s_1 и s_2 — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[-10^{-5}, 10^{-5}]$.

По сравнению с моделями, рассмотренными в работах [11–13], в настоящую постановку внесены изменения. Так, перенормировка магнитных переменных позволила исключить параметр ξ и заменить σ новым безразмерным комплексом, что сократило число независимых параметров. Для кинетической составляющей α-эффекта выбран широтный профиль (4), использовавшийся в работах [18, 19]. Этот профиль обеспечивает гладкость на полюсах и экваториальную антисимметрию широтной зависимости с минимальным волновым числом. В качестве начального состояния используются малые случайные возмущения, а не конечные распределения, предпосылки для возникновения которых отсутствуют. Кроме того, из постановки исключено применявшееся в работе [13] скачкообразное зануление дифференциального вращения в узкой приэкваториальной полосе, поскольку этот прием не имеет физического обоснования, а его влияние на устойчивость и сходимость численного решения требует отдельного рассмотрения.

3. Результаты

Для исследования нерегулярного поведения модели естественно выбрать два управляющих параметра: динамо-число D и коэффициент σ, определяющий вклад магнитной составляющей α-эффекта. Динамо-число характеризует интенсивность генерации магнитного поля относительно диффузионных потерь. Увеличение $|D|$ сверх порога возбуждения усиливает генерацию и может приводить к усложнению нелинейного режима. Параметр σ регулирует обратное воздействие эволюционирующей токовой спиральности на магнитное поле. Эта обратная связь имеет свои времена релаксации и переноса, поэтому способна вызывать модуляцию амплитуды и периода динамо-волн. В предшествующих работах [11, 12] в модели были обнаружены области регулярных, модулированных и хаотических колебаний на плоскости (D,σ), причем при малом σ преобладали регулярные режимы. Вместе с тем монотонное усиление хаотичности при увеличении любого из этих параметров заранее не очевидно.

Возможны девять сочетаний управляющих параметров $D \in \{-5000, -7500, -11250\}$ и $\sigma \in \{4, 8, 16\}$, охватывающих различные типы временного поведения модели, при зафиксированных остальных: $R_\alpha = 2$, $\mu = 3$, $T = 6.3$, $\kappa_t = 0.1$. Расчеты проводятся до $t = 1000$; при статистической обработке исключается начальный интервал $t < 50$. Пространственные производные аппроксимируются конечными разностями четвертого порядка на равномерной сетке, содержащей 301 узел. Интегрирование по времени выполняется адаптивным методом обратного дифференцирования (BDF) с относительным и абсолютным допусками 10^{-5} и 10^{-10} соответственно и ограничением шага 0.01. В качестве индикатора активности используется энергия дипольной составляющей тороидального поля:

$$E_\phi^D(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi [B_\phi^D(\theta,t)]^2 \sin\theta d\theta, \qquad B_\phi^D(\theta,t) = \frac{B_\phi(\theta,t) - B_\phi(\pi-\theta,t)}{2}.$$

Такой выбор позволяет исследовать внутреннюю динамику модели без дополнительных предположений о формировании солнечных пятен и пересчете магнитного поля в число Вольфа.

На рисунке 1 представлены фрагменты соответствующих временных рядов наблюдений числа солнечных пятен — Sunspot Number (SSN). При $D = -5000$, $\sigma = 4$ видна почти повторяющаяся последовательность групп циклов с плавным изменением амплитуды. При увеличении σ эта упорядоченность ослабевает: появляются нерегулярные изменения высоты максимумов, продолжительности циклов и глубины минимумов.

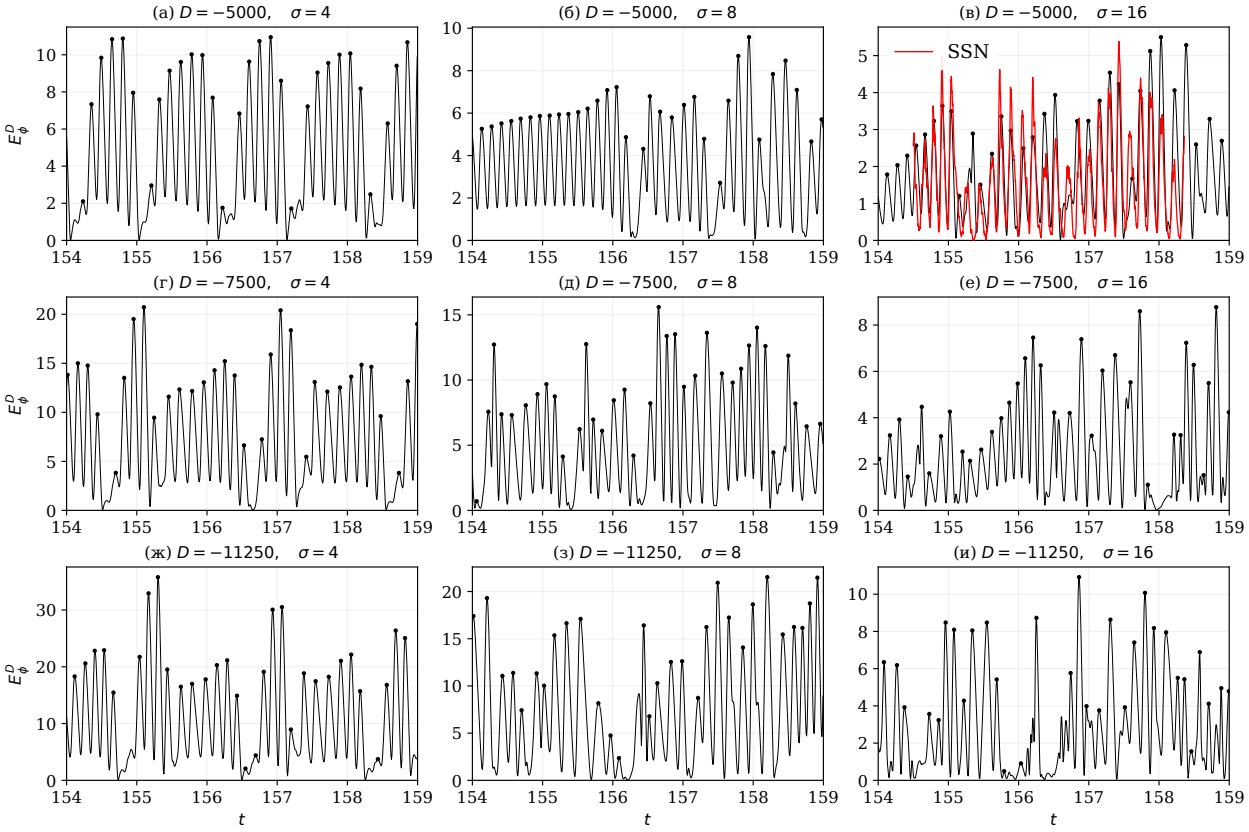

Рис. 1. Временные ряды энергии дипольной составляющей тороидального поля для различных D и σ; точками отмечены максимумы выделенных циклов; дополнительная кривая на панели (*в*) показывает масштабированный ряд SSN

Увеличение $|D|$ сопровождается ростом характерной энергии, усилением модуляции амплитуды и усложнением последовательности циклов. При этом повышение σ уменьшает характерную амплитуду, хотя временно́е поведение становится менее регулярным.

Таким образом, выбранные параметры позволяют проследить изменение поведения от близкого к квазипериодическому до существенно нерегулярного, характерного для хаотических режимов. Во всех рассмотренных вариантах сохраняется выраженная циклическая составляющая, за исключением случая, где циклы просматриваются редко (см. Рис. 1*и*). При этом снижение амплитуды с ростом σ не означает повышения регулярности колебаний. Магнитная обратная связь влияет как на уровень насыщения, так и на модуляцию циклов, поскольку токовая спиральность сама эволюционирует во времени.

Для количественного описания рядов выделяются отдельные циклы с границами в минимумах между соседними принятыми максимумами. При отборе учитываются выраженность и взаимное расстояние пиков; если их ширина на половине выраженности меньше 0.2 локального медианного периода, они исключаются. Это позволяет не считать отдельными циклами кратковременные выступы на фоне основного колебания. Ограничение по абсолютной амплитуде не вводится, поэтому слабые, но достаточно продолжительные циклы сохраняются.

На рисунке 1*в* также приведен наблюдательный ряд SSN из базы WDC-SILSO Королевской обсерватории Бельгии [20]. Для сопоставления изменены масштаб времени и амплитуда ряда SSN, а его положение выбрано путем поиска наиболее коррелированного фрагмента модельного ряда. Масштабирование амплитуды выполнено без вычитания среднего. Такое наложение показывает сходство формы отдельных последовательностей циклов. Однако точного воспроизведения наблюдаемой последовательности солнечных циклов от данной модели не требуется. Более содержательной целью является поиск режима, согласующегося с наблюдениями по статистическим характеристикам циклов. Для этого прежде всего необходимо установить, как распределения этих характеристик зависят от параметров модели.

3.1. Статистический анализ

Каждый выделенный цикл i имеет период T_i, амплитуду A_i и фазовое отклонение максимума δ_i от некоторого опорного монохроматического сигнала. Периодом цикла считается интервал между ограничивающими минимумами, а амплитуда определяется как превышение максимума над средним уровнем этих минимумов. Фазовое отклонение вычисляется относительно гармонического сигнала с периодом главного спектрального пика T_{spec}. Для каждого сочетания параметров используется собственный спектральный период, найденный по всему анализируемому интервалу.

На рисунке 2 показаны нормированные распределения трех характеристик. Распределения периодов

сохраняют выраженный максимум во всех рассмотренных режимах. Следовательно, нелинейность не уничтожает характерный временной масштаб циклов. При $\sigma = 4$ максимум наиболее узкий, а увеличение σ сопровождается его расширением и смещением к меньшим периодам. Изменение динамо-числа также влияет на положение и форму распределения, однако характерная продолжительность циклов меняется заметно слабее, чем их амплитуда.

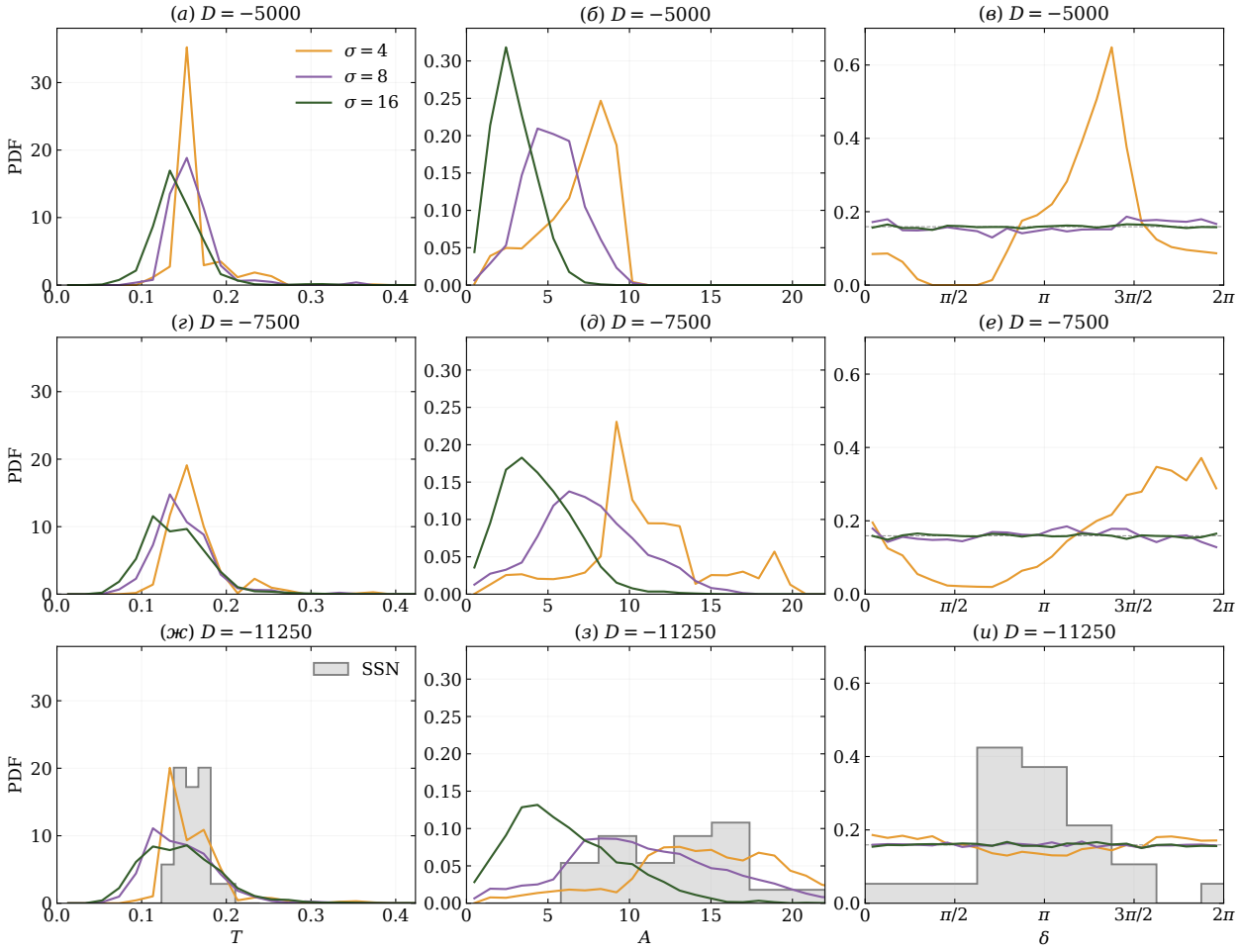

Рис. 2. Плотности распределений (PDF) периода T, амплитуды A и фазового отклонения δ для различных D и σ; гистограммы в нижнем ряду показаны для масштабированных распределений SSN

Амплитудные распределения существенно чувствительнее к параметрам. С ростом $|D|$ они смещаются к бо́льшим значениям и расширяются. При фиксированном D увеличение σ, напротив, сдвигает основную часть распределения к меньшим амплитудам, что согласуется с усилением магнитной обратной связи. Неоднородность распределений при малом σ отражает повторение выделенных уровней активности, а при более нерегулярных режимах распределения сглаживаются.

Отклонения фазы циклов, отражающие степень их синхронизации с некоторым чисто гармоническим процессом, дополняют эту картину. При $\sigma = 4$ и двух меньших значениях $|D|$ распределения имеют четкий максимум, то есть появляется выделенное отклонение фазы относительно опорной гармоники, что указывает на слабую фазовую модуляцию. Для остальных режимов распределение значительно ближе к равномерному, выраженное предпочтение отдельных фаз отсутствует, что является проявлением хаоса вследствие нелинейности солнечного динамо.

Для сопоставления в нижнем ряду рисунка 2 показаны распределения по 24 полным циклам SSN. Периоды SSN масштабированы по отношению средних периодов модели при $D = -11250$, $\sigma = 4$ и наблюдений, а амплитуды приведены к диапазону A модельного ряда. Используются только множители без постоянного сдвига, поэтому сравниваются форма и относительная ширина распределений. Для фаз SSN принят опорный период 11.07 года и постоянный сдвиг, обеспечивающий выборочное среднее $\delta = \pi$. При этом модельные фазы определяются по их спектральным периодам. Небольшой объем наблюдательной выборки ограничивает точность сопоставления.

Тем не менее можно видеть, что распределение периодов SSN сосредоточено в более узком диапазоне, чем модельные распределения на рисунке 2*а*,*г*,*ж*. Даже при $\sigma = 4$ относительный разброс периодов модели примерно вдвое превышает наблюдаемый. Следовательно, после согласования средних периодов сохраняется различие в устойчивости продолжительности отдельных циклов. Амплитуды изменяются значительно сильнее периодов как в наблюдениях, так и в модели, однако относительный разброс модельных амплитуд также больше. При

увеличении σ это различие усиливается. Отдельные выступы гистограммы SSN не следует интерпретировать как устойчивые особенности распределения ввиду малого числа наблюдаемых циклов.

Наиболее заметное качественное различие проявляется в фазовых распределениях: максимумы SSN концентрируются в ограниченной части опорного периода, тогда как для всех трех модельных режимов нижнего ряда фазы распределены почти равномерно. Центрирование наблюдательных фаз на π определяет только положение распределения и не создает самой концентрации. Вместе с тем для SSN и модели использованы разные способы выбора опорного периода, а длины рядов существенно различаются. Поэтому представленное сопоставление характеризует фазовую упорядоченность в пределах доступных интервалов, но не свидетельствует о наличии внешней синхронизации. Таким образом, сходство отдельных фрагментов на рисунке 1 не означает совпадения статистических свойств: при $D = -11250$ модель сохраняет цикличность, но дает более сильную изменчивость длительности и амплитуды циклов, чем SSN. Это расхождение относится к выбранным режимам и применяемому энергетическому индикатору активности. Для проверки модели на уровне наблюдаемой величины необходимо также учитывать связь магнитного поля с числом пятен; простое масштабирование энергии этой связи не устанавливает. Результаты показывают, что модель динамо в режиме сильной нелинейности воспроизводит квазипериодические осцилляции со случайной фазой циклов, что не наблюдается в представленном ряде из 24 полных циклов или в других более длинных реконструированных аналогах солнечной активности [21].

3.2. Спектральный анализ

Распределения характеристик отдельных циклов не описывают порядок их следования и медленные изменения активности. Для выявления соответствующих временных масштабов следует рассматривать спектральный состав энергии E_ϕ^D и токовой спиральности χ^c, обеспечивающей динамическую обратную связь в модели.

Для энергии вычисляется спектральная плотность мощности временного ряда. Для спиральности временные спектры определяются отдельно на каждой широте, после чего их мощности интегрируются с весом $\sin\theta$. Перед преобразованием Фурье вычитается временно́е среднее и применяется окно Ханна. На рисунке 3 спектры представлены с усреднением по логарифмическим частотным полосам, без нормировки на максимум.

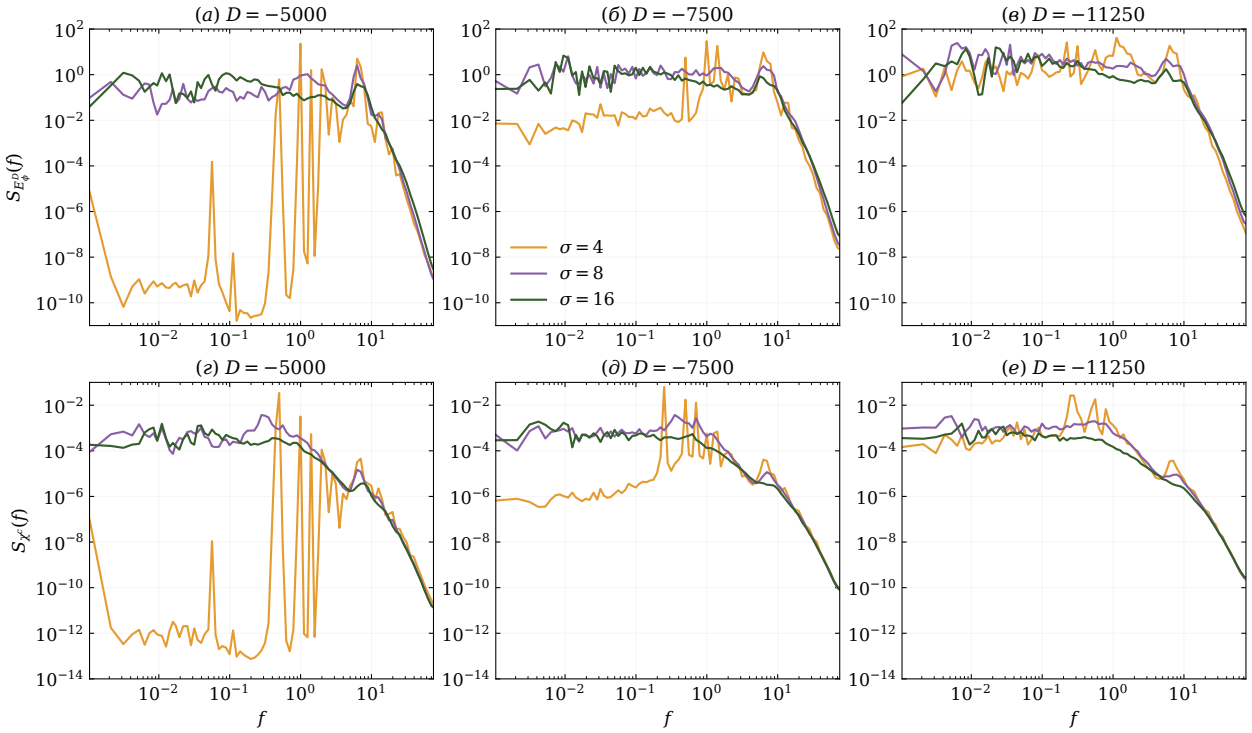

Рис. 3. Спектры энергии дипольной составляющей тороидального поля (верхний ряд) и токовой спиральности (нижний ряд) для различных D и σ

При $D = -5000$, $\sigma = 4$ в спектре отчетливо выражены отдельные пики. Такая структура согласуется с почти регулярной модуляцией, наблюдаемой во временном ряду. При увеличении σ возникает значительная широкополосная составляющая, особенно в области низких частот. Она отражает нерегулярные изменения амплитуды на временах, существенно превышающих продолжительность отдельного цикла.

Увеличение $|D|$ также усиливает широкополосную составляющую: при наибольшем рассмотренном $|D|$ она присутствует для всех трех значений σ. Вместе с тем сохраняется спектральный максимум, связанный с характерным масштабом циклов. Таким образом, переход к нерегулярному поведению сопровождается сочетанием устойчивой циклической составляющей и медленной непериодической модуляции.

Аналогичные изменения наблюдаются в спектрах токовой спиральности. При малых $|D|$ и σ преобладают

отдельные пики, тогда как в нерегулярных режимах мощность распределяется по широкому диапазону частот. Это показывает, что модуляция затрагивает как магнитную энергию, так и переменную, определяющую нелинейную обратную связь. Поэтому нерегулярное поведение следует рассматривать как свойство их совместной эволюции, но сходство спектров само по себе еще не позволяет установить фазовые соотношения между ними.

Совместное рассмотрение временных рядов, распределений и спектров выявляет переход от упорядоченной модуляции к широкополосному нерегулярному режиму. Поскольку коэффициенты модели постоянны и внешнее случайное воздействие отсутствует, такая модуляция возникает за счет внутренней нелинейной динамики. Это согласуется с картиной динамического хаоса, хотя его строгая идентификация требует дополнительных характеристик, например оценки старшего показателя Ляпунова [22].

3.3. Особенности численного моделирования

При вычислении функций подавления необходимо отдельно обрабатывать область нулевого и малого магнитного поля. При $B=0$ исходные выражения содержат формальные неопределенности, а при малом B вычитание близких чисел в $1-\arctan(B)/B$ приводит к потере значащих цифр. Эти особенности обусловлены формой записи функций, а не сингулярностью модели, так как функции непрерывно продолжаются значениями $\phi_c(0)=\phi_v(0)=L(0)=1$.

Если ввести обозначение $z=B^2$, то при $0\leqslant z<10^{-4}$ функцию ϕ_c можно вычислить по усеченному ряду:

$$\phi_c(B)\simeq 1-\frac{3}{5}z+\frac{3}{7}z^2-\frac{1}{3}z^3+\frac{3}{11}z^4,$$

а при $z\geqslant 10^{-4}$ использовать исходное выражение для ϕ_c. При больших z непосредственный расчет L также связан с вычитанием близких по величине крупных слагаемых. Поэтому при $z>50$ применяется ряд:

$$L(B)\simeq\sum_{k=1}^{7}\frac{2(-1)^{k+1}}{k+2}z^{-k}.$$

Абсолютная погрешность усечения рядов без учета ошибок округления не превышает 10^{-20} для ϕ_c и 10^{-14} для ϕ_v. Малая добавка к z устраняет лишь часть затруднений и не предотвращает потери точности при вычитании близких величин. Возникающие при неустойчивом вычислении функций выбросы могут искажать отбор максимумов и статистику циклов. Поэтому использование разложений существенно для достоверной интерпретации нерегулярных режимов.

Зависимость распределений от объема выборки позволяет оценить, насколько выводы об изменчивости циклов устойчивы при разной длительности расчета. Для этой проверки рассмотрен центральный вариант расчета при $D=-7500$, $\sigma=8$, $R_\alpha=2$ на отрезке времени $50\leqslant t\leqslant 1000$, на котором выделены 6400 циклов.

На рисунке 4 приведены нормированные плотности распределения T, A и δ по последним $N=50,100,200,400,800,1600,3200,6400$ циклам. Можно видеть, что при увеличении объема выборки распределения стабилизируются. При этом распределение фазового отклонения приближается к равномерному, что означает отсутствие выраженной концентрации максимумов относительно выбранной опорной гармоники. Таким образом, локальная фазовая упорядоченность в этом режиме ослабевает при увеличении длины ряда, хотя характерный период и циклическая составляющая сохраняются. Этот результат относится к выбранной опорной гармонике и не определяет возможность синхронизации модели при помощи внешнего воздействия.

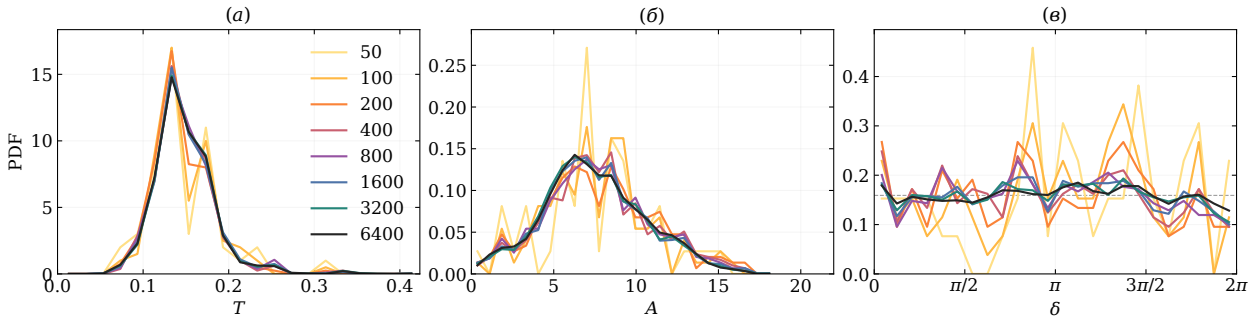

Рис. 4. Распределения периода T ($а$), амплитуды A ($б$) и фазового отклонения δ ($в$) по последним N циклам при $D=-7500$, $\sigma=8$, $R_\alpha=2$

Для контрольного режима разброс оценок распределений находится по гистограммам в непересекающихся последовательных блоках. Для каждого $N=50,100,200,400,800$ последние 6400 циклов разделяются на $M=6400/N$ блоков по N циклов. Для количественной оценки разброса можно использовать выражение среднеквадратического отклонения (RMS):

$$\mathrm{RMS}(N)=\left[\frac{1}{MJ}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{J}(p_{mj}-\overline{p}_j)^2\right]^{1/2},\qquad \overline{p}_j=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}p_{mj},$$

где p_{mj} — плотность в j-м интервале гистограммы для m-го блока, а J — число интервалов. Вычисленные $\mathrm{RMS}(N)$ для каждой из характеристик, представленных на рисунке 4, уменьшаются приблизительно по закону $N^{-1/2}$. Это свидетельствует о стабилизации оценок по мере накопления циклов, но не доказывает их независимость и не заменяет проверку сходимости решения по сетке и допускам интегрирования. Для сопоставления с коротким наблюдательным рядом длительный расчет позволяет сформировать множество модельных фрагментов одинаковой с ним длины и оценить, насколько получаемые характеристики типичны для данного режима.

4. Заключение

Параметрическое исследование модифицированной модели солнечного динамо показывает, что динамическая обратная связь через токовую спиральность совместима с сохранением выраженной цикличности при существенной нерегулярности отдельных циклов. В изученных режимах рост $|D|$ повышает характерный уровень магнитной энергии, а увеличение σ его уменьшает; оба изменения сопровождаются усилением нерегулярной модуляции. Таким образом, уровень насыщения и степень упорядоченности колебаний являются разными характеристиками нелинейного динамо. Широкополосная составляющая присутствует в спектрах как магнитной энергии, так и токовой спиральности, что указывает на перестройку динамики обеих связанных переменных.

Полученные результаты развивают исследования модели со спиральностной обратной связью [11, 12] со смещением внимания с воспроизведения конкретной последовательности активности на статистику длительных автономных расчетов. Сходство выбранного модельного фрагмента с рядом SSN не обеспечивает согласования распределений: при $D = -11250$ рассмотренные режимы дают относительный разброс периодов и амплитуд, превышающий наблюдаемый. Это ограничение относится к выбранным параметрам и сопоставлению магнитной энергии с числом пятен. Для проверки модели на уровне наблюдаемой величины необходимо учитывать преобразование магнитного поля в индекс активности, как это делается в работе [11], и оценивать при этом неопределенность, обусловленную малым числом наблюдаемых циклов.

В более общем контексте результаты относятся к вопросу о соотношении детерминированных и случайных механизмов солнечной изменчивости. Возможность внутренней нерегулярности в нелинейном динамо известна из работы [6], тогда как в работах [4, 8] существенные свойства изменчивости воспроизводятся при случайном воздействии на слабонелинейные колебания. Рассмотренная в работе система воспроизводит модуляцию при отсутствии внешнего шума, но это не означает преобладание такого механизма на Солнце. Разграничение механизмов требует одновременного согласования с наблюдениями амплитудной, временной и фазовой статистики, а не только спектрального максимума на масштабе цикла.

Фазовый анализ связывает настоящие результаты с исследованиями синхронизации. Численный эксперимент [15] показал, что периодическое воздействие может обеспечить устойчивую фазовую привязку даже при хаотическом режиме нелинейного динамо. В предлагаемой постановке внешняя опорная частота отсутствует, а фазы вычисляются относительно гармоники, выбранной по самому сигналу. Поэтому концентрация этих фаз не может являться следствием синхронизации, а отражает поведение, близкое к гармоническому. Дискуссия об устойчивости фазы солнечного цикла [16, 17] дополнительно подчеркивает значение длины ряда и способа идентификации циклов. Полученные в данной работе результаты показывают, как зависимость от длины выборки проявляется в конкретной нелинейной модели, но не разрешают спор об интерпретации наблюдательных данных.

Длительные расчеты позволяют отделить устойчивые особенности распределений от свойств коротких фрагментов. В контрольном режиме разброс гистограмм уменьшается приблизительно как $N^{-1/2}$, а локальная концентрация фаз ослабевает при накоплении циклов. Следующий этап проверки модели должен включать сравнение с наблюдениями на выборках одинаковой длины и с согласованной фазовой диагностикой. Наряду с учетом связи магнитного поля с числом пятен это позволит установить, можно ли воспроизвести наблюдаемую степень изменчивости солнечной активности за счет собственной динамики модели или потребуются дополнительные физические механизмы.

Исследование поддержано Российским научным фондом (грант № 21-72-20067-П).

Литература

1. *Parker E.N.* Hydromagnetic dynamo models // The Astrophysical Journal. 1955. Vol. 122. P. 293–314. DOI: 10.1086/146087
2. *Steenbeck M.*, *Krause F.*, *Rädler K.-H.* Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflußter Bewegung // Zeitschrift für Naturforschung A. 1966. Vol. 21, no. 4. P. 369–376. DOI: 10.1515/zna-1966-0401
3. *Краузе Ф.*, *Рэдлер К.-Х.* Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. Мир, 1984
4. *Cameron R.H.*, *Schüssler M.* Solar activity: periodicities beyond 11 years are consistent with random forcing // Astronomy & Astrophysics. 2019. Vol. 625. A28. DOI: 10.1051/0004-6361/201935290
5. *Stepanov R.*, *Kuzanyan K.M.*, *Obridko V.* Wavelet analysis of temporal fluctuations of the solar polar magnetic field // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2026. Vol. 550, no. 1. stag1040. DOI: 10.1093/mnras/stag1040
6. *Weiss N.O.*, *Cattaneo F.*, *Jones C.A.* Periodic and aperiodic dynamo waves // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 1984. Vol. 30, no. 4. P. 305–341. DOI: 10.1080/03091928408219262

ISSN: 1999-6691 e-ISSN: 2782-3709 DOI: 10.7242/1999-6691/2026.19.3.28

7. *Pipin V.V.*, *Sokoloff D.D.*, *Usoskin I.G.* Variations of the solar cycle profile in a solar dynamo with fluctuating dynamo governing parameters // Astronomy & Astrophysics. 2012. Vol. 542. A26. DOI: 10.1051/0004-6361/201118733
8. *Cameron R.H.*, *Schüssler M.* Understanding solar cycle variability // The Astrophysical Journal. 2017. Vol. 843, no. 2. 111. DOI: 10.3847/1538-4357/aa767a
9. *Pouquet A.*, *Frisch U.*, *Léorat J.* Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect // Journal of Fluid Mechanics. 1976. Vol. 77, no. 2. P. 321–354. DOI: 10.1017/S0022112076002140
10. *Kleeorin N.I.*, *Ruzmaikin A.A.* Dynamics of the average turbulent helicity in a magnetic field // Magnetohydrodynamics. 1982. Vol. 18, no. 2. P. 116–122.
11. *Kleeorin Y.*, *Safiullin N.*, *Kleeorin N.*, *Porshnev S.*, *Rogachevskii I.*, *Sokoloff D.* The dynamics of Wolf numbers based on nonlinear dynamos with magnetic helicity: comparisons with observations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. Vol. 460, no. 4. P. 3960–3967. DOI: 10.1093/mnras/stw1267
12. *Safiullin N.*, *Kleeorin N.*, *Porshnev S.*, *Rogachevskii I.*, *Ruzmaikin A.* Nonlinear mean-field dynamo and prediction of solar activity // Journal of Plasma Physics. 2018. Vol. 84, no. 3. 735840306. DOI: 10.1017/S0022377818000600
13. *Kleeorin N.*, *Kuzanyan K.*, *Safiullin N.*, *Rogachevskii I.*, *Obridko V.*, *Porshnev S.*, *Stepanov R.* Forecast of solar activity based on mean-field dynamo model and neural network // Astronomical and Astrophysical Transactions. 2024. Vol. 34, no. 4. P. 371–388. arXiv: 2411.10380 [astro-ph.SR]
14. *Stefani F.*, *Giesecke A.*, *Weier T.* A model of a tidally synchronized solar dynamo // Solar Physics. 2019. Vol. 294, no. 5. 60. DOI: 10.1007/s11207-019-1447-1
15. *Степанов Р.А.*, *Гладких А.В.*, *Ташкинов Г.А.* Эффект синхронизации в нелинейной модели солнечного динамо // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2025. Т. 89, № 7. С. 1149–1153. DOI: 10.7868/s3034646025070224
16. *Weisshaar E.*, *Cameron R.H.*, *Schüssler M.* No evidence for synchronization of the solar cycle by a “clock” // Astronomy & Astrophysics. 2023. Vol. 671. A87. DOI: 10.1051/0004-6361/202244997
17. *Stefani F.*, *Beer J.*, *Weier T.* No Evidence for Absence of Solar Dynamo Synchronization // Solar Physics. 2023. Vol. 298, no. 6. 83. DOI: 10.1007/s11207-023-02174-x
18. *Zhang H.*, *Moss D.*, *Kleeorin N.*, *Kuzanyan K.*, *Rogachevskii I.*, *Sokoloff D.*, *Gao Y.*, *Xu H.* Current Helicity of Active Regions as a Tracer of Large-scale Solar Magnetic Helicity // The Astrophysical Journal. 2012. Vol. 751, no. 1. 47. DOI: 10.1088/0004-637X/751/1/47
19. *Jouve L.*, *Brun A.S.*, *Arlt R.*, *et al.* A solar mean field dynamo benchmark // Astronomy & Astrophysics. 2008. Vol. 483, no. 3. P. 949–960. DOI: 10.1051/0004-6361:20078351
20. *WDC-SILSO, Royal Observatory of Belgium*. Sunspot Number: 13-month smoothed monthly total sunspot number, version 2.0. 2015. DOI: 10.24414/qnza-ac80
21. *Stefani F.*, *Stepanov R.*, *Weier T.* Shaken and Stirred: When Bond Meets Suess–de Vries and Gnevyshev–Ohl // Solar Physics. 2021. Vol. 296, no. 6. 88. DOI: 10.1007/s11207-021-01822-4
22. *Фрик П.Г.* Турбулентность: подходы и модели. 2-е изд. М.: R&C Dynamics, 2010. 330 с.

Сведения об авторах:

Ташкинов Георгий Алексеевич (корр.), асп., Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: tashkinov-ga@mail.ru; ORCID: 0009-0009-0117-9632

Гладких Андрей Валерьевич, асп., Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: andrey.gladckih2017@yandex.ru; ORCID: 0009-0003-1692-3846

Степанов Родион Александрович, дфмн, внс, Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: rodion@icmm.ru; ORCID: 0000-0001-8098-0720

Research article

Analysis of irregular behavior in the solar magnetic activity cycle

***G.A. Tashkinov*[1,2], *A.V. Gladkikh*[1,2], *R.A. Stepanov*[1,2]**

[1] *Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation*
[2] *Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS, Perm, Russian Federation*

We numerically investigate the irregular behavior of the nonlinear solar dynamo model incorporating algebraic quenching of the α-effect and dynamical feedback via the small-scale current helicity. Numerically stable computation of quenching functions is provided by using asymptotic expansions which makes it possible to eliminate catastrophic cancellation. A parametric study is carried out to examine how the dynamo number and the magnetic contribution to the α-effect influence the statistical and spectral characteristics of cycles. Distributions of cycle amplitudes, periods, and peak

phase offsets are determined based on the long time series of the energy of the dipolar component of the toroidal magnetic field. It is shown that the inherent model dynamics generates irregular modulation without external stochastic forcing while retaining distinct cyclicity. The increasing complexity of its behavior leads to the appearance of broadband components in both energy and current helicity spectra. Comparison with the number of sunspots shows that similarity of individual cyclic sequences does not guarantee agreement between their statistical distributions: at the largest of the examined dynamo-number magnitudes the relative variability of periods and amplitudes exceeds the observed range. The interpretation of differences requires accounting for the limited observational sampling and the relationship between magnetic energy and the activity index. The stability of statistical estimates is investigated as the number of analyzed cycles increases. In the reference case, the distributions stabilize, while the local concentration of phases weakens. The variability of histograms across consecutive blocks decreases approximately in inverse proportion to the square root of the number of cycles. These results demonstrate the necessity of long-term integration to reliably estimate the cycle variability and phase coherence.

Keywords: solar cycle, nonlinear dynamo model, numerical simulations, chaotic dynamics, alpha-effect

Received: 21.11.2025 / *Accepted:* 12.12.2025 / *Published online:* 31.10.2026

Acknowledgements

The research was supported by the Russian Science Foundation (grant No. 21-72-20067).

References

1. *Parker E.N.* Hydromagnetic dynamo models. The Astrophysical Journal. 1955. Vol. 122. P. 293–314. DOI: 10.1086/146087
2. *Steenbeck M.*, *Krause F.*, *Rädler K.-H.* Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflußter Bewegung. Zeitschrift für Naturforschung A. 1966. Vol. 21, no. 4. P. 369–376. DOI: 10.1515/zna-1966-0401
3. *Krause F.*, *Rädler K.-H.* Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Pergamon Press, 1980. DOI: 10.1016/C2013-0-03269-0
4. *Cameron R.H.*, *Schüssler M.* Solar activity: periodicities beyond 11 years are consistent with random forcing. Astronomy & Astrophysics. 2019. Vol. 625. A28. DOI: 10.1051/0004-6361/201935290
5. *Stepanov R.*, *Kuzanyan K.M.*, *Obridko V.* Wavelet analysis of temporal fluctuations of the solar polar magnetic field. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2026. Vol. 550, no. 1. stag1040. DOI: 10.1093/mnras/stag1040
6. *Weiss N.O.*, *Cattaneo F.*, *Jones C.A.* Periodic and aperiodic dynamo waves. Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 1984. Vol. 30, no. 4. P. 305–341. DOI: 10.1080/03091928408219262
7. *Pipin V.V.*, *Sokoloff D.D.*, *Usoskin I.G.* Variations of the solar cycle profile in a solar dynamo with fluctuating dynamo governing parameters. Astronomy & Astrophysics. 2012. Vol. 542. A26. DOI: 10.1051/0004-6361/201118733
8. *Cameron R.H.*, *Schüssler M.* Understanding solar cycle variability. The Astrophysical Journal. 2017. Vol. 843, no. 2. 111. DOI: 10.3847/1538-4357/aa767a
9. *Pouquet A.*, *Frisch U.*, *Léorat J.* Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect. Journal of Fluid Mechanics. 1976. Vol. 77, no. 2. P. 321–354. DOI: 10.1017/S0022112076002140
10. *Kleeorin N.I.*, *Ruzmaikin A.A.* Dynamics of the average turbulent helicity in a magnetic field. Magnetohydrodynamics. 1982. Vol. 18, no. 2. P. 116–122.
11. *Kleeorin Y.*, *Safiullin N.*, *Kleeorin N.*, *Porshnev S.*, *Rogachevskii I.*, *Sokoloff D.* The dynamics of Wolf numbers based on nonlinear dynamos with magnetic helicity: comparisons with observations. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2016. Vol. 460, no. 4. P. 3960–3967. DOI: 10.1093/mnras/stw1267
12. *Safiullin N.*, *Kleeorin N.*, *Porshnev S.*, *Rogachevskii I.*, *Ruzmaikin A.* Nonlinear mean-field dynamo and prediction of solar activity. Journal of Plasma Physics. 2018. Vol. 84, no. 3. 735840306. DOI: 10.1017/S0022377818000600
13. *Kleeorin N.*, *Kuzanyan K.*, *Safiullin N.*, *Rogachevskii I.*, *Obridko V.*, *Porshnev S.*, *Stepanov R.* Forecast of solar activity based on mean-field dynamo model and neural network. Astronomical and Astrophysical Transactions. 2024. Vol. 34, no. 4. P. 371–388. eprint: 2411.10380
14. *Stefani F.*, *Giesecke A.*, *Weier T.* A model of a tidally synchronized solar dynamo. Solar Physics. 2019. Vol. 294, no. 5. 60. DOI: 10.1007/s11207-019-1447-1
15. *Stepanov R.A.*, *Gladkikh A.V.*, *Tashkinov G.A.* Synchronization effect in a nonlinear solar dynamo model. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2025. Vol. 89, no. 7. P. 1170–1174. DOI: 10.1134/S1062873825711882
16. *Weisshaar E.*, *Cameron R.H.*, *Schüssler M.* No evidence for synchronization of the solar cycle by a "clock". Astronomy & Astrophysics. 2023. Vol. 671. A87. DOI: 10.1051/0004-6361/202244997
17. *Stefani F.*, *Beer J.*, *Weier T.* No Evidence for Absence of Solar Dynamo Synchronization. Solar Physics. 2023. Vol. 298, no. 6. 83. DOI: 10.1007/s11207-023-02174-x

©Authors 2026 Translation of the original article in Russian This is an open access article under the CC BY 4.0 license

18. *Zhang H.*, *Moss D.*, *Kleeorin N.*, *Kuzanyan K.*, *Rogachevskii I.*, *Sokoloff D.*, *Gao Y.*, *Xu H.* Current Helicity of Active Regions as a Tracer of Large-scale Solar Magnetic Helicity. The Astrophysical Journal. 2012. Vol. 751, no. 1. 47. DOI: 10.1088/0004-637X/751/1/47

19. *Jouve L.*, *Brun A.S.*, *Arlt R.*, *et al.* A solar mean field dynamo benchmark. Astronomy & Astrophysics. 2008. Vol. 483, no. 3. P. 949–960. DOI: 10.1051/0004-6361:20078351

20. *WDC-SILSO, Royal Observatory of Belgium*. Sunspot Number: 13-month smoothed monthly total sunspot number, version 2.0. 2015. DOI: 10.24414/qnza-ac80

21. *Stefani F.*, *Stepanov R.*, *Weier T.* Shaken and Stirred: When Bond Meets Suess–de Vries and Gnevyshev–Ohl. Solar Physics. 2021. Vol. 296, no. 6. 88. DOI: 10.1007/s11207-021-01822-4

22. *Frik P.G.* Turbulentnost': podkhody i modeli. 2nd ed. M.: R&C Dynamics, 2010. 330 p.