

Научная статья

Граничные интегральные уравнения первого рода с гладкими ядрами в динамических задачах ортотропной теории упругости

А.О. Ватульян^{1,2}, В.М. Шамшин³

¹ Южный математический институт, Владикавказ, Российская Федерация.

² Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация.

³ Ростовский-на-Дону колледж связи и информатики, Ростов-на-Дону, Российская Федерация.

Рассмотрены установившиеся гармонические колебания ортотропного упругого тела в плоской постановке. Для решения краевых задач предложен метод альтернативных граничных интегральных уравнений (АГИУ) 1-го рода с гладкими ядрами, в котором условия разрешимости формулируются на характеристическом множестве дифференциального оператора без явного построения фундаментального решения. Граничная формулировка понижает размерность задачи на единицу и особенно эффективна в постановках, где неизвестными являются граничные перемещения и напряжения. В пределе нулевой частоты схема формально переходит в статический вариант АГИУ с тем же набором граничных неизвестных. Предложен способ сведения граничных уравнений к переопределённой системе линейных алгебраических уравнений; для её регуляризованного решения используется метод усечённого сингулярного разложения. Численная верификация метода выполнена на четырёх модельных задачах: для эллиптической области с заданным вектором напряжений на границе; для прямоугольной области с заделкой на одной стороне; для той же прямоугольной области со смешанными однородными граничными условиями в спектральной постановке; для эллиптической области при определении резонансных частот. Сопоставление с конечно-элементными расчётами показало, что в первой задаче расхождение по граничным перемещениям эллипса составляет 3–5%, во второй задаче при оценке максимального отклонения по компонентам – 2.7%, а в задачах определения резонансных частот максимальная относительная погрешность рассчитанных частот не превосходит 0.07% в прямоугольной области и $10^{-3}\%$ в эллиптической. Полученные результаты подтверждают вычислительную устойчивость и применимость предложенной АГИУ-схемы.

Ключевые слова: альтернативные граничные интегральные уравнения первого рода, гладкие ядра, характеристическое множество, ортотропная теория упругости, установившиеся колебания, собственные частоты, угловые особенности, регуляризация, МКЭ.

Получение: 27.06.2026 / Принятие: 08.09.2026 / Публикация онлайн: 31.10.2026

УДК 539.3:534.1:517.968.2

1. Введение

Численное моделирование колебаний анизотропных упругих тел обычно выполняется методами, требующими дискретизации всей области, например, методом конечных элементов (МКЭ). Однако в задачах, где искомые характеристики сосредоточены на границе (в смешанных краевых задачах, задачах спектральной диагностики), такой подход может быть избыточным. В подобных случаях предпочтительна граничная постановка, поскольку она на единицу понижает размерность задачи. Классический метод граничных элементов [1, 2] опирается на фундаментальные решения, которые для анизотропных сред [3], как правило, не имеют аналитического выражения и требуют специальных интегральных представлений либо разложения по плоским волнам. Вопросы корректной трактовки некорректных граничных уравнений в замкнутых областях обсуждались в [4]. Некорректность здесь понимается по Адамару: гладкость ядер, обеспечивающая аналитические преимущества такой формулировке, означает компактность соответствующего интегрального оператора. Обратный к нему оператор неограничен, вследствие этого сколь угодно малые возмущения правой части могут приводить к произвольно большим отклонениям решения, построение которого требует регуляризации, которая в данной работе обсуждается. Возможность формулировать граничные интегральные уравнения (ГИУ) без знания фундаментальных и сингулярных решений при помощи условий разрешимости на характеристическом множестве дифференциального оператора впервые отмечена в работах [5, 6]. Для динамических задач анизотропной теории упругости такой подход реализован в работах [7–10] в виде формулировки альтернативных граничных интегральных уравнений (АГИУ) 1-го рода с гладкими ядрами. В настоящей статье предлагается эффективная дискретная схема численного решения системы АГИУ и приводятся результаты её верификации путем сравнения с решением МКЭ.

Для плоских колебаний ортотропного тела построена система АГИУ и разработана её вычислительная реализация. Предложена схема дискретизации и регуляризованного решения, основанная на обобщённой регуляризации А.Н. Тихонова и усечённом сингулярном разложении (УСР). При этом использованы как гладкие аппроксимации искомых полей, так и локальные сингулярные элементы в угловых точках с показателями Вильямса [11]. Реализована методика выделения собственных частот по стабилизированному индикатору метода частных решений. Выполнена верификация на модельных задачах для ортотропного материала путём сопоставления с конечно-элементными расчётами авторов, описанными в разделе 5.

2. Постановка задачи

Рассмотрим установившиеся гармонические колебания ортотропного тела в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Оси ортотропии совпадают с осями x_1, x_2 . Временная зависимость имеет вид: $e^{-i\omega t}$, где ω — циклическая частота колебаний, t — время, i — мнимая единица ($i^2 = -1$). Запишем закон Гука при плоском напряжённом состоянии [12]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, и уравнения движения:

$$\begin{cases} C_{11}u_{1,11} + C_{66}u_{1,22} + (C_{12} + C_{66})u_{2,12} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\ (C_{12} + C_{66})u_{1,12} + C_{66}u_{2,11} + C_{22}u_{2,22} + \rho\omega^2 u_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Введём в рассмотрение вектор напряжений с компонентами на границе $t_j = \sigma_{ij}n_i$, где $\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}$, и сформулируем общую смешанную граничную задачу:

$$\partial\Omega = S_1 \cup S_2, \quad u_j|_{S_1} = f_j, \quad t_j|_{S_2} = g_j. \quad (3)$$

Постановка (3) позволяет исследовать как прямые смешанные задачи, так и обратные с неизвестными граничными функциями при наличии дополнительной граничной информации.

3. Вывод альтернативных граничных интегральных уравнений — АГИУ

3.1. Спектральная форма

Введём для компонент вектора перемещений преобразование Фурье по пространственной переменной $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$\hat{u}_j(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{\Omega} u_j(\mathbf{x}) e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}} dA, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Преобразование Фурье уравнений (2) с учётом формулы Грина приводит к матричному уравнению относительно трансформант

$$\mathcal{M}_{\omega}(\boldsymbol{\alpha}) \hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}), \quad (5)$$

в котором характеристическая матрица симметрична и имеет вид:

$$\mathcal{M}_{\omega} = \begin{pmatrix} \rho\omega^2 - C_{11}\alpha_1^2 - C_{66}\alpha_2^2 & -(C_{12} + C_{66})\alpha_1\alpha_2 \\ -(C_{12} + C_{66})\alpha_1\alpha_2 & \rho\omega^2 - C_{66}\alpha_1^2 - C_{22}\alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а компоненты вектора правой части (5) выражаются через граничные операторы. Введём обозначение:

$$B_{jk}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n}) = i\alpha_p C_{pjkl}n_l,$$

где суммирование выполняется по повторяющимся индексам $p, l \in \{1, 2\}$. Тогда

$$F_j(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{\partial\Omega} [B_{jk}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n})u_k - t_j] e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}} dS. \quad (7)$$

Здесь суммирование ведётся по повторяющемуся индексу $k \in \{1, 2\}$, индекс $j \in \{1, 2\}$ является свободным.

Подстановка известных граничных условий в (7) даёт явную связь с условиями (3). В смешанной постановке неизвестны t_j на S_1 и u_j на S_2 :

$$F_j(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{S_1} [B_{jk}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n})f_k - t_j] e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}} dS + \int_{S_2} [B_{jk}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{n})u_k - g_j] e^{i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}} dS. \quad (8)$$

Случай $S_1 = \partial\Omega$ соответствует первой граничной задаче теории упругости (неизвестны t_j), случай $S_2 = \partial\Omega$ — второй краевой задаче (неизвестны u_j). Форма АГИУ при этом сохраняется, изменяется лишь состав неизвестных.

3.2. Характеристическое множество

Компоненты перемещений будем рассматривать как достаточно регулярные функции, отличные от нуля лишь в ограниченной области Ω и продолженные нулём вне её. По теореме Пэли–Винера [13] преобразования Фурье (4) таких функций с вещественных значений $\alpha \in \mathbb{R}^2$ распространяются на комплексные $\alpha \in \mathbb{C}^2$ и оказываются целыми функциями переменных α_1, α_2 . Они аналитичны всюду (наподобие многочленов и экспоненты), а значит, не имеют ни полюсов, ни иных особых точек. Таким образом, вектор трансформант $\hat{\mathbf{u}}(\alpha)$ свободен от особенностей при любых $\alpha \in \mathbb{C}^2$. Именно это свойство лежит в основе дальнейшего вывода. Обратную матрицу удобно представить через присоединённую $\text{adj} \mathcal{M}_\omega$. Тогда $\mathcal{M}_\omega^{-1} = \text{adj} \mathcal{M}_\omega / \det \mathcal{M}_\omega$, и формальное обращение системы (5) записывается как $\hat{\mathbf{u}} = \text{adj} \mathcal{M}_\omega(\alpha) \mathbf{F}(\alpha) / \det \mathcal{M}_\omega(\alpha)$. У правой части возникают полюса в точках, где $\det \mathcal{M}_\omega(\alpha) = 0$. Устранить это противоречие для $\hat{\mathbf{u}}$ можно лишь при обращении в нуль числителя этой дроби — вектора $\text{adj} \mathcal{M}_\omega(\alpha) \mathbf{F}(\alpha)$ — на этом множестве.

Введём в рассмотрение характеристическое множество:

$$\mathcal{K}_\omega = \{\alpha \in \mathbb{C}^2 : \det \mathcal{M}_\omega(\alpha) = 0\}.$$

Для ортотропного материала его структура определяется уравнением:

$$\det \mathcal{M}_\omega = \rho^2 \omega^4 - \rho \omega^2 [(C_{11} + C_{66})\alpha_1^2 + (C_{22} + C_{66})\alpha_2^2] + D_4, \quad (9)$$

где

$$D_4 = C_{11} C_{66} \alpha_1^4 + (C_{11} C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12} C_{66}) \alpha_1^2 \alpha_2^2 + C_{22} C_{66} \alpha_2^4. \quad (10)$$

3.3. Спектральные условия

Далее рассмотрим регулярные точки простых листов характеристического множества. Случаи кратных характеристических корней требуют отдельного анализа.

С учётом введённого в подразделе 3.2 представления обратной матрицы через присоединённую условие разрешимости системы (5) с матрицей (6) на характеристическом множестве $\mathcal{K}_\omega$ принимает вид:

$$\text{adj} \mathcal{M}_\omega(\alpha) \mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{0}, \quad \alpha \in \mathcal{K}_\omega, \quad (11)$$

где для скалярной формы записи элементы матрицы (6) обозначим как M_{11}, M_{22}, M_{12} . Тогда условие разрешимости становится следующим:

$$M_{22} F_1 - M_{12} F_2 = 0, \quad -M_{12} F_1 + M_{11} F_2 = 0, \quad \alpha \in \mathcal{K}_\omega. \quad (12)$$

В регулярной точке характеристического множества ранг матрицы $\mathcal{M}_\omega(\alpha)$ равен единице. Для матрицы второго порядка это означает, что ранг присоединённой матрицы $\text{adj} \mathcal{M}_\omega(\alpha)$ также равен единице, поэтому две скалярные строки в (12) линейно зависимы, а условие (11) содержит только одно независимое скалярное уравнение.

Параметризуем множество $\mathcal{K}_\omega$ набором компонент $\alpha^{(s)}(\tau)$, где τ — параметр вдоль соответствующей ветви характеристического множества. Требование выполнения условия (11) на каждой компоненте приводит к системе АГИУ 1-го рода с гладкими ядрами:

$$\text{adj} \mathcal{M}_\omega(\alpha^{(s)}(\tau)) \mathbf{F}(\alpha^{(s)}(\tau)) = \mathbf{0} \quad (s = 1, 2). \quad (13)$$

Соотношения (13) задают систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами относительно компонент перемещений и вектора напряжений на границе, которая некорректна по Адамару, что требует привлечения регуляризации при решении.

В смешанной постановке учёт в скалярных условиях (12) соотношения (8) даёт систему АГИУ относительно неизвестных t_j на S_1 и u_j на S_2 :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 (\text{adj} \mathcal{M}_\omega)_{mj} \left[\int_{S_1} t_j(\mathbf{x}) e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}} dS - \int_{S_2} B_{jk}(\alpha, \mathbf{n}) u_k(\mathbf{x}) e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}} dS \right] = \\ = \sum_{j=1}^2 (\text{adj} \mathcal{M}_\omega)_{mj} \left[\int_{S_1} B_{jk}(\alpha, \mathbf{n}) f_k(\mathbf{x}) e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}} dS - \int_{S_2} g_j(\mathbf{x}) e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}} dS \right] \quad (m = 1, 2), \quad \alpha = \alpha^{(s)}(\tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Система АГИУ (14) допускает различные варианты дискретизации. При этом термин «дискретизация» употребляется в двух различных смыслах:

— дискретизация границы — разбиение $\partial\Omega$ на участки и аппроксимация граничных функций конечным числом

коэффициентов;

— дискретизация характеристического множества — выбор конечного набора точек на его компонентах.

В настоящей работе идёт речь о дискретизации характеристического множества. Используется коллокационный подход, при котором операторные уравнения (14) удовлетворяются в выбранных точках $\alpha \in \mathcal{K}_\omega$. Альтернативой служат проекционные методы, в частности метод Галёркина.

3.4. Параметризация

Приведём структуру характеристического множества для некоторых упругих материалов. Для изображения характеристического множества введём безразмерные спектральные координаты $\xi_j = R_0 \alpha_j$ ($j = 1, 2$), где R_0 — характерный размер области, α_j — компоненты спектрального параметра преобразования Фурье (4). Частоту зададим в безразмерном виде: $\lambda_\omega = \omega R_0 \sqrt{\rho/E_2}$.

На рисунке 1 представлены вещественные ветви $\mathcal{K}_\omega$ характеристического множества при $\lambda_\omega = 1.2$. Внешняя ветвь является выпуклой, а внутренняя в зависимости от параметров материала может терять выпуклость. Кривые построены для материалов, рассматриваемых в главных осях ортотропии. Используются безразмерные параметры $\chi_E = E_1/E_2$, $\chi_G = G_{12}/E_2$, $\nu = \nu_{12}$. Здесь E_1 и E_2 — модули Юнга вдоль главных осей ортотропии x_1 и x_2 ; G_{12} — модуль сдвига в плоскости (x_1, x_2) ; ν_{12} — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечную деформацию вдоль оси x_2 при одноосном нагружении в направлении x_1 . В изотропном случае обе ветви являются концентрическими окружностями (Рис. 1а).

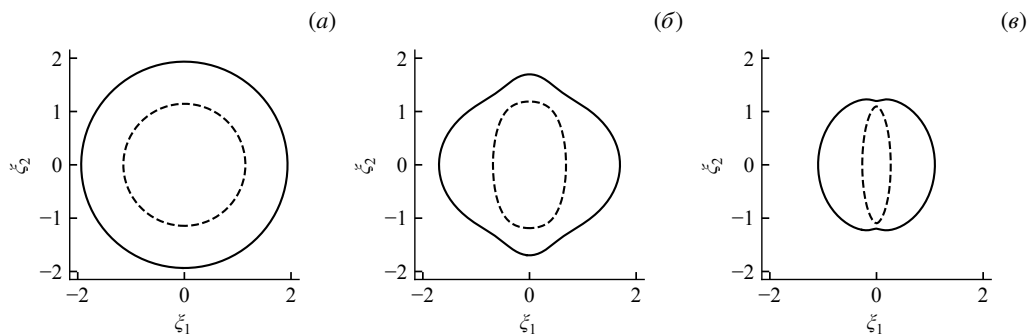


Рис. 1. Вещественные ветви характеристического множества (внешняя ветвь — сплошная линия, внутренняя ветвь — пунктирная линия) для материалов с разными свойствами: изотропный ($\chi_E = 1$, $\chi_G = 0.385$, $\nu = 0.3$) (а); ортотропный ($\chi_E = 3$, $\chi_G = 0.5$, $\nu = 0.25$) (б); древесина ($\chi_E = 20$, $\chi_G = 1.2$, $\nu = 0.35$) (е)

Характеристическое множество допускает разные параметризации. Далее используется представление в полярных координатах. При $\alpha_1 = \alpha^{(s)} \cos \theta$, $\alpha_2 = \alpha^{(s)} \sin \theta$ уравнение (9) определяет обе ветви как

$$\alpha^{(s)}(\theta) = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 [b(\theta) \pm \sqrt{b^2(\theta) - 4a(\theta)}]}{2a(\theta)}}, \quad (s = 1, 2), \quad (15)$$

где

$$a(\theta) = C_{11}C_{66}\cos^4\theta + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12}C_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta + C_{22}C_{66}\sin^4\theta, \quad (16)$$

$$b(\theta) = (C_{11} + C_{66})\cos^2\theta + (C_{22} + C_{66})\sin^2\theta. \quad (17)$$

Заметим, что альтернативой может служить декартова параметризация. При фиксировании одного из параметров ($\alpha_1 = \xi$ или $\alpha_2 = \eta$) корни биквадратного уравнения (9) задают соответственно точки или одной группы ветвей, или другой. Такая параметризация больше подходит для областей с прямолинейными участками границы. Граничные интегралы содержат множители $e^{i\alpha_1 x_1}$ и $e^{i\alpha_2 x_2}$ и допускают явное покоординатное интегрирование. Независимо от вида параметризации возможен различный выбор точек коллокации на $\mathcal{K}_\omega$, в которых выполняются условия АГИУ (13).

3.5. Статический предел

Приведённый статический переход относится к ортотропным материалам с различными корнями характеристического биквадратного уравнения. При $\omega = 0$ аналогичные рассуждения приводят к статическому варианту АГИУ. При этом характеристическое уравнение (9) сводится к однородному уравнению 4-й степени:

$$D_4(\alpha) = C_{11}C_{66}\alpha_1^4 + B\alpha_1^2\alpha_2^2 + C_{22}C_{66}\alpha_2^4 = 0, \quad B = C_{11}C_{22} - C_{12}^2 - 2C_{12}C_{66},$$

которое определяет статическое характеристическое множество ненулевых комплексных спектральных векторов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$\mathcal{K}_0 = \{\alpha \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} : D_4(\alpha) = 0\}.$$

Здесь $\mathbb{C}^2$ — пространство упорядоченных пар комплексных чисел, а $0 = (0, 0)$ — нулевой вектор. Таким образом, условие $\alpha \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ означает, что компоненты α_1, α_2 комплексные и не равны нулю одновременно.

Положительная определённости упругой энергии исключает ненулевые вещественные решения уравнения $D_4(\alpha) = 0$, то есть $\mathcal{K}_0 \cap \mathbb{R}^2 = \emptyset$. Покажем это, положив в выражении (6) $\omega = 0$. Согласно (9), $\det \mathcal{M}_0(\alpha) = D_4(\alpha)$. Для проверки положительной определённости матрицы $-\mathcal{M}_0(\alpha)$ возьмём произвольный ненулевой вещественный спектральный вектор $\alpha \in \mathbb{R}^2$ и произвольный ненулевой постоянный вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим вспомогательное линейное поле перемещений $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\alpha \cdot \mathbf{x})$. По определению малых деформаций, приведённому после выражений (1), этому полю отвечает постоянный тензор:

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{u_{i,j}^* + u_{j,i}^*}{2} = \frac{a_i \alpha_j + a_j \alpha_i}{2} \quad (i, j = 1, 2).$$

И это есть тензор деформаций вспомогательного поля, а не его преобразование Фурье. Вектор $\mathbf{a}$ задаёт направление и величину перемещений этого поля. Плотность упругой энергии $W(\varepsilon^*) = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^* / 2$ связана с характеристической матрицей равенством:

$$\mathbf{a}^T [-\mathcal{M}_0(\alpha)] \mathbf{a} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{kl}^* = 2W(\varepsilon^*) > 0.$$

Здесь суммирование выполняется по повторяющимся индексам от 1 до 2. При ненулевых вещественных $\mathbf{a}$ и α тензор ε^* ненулевой, поэтому строгое неравенство вытекает из положительной определённости упругой энергии. Следовательно, матрица $-\mathcal{M}_0(\alpha)$ положительно определена, а её определитель $D_4(\alpha)$ положителен при любом ненулевом вещественном α (см. работу [3]). Подстановка $\alpha_2 = \mu \alpha_1$ приводит к биквадратному уравнению:

$$C_{22} C_{66} \mu^4 + B \mu^2 + C_{11} C_{66} = 0,$$

четыре корня μ_r , которого задают комплексные характеристические прямые $\alpha_2 = \mu_r \alpha_1$. В статике коллокационные точки берутся на комплексных прямых

$$\alpha^{(r)}(\kappa) = (\kappa, \mu_r \kappa), \quad \kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (r = 1, \dots, 4),$$

где μ_r — корни статического уравнения для μ , приведённого выше. При декартовой параметризации к ним можно добавлять симметричное семейство. Таким образом, в статическом пределе сохраняются структура спектральных условий и набор граничных неизвестных.

Покажем, откуда вытекают первые интегральные следствия этой предельной формы. На характеристической прямой $\alpha^{(r)}(\kappa) = (\kappa, \mu_r \kappa)$ устремим $\kappa \rightarrow 0$ и разложим экспоненту в (7): $e^{i\alpha \cdot \mathbf{x}} = 1 + i\alpha \cdot \mathbf{x} + O(\kappa^2)$. При этом операторы $B_{jk}(\alpha, \mathbf{n})$ линейны по α и исчезают при $\alpha \rightarrow 0$. Приравнивание нулю коэффициентов при младших степенях κ в спектральном условии даёт: в нулевом порядке — равенство нулю главного вектора поверхностных усилий, а в первом порядке — главного момента, то есть классические условия равновесия сил и моментов в плоской задаче:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t} dS = \mathbf{0}, \quad \int_{\partial\Omega} (x_1 t_2 - x_2 t_1) dS = 0. \quad (18)$$

4. Численная реализация и регуляризация

4.1. Дискретизация

Схема решения базируется на граничной дискретизации. Кусочно-гладкая граница области разбивается на элементы:

$$\partial\Omega = \bigcup_{p=1}^P \Gamma_p, \quad \Gamma_p = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_p(\zeta) : 0 \leq \zeta \leq 1\} \quad (p = 1, \dots, P),$$

где P — число геометрически гладких участков границы, а ζ — локальный параметр на Γ_p . Для каждого участка определена внешняя единичная нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{n}_p(\zeta)$, входящая в граничные операторы (7), (8).

Состав граничных неизвестных задаётся постановкой (3): в смешанной краевой задаче теории упругости на участках S_1 неизвестны компоненты вектора напряжений t_j , а на участках S_2 — компоненты вектора перемещений u_j ($j = 1, 2$). Эти неизвестные удобно записать единообразно: обозначим через $q_{pk}(\zeta)$ ($k = 1, \dots, m_p$) скалярные неизвестные граничные функции на участке Γ_p — компоненты вектора напряжений при $\Gamma_p \subset S_1$ и компоненты вектора перемещений при $\Gamma_p \subset S_2$. Независимыми считаются функции, остающиеся после учёта связей, налагаемых

симметрией задачи и условиями согласования в угловых точках (подробнее показано в подразделе 5.2). Тогда число скалярных блоков равно $m = \sum_{p=1}^P m_p$. В частности, при двух неизвестных компонентах на каждом участке $m = 2P$.

При сквозной нумерации блоков $l = 1, \dots, m$ через N_l обозначим число базисных функций в l -м блоке. Переменные в каждом блоке аппроксимируем линейной комбинацией:

$$q_l(\zeta) \approx q_l^{(N_l)}(\zeta) = \sum_{n=1}^{N_l} w_{ln} \phi_{ln}(\zeta), \quad \mathbf{w} = (w_{11}, \dots, w_{1N_1}; \dots; w_{m1}, \dots, w_{mN_m})^T, \quad N = \sum_{l=1}^m N_l.$$

Здесь N — полное число коэффициентов всех неизвестных, а $\mathbf{w}$ — вектор коэффициентов. В расчётах в качестве ϕ_{ln} используем полиномы Чебышёва 1-го рода, заданные на всём участке Γ_p . В отличие от функций формы МКЭ такой базис глобален: его функции не имеют локального носителя, а коэффициенты w_{ln} не являются узловыми значениями искомой функции. Значение последней в любой точке восстанавливается всей суммой разложения. Подстановка такого представления в (8) даёт равенство:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{w}) = \mathbf{F}^{(0)}(\boldsymbol{\alpha}) + \sum_{n=1}^N w_n \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\alpha}), \quad (19)$$

где $\mathbf{F}^{(0)}$ содержит вклад заданных функций f_j , g_j , а $\mathbf{G}_n$ — вклад одной базисной функции неизвестного перемещения или напряжения.

Переход к конечномерной системе осуществляется выбором точек $\boldsymbol{\alpha}_q$ на ветвях $\mathcal{K}_\omega$. В статическом случае используются точки на $\mathcal{K}_0$, заданные комплексными прямыми. В каждой точке коллокации две строки условия (12) линейно зависимы (см. подраздел 3.3), поэтому в дискретной системе достаточно оставить одну из них, а именно берётся строка $r_*(q)$ с большей евклидовой нормой (из двух пропорциональных строк она вычисляется с меньшей относительной погрешностью):

$$A_{qn}^{\mathbb{C}} = [\text{adj} \mathcal{M}_\omega(\boldsymbol{\alpha}_q) \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\alpha}_q)]_{r_*(q)}, \quad f_q^{\mathbb{C}} = - [\text{adj} \mathcal{M}_\omega(\boldsymbol{\alpha}_q) \mathbf{F}^{(0)}(\boldsymbol{\alpha}_q)]_{r_*(q)}. \quad (20)$$

Верхний индекс $\mathbb{C}$ указывает, что определённые в (20) элементы $A_{qn}^{\mathbb{C}}$ и компоненты правой части $f_q^{\mathbb{C}}$ являются комплексными числами. Составленные из них матрицу и вектор обозначим соответственно через $\mathbf{A}^{\mathbb{C}}$ и $\mathbf{f}^{\mathbb{C}}$. При декартовой параметризации вводятся сетки $\{\xi_i\}_{i=1}^{N_\xi}$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^{N_\eta}$. Каждому фиксированному значению ξ_i соответствуют четыре корня $\alpha_2^{(j)}(\xi_i)$ ($j=1, \dots, 4$) характеристического уравнения. Аналогично, при фиксированном η_i находятся четыре корня $\alpha_1^{(j)}(\eta_i)$. При учёте всех корней получается число $Q = 4N_\xi + 4N_\eta$ комплексных точек коллокации. Для вещественных коэффициентов w_n комплексная система расщепляется на вещественную и мнимую части:

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \text{Re} \mathbf{A}^{\mathbb{C}} \\ \text{Im} \mathbf{A}^{\mathbb{C}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \text{Re} \mathbf{f}^{\mathbb{C}} \\ \text{Im} \mathbf{f}^{\mathbb{C}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2Q \times N}. \quad (21)$$

Здесь Q — число комплексных коллокационных точек. После разделения на вещественную и мнимую части получается $2Q$ вещественных уравнений. В результате имеем переопределённую систему с матрицей $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2Q \times N}$, вектором неизвестных $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ и правой частью $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2Q}$. В общем случае количество базисных функций N_l может зависеть от блока. Так, при равномерной по блокам аппроксимации полагаем $N_l = N_c$. Тогда при двух независимых скалярных функциях на каждом участке будем иметь: $N = 2PN_c$. Заметим, что эта формула относится к системе до возможной симметричной редукции и наложения дополнительных связей между коэффициентами.

Воспользуемся схемой избыточной коллокации, согласно которой число вещественных уравнений выбирается существенно большим числа неизвестных ($2Q \gg N$). Поскольку число уравнений значительно превышает число неизвестных, прямоугольная матрица $\mathbf{A}$ имеет ранг $\text{rank} \mathbf{A} \leq N$. Подчёркнём, что выбор одной строки в (20) переопределённости не устраняет, а лишь исключает дублирующее (линейно зависимое) уравнение в каждой точке коллокации, тогда как система (21) остаётся переопределённой и решается в смысле наименьших квадратов. Необходимость регуляризации, о которой пойдёт речь ниже, вызвана не переопределённостью, а быстрым убыванием сингулярных чисел матрицы $\mathbf{A}$.

4.2. Критерий усечённого сингулярного разложения (УСР) и параметры регуляризации

Гладкость ядер, дающая формулировке АГИУ её аналитические преимущества, имеет вычислительную цену: оператор с гладким ядром сглаживает любые граничные данные, поэтому обратная к нему задача — восстановление граничных функций — чувствительна к малейшим возмущениям. На дискретном уровне неустойчивость проявляется в быстром убывании сингулярных чисел матрицы $\mathbf{A}$. Для подавления неустойчивости применяются усечение сингулярного разложения и регуляризация А.Н. Тихонова [14]. При УСР вклады,

отвечающие малым сингулярным числам, отбрасываются; регуляризация Тихонова ограничивает решение посредством стабилизирующего функционала.

В классическом методе А.Н. Тихонова для системы $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{f}$ минимизируется стабилизирующий функционал:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{f}\|_{L_2}^2 + \lambda \|\mathbf{L}\mathbf{w}\|_{L_2}^2 \rightarrow \min, \quad \lambda > 0,$$

где $\mathbf{L}$ — оператор регуляризации, выбор которого задаёт априорные требования к искомому решению. В простейшем случае при $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ ограничивается норма решения: при учёте гладкости вместо единичного оператора вводится стабилизирующий оператор более высокого порядка, соответствующий норме производных. Его дискретное представление может строиться на основе конечных разностей либо, как в используемых ниже базисных аппроксимациях, путём непосредственного дифференцирования базисных функций.

С учётом блочной структуры неизвестных классическая схема А.Н. Тихонова принимает вид:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{w} - \mathbf{f}\|_{L_2}^2 + \sum_{l=1}^m \lambda_l \|\mathbf{L}_l \mathbf{w}_l\|_{L_2}^2 \rightarrow \min, \quad \lambda_l > 0. \quad (22)$$

Здесь используется введённый выше блочный вектор неизвестных $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$; $\mathbf{L}_l$ — оператор регуляризации в l -м блоке и λ_l — соответствующий параметр регуляризации. Состав блоков, числа базисных функций и операторы $\mathbf{L}_l$ выбираются с учётом параметризации границы, типа неизвестных граничных функций и предполагаемой гладкости искомого решения.

Параметры регуляризации выберем по внутренним характеристикам дискретной системы (21), что соответствует стандартной практике решения дискретных некорректных задач [14, 15]. Пусть

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \quad \mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{N_\sigma}), \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{N_\sigma} \geq 0$$

есть компактное сингулярное разложение матрицы. Здесь столбцы $\mathbf{U}_k$ и $\mathbf{V}_k$ матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — соответственно левые и правые сингулярные векторы, а $\mathbf{\Sigma}$ — диагональная матрица сингулярных чисел σ_k . Сингулярные числа вычисляются как неотрицательные квадратные корни собственных значений матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ и определены для любой матрицы. Компоненты решения, отвечающие малым σ_k , в наибольшей степени усиливают погрешность правой части. На отбрасывании таких компонент и основано усечение, давшее название методу. Число $N_\sigma = \min(2Q, N)$ задаёт количество сингулярных чисел дискретной матрицы. Для используемых далее систем обычно $N_\sigma = N$. В УСР удерживаются только первые r сингулярных чисел, где $1 \leq r \leq N_\sigma$ [15], а приближённое решение имеет вид:

$$\mathbf{w}_r = \sum_{k=1}^r \frac{(\mathbf{U}_k, \mathbf{f})}{\sigma_k} \mathbf{V}_k.$$

Рабочий ранг r определяется по относительному спектру σ_k/σ_1 после отсечения малых сингулярных чисел. На практике используется относительный порог ε_{svd} и, при наличии выраженного спектрального разрыва, выбирается такой r , что

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_1} \geq \varepsilon_{\text{svd}}, \quad \frac{\sigma_{r+1}}{\sigma_1} < \varepsilon_{\text{svd}}.$$

Параметры блочной регуляризации λ_l выбираются после фиксации масштабирования системы и состава блоков неизвестных. Они подавляют неустойчивые высокочастотные компоненты по принципу регуляризации А.Н. Тихонова [14]. В настоящей работе для автоматического выбора λ_l используется критерий обобщённой перекрёстной проверки — Generalized Cross-Validation (GCV) [16]. При обычной перекрёстной проверке поочерёдно исключают одно уравнение системы (21), находят решение по оставшимся уравнениям и оценивают невязку в исключённом уравнении. В GCV индивидуальные поправки, учитывающие влияние каждого уравнения на решение, заменяются общей поправкой через след матрицы влияния. Поэтому критерий вычисляется непосредственно по всей системе (21), без поочерёдного удаления её строк.

Обозначим через $\mathbf{A}_\lambda^+ \in \mathbb{R}^{N \times 2Q}$ оператор регуляризованного решения всей системы (21): $\mathbf{w}_\lambda = \mathbf{A}_\lambda^+ \mathbf{f}$. Здесь λ обозначает параметр регуляризации либо совокупность блочных параметров λ_l при фиксированном рабочем ранге УСР. Матрица $\mathbf{H}_\lambda = \mathbf{A}\mathbf{A}_\lambda^+ \in \mathbb{R}^{2Q \times 2Q}$ отображает правую часть $\mathbf{f}$ в вектор восстановленных значений $\mathbf{A}\mathbf{w}_\lambda$ и называется матрицей влияния. Критерий GCV, с точностью до постоянного множителя, не влияющего на положение минимума, имеет вид [16]:

$$G(\lambda) = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{w}_\lambda - \mathbf{f}\|^2}{[\text{tr}(\mathbf{I} - \mathbf{H}_\lambda)]^2}, \quad \mathbf{H}_\lambda = \mathbf{A}\mathbf{A}_\lambda^+, \quad \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2Q \times 2Q}.$$

Во всех частях этой формулы присутствует одна и та же матрица $\mathbf{A}$ системы (21), содержащая все её $2Q$ строк. Оператор $\mathbf{A}_\lambda^+$ построен также без удаления проверяемого уравнения. Выбор одной из двух линейно зависимых строк условия (12) уже выполнен при формировании матрицы (см. (20)) и не связан с процедурой перекрёстной проверки. Минимум G определяет параметры регуляризации без априорной оценки уровня погрешности правой части.

Дискретизация контролируется по устойчивости результата: при умеренном изменении Q , распределения точек на $\mathcal{K}_\omega$ и числа базисных функций эффективный ранг, структура сингулярного спектра и восстановленные граничные функции должны сохраняться. В некоторых задачах имеются особенности граничных полей напряжений в угловых точках, которые могут быть установлены из рассмотрения однородной граничной задачи теории упругости для ортотропного клина. К особым точкам относятся угловые точки кусочно-гладкой границы, точки смены типа граничных условий и разрывы заданных граничных данных. Однако локальные особенности граничных функций не изменяют вид спектрального условия (11), но должны учитываться при выборе базиса. Для изотропной теории упругости исходной является классическая асимптотика Вильямса [11]; в анизотропных и составных клиньях используются её обобщения [3, 17, 18].

В окрестности особой точки $\mathbf{x}_c$ введём локальную полярную систему координат (r, θ) с полюсом $\mathbf{x}_c$ в вершине клина, расстоянием до вершины r и углом θ , отсчитываемым от одной из сторон клина внутрь его области. Если в этих координатах у вектора перемещений главный член представляется в виде:

$$\mathbf{u}(r, \theta) \sim r^\nu \Phi(\theta), \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c|,$$

то напряжения имеют порядок $r^{\nu-1}$. Энергетически допустимыми являются решения с $\text{Re} \nu > 0$. При $0 < \text{Re} \nu < 1$ напряжения могут быть неограниченными, однако принадлежность решения к энергетическому классу сохраняется. Эта особенность должна учитываться в локальном базисе на элементе в окрестности особой точки.

В дискретной схеме около каждой особой точки выделим локальный участок длиной δ . Для неизвестной граничной функции q используем представление:

$$q(r) = q^{\text{reg}}(r) + r^\gamma \sum_m d_m \psi_m(r/\delta),$$

где q^{reg} — регулярная часть, ψ_m — гладкие функции нормированной локальной координаты, а $\gamma = \text{Re} \nu - 1$ — показатель особенности для компонент вектора напряжений на границе. Для спектральных задач рассмотрим однородную граничную постановку. Собственную частоту определим как значение параметра, при котором существует ненулевое поле перемещений, удовлетворяющее уравнениям движения в области и однородным условиям на границе. Для численного поиска воспользуемся введённой в подразделе 3.4 безразмерной частотой:

$$\lambda_\omega = \omega R_0 \sqrt{\rho/E_2}, \quad (23)$$

где R_0 — характерный размер области. Резонансные значения λ_ω найдём по спектральному индикатору, основанному на конечномерной аппроксимации однородной задачи методом частных решений (МЧР). По своей конструкции такой подход близок к методам Ритца и Треффтца: искомое поле ищется в конечномерном пространстве пробных решений. Использование полных несингулярных функций Треффтца для гармонических и статических задач плоской упругости развивалось в работах [19, 20]. Близкая по конструкции схема с экспоненциальными базисными функциями, параметры которых определяются характеристическим уравнением оператора, применялась к статическим и гармоническим задачам упругости [21]. Однако, в отличие от классической схемы Ритца, пробные поля здесь точно удовлетворяют уравнениям движения в Ω , в сравнении же с произвольным базисом Треффтца их параметры выбираются на характеристическом множестве $\mathcal{K}_\omega$, что согласуется с АГИУ-постановкой [5–10]. Стабилизация индикатора соответствует современному варианту МЧР [22, 23].

Для фиксированного λ_ω базис пробного пространства составляют экспоненциальные решения (2). Пусть $\alpha_m^{(s)}(\lambda_\omega) = (\alpha_{1m}^{(s)}(\lambda_\omega), \alpha_{2m}^{(s)}(\lambda_\omega))$. Теперь при построении пробного пространства, в отличие от сквозной нумерации точек коллокации в (20), используем двойную нумерацию: s — номер ветви характеристического множества, m — номер выбранной точки на ней, а $\mathbf{a}_m^{(s)}(\lambda_\omega)$ — собственный вектор характеристической матрицы (6). Базисные поля перемещений имеют вид:

$$\mathbf{v}_{ms}(x_1, x_2; \lambda_\omega) = \mathbf{a}_m^{(s)}(\lambda_\omega) \exp \left\{ i \left[\alpha_{1m}^{(s)}(\lambda_\omega) x_1 + \alpha_{2m}^{(s)}(\lambda_\omega) x_2 \right] \right\}.$$

Здесь $\mathbf{v}_{ms}$ — двухкомпонентное векторное поле перемещений. Общее число выбранных базисных полей обозначим через N . Их линейная комбинация со скалярными коэффициентами c_{ms} записывается как

$$\mathbf{v}_c(x_1, x_2; \lambda_\omega) = \sum_{m,s} c_{ms} \mathbf{v}_{ms}(x_1, x_2; \lambda_\omega), \quad \mathbf{c} = \{c_{ms}\}.$$

Вектор напряжений для пробного поля не вводится как независимый параметр, а вычисляется непосредственно по закону Гука (1) и соотношению $t_j = \sigma_{ij} n_i$, приведённому после (2). Зависимость пробных полей от констант материала учитывается через характеристическую матрицу (6), поэтому и точки $\alpha_m^{(s)}(\lambda_\omega)$, и векторы $\mathbf{a}_m^{(s)}(\lambda_\omega)$ определяются упругими константами материала.

Собственная частота рассчитывается по минимуму стабилизированной невязки однородных граничных условий:

$$\eta_N(\lambda_\omega) = \min_{\mathbf{c} \neq 0} \frac{\|\mathcal{R}_{\lambda_\omega} \mathbf{v}_c\|_{L_2(\partial\Omega)}}{\|\mathbf{v}_c\|_{L_2(\Omega)}}, \quad \Phi(\lambda_\omega) = -\log_{10} \eta_N(\lambda_\omega), \quad (24)$$

$$\|\mathbf{v}_c\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\mathbf{v}_c(\mathbf{x})|^2 dA.$$

Минимум в (24) берётся по коэффициентам $\mathbf{c}$, для которых $\|\mathbf{v}_c\|_{L_2(\Omega)} > 0$. При линейно независимом базисе это равносильно неравенству: $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Оператор $\mathcal{R}_{\lambda_\omega}$ задаёт невязку однородных граничных условий для пробного поля $\mathbf{v}_c$. Например, для свободной границы она совпадает с компонентами вектора напряжений на границе; на гладком участке при единичной нормали $\mathbf{n}$ и единичном касательном векторе $\mathbf{s}$ можно записать: $\mathcal{R}_{\lambda_\omega} \mathbf{v}_c = (p_n, p_s)$. Здесь $p_j = \sigma_{ij} n_i$, $p_n = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}$, $p_s = \mathbf{p} \cdot \mathbf{s}$, где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Коши для пробного поля, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s}$ — единичные нормаль и касательный вектор к границе. Нормировка на знаменатель делает отношение не зависящим от масштаба $\mathbf{c}$. Кроме того, она исключает ложные минимумы, связанные с почти тривиальными линейными комбинациями, и соответствует стабилизированному варианту МЧР [23].

Размер пробного пространства выбирается по стабилизации спектрального индикатора: при последовательном расширении пробного пространства положения локальных минимумов η_N и форма соответствующих пиков Φ на резонансах должны изменяться слабо.

4.3. Симметрия и классы собственных частот

Если геометрия области, упругие коэффициенты и граничные условия инвариантны относительно отражений $x_1 \mapsto -x_1$ и $x_2 \mapsto -x_2$, то дифференциальный оператор коммутирует с действием группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. В этом случае пространство допустимых полей раскладывается в прямую сумму четырёх инвариантных подпространств, соответствующих неприводимым представлениям этой группы [24, 25].

Класс симметрии задаётся парой знаков $(\chi_1, \chi_2) \in \{\pm 1\}^2$: скалярное поле класса (χ_1, χ_2) умножается на χ_1 при отражении $x_1 \mapsto -x_1$ и на χ_2 при отражении $x_2 \mapsto -x_2$. Компоненты перемещений не скаляры. При отражении оси направленная вдоль неё компонента тоже меняет знак, поэтому чётности компонент имеют вид: $u_1 : (-\chi_1, \chi_2)$, $u_2 : (\chi_1, -\chi_2)$. В дальнейшем введём обозначения: $A = (+, +)$, $B = (-, +)$, $C = (-, -)$, $D = (+, -)$. Так, в классе A компонента u_1 нечётна по x_1 и чётна по x_2 , а u_2 — чётна по x_1 и нечётна по x_2 . Поиск собственных форм может проводиться независимо в каждом из этих подпространств, а их объединение даёт полный набор симметричных типов.

5. Вычислительные эксперименты

Далее рассмотрены решения нескольких задач, иллюстрирующих описанный выше подход. Необходимые для валидации эталонные расчёты выполнены при помощи МКЭ в пакетах FEniCS (с реализацией на сетках из треугольных элементов) и scikit-fem (с элементами типа P_2), а также получен МКЭ-эталон реализации задачи в спектральной постановке. В численных примерах выбранные значения рабочего ранга УСР и локальных параметров регуляризации проверены при вариации параметров дискретизации. Для спектральных задач дополнительно проконтролирована устойчивость положения резонансных значений.

5.1. Эллиптическая область с заданным вектором напряжений

Задача решалась в области Ω , ограниченной эллипсом $\Gamma = \partial\Omega$:

$$\Gamma = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}, \quad a = 0.125 \text{ м}, \quad b = 0.080 \text{ м}.$$

Граница параметризовалась как $\mathbf{x}(\varphi) = (a \cos \varphi, b \sin \varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. На верхней и нижней дугах поверхности, которым отвечают углы 30° , нагрузка задавалась в виде нормальной и касательной компонент:

$$t_n(\varphi) = -P_0 \{q(\varphi - 90^\circ) + q(\varphi - 270^\circ)\}, \quad t_\tau(\varphi) = 0, \quad P_0 = 1 \text{ МПа},$$

где

$$q(\psi) = \begin{cases} 2 \exp\left(\frac{2s^2}{s^2 - 1}\right), & |s| < 1, \\ 0, & |s| \geq 1, \end{cases} \quad s = \frac{\psi}{15^\circ}.$$

При этом P_0 — масштаб нагрузки. Выбранная гладкая функция имела значение $q(0) = 2$, а максимальный модуль нормального поверхностного напряжения на каждой нагруженной дуге равнялся $2P_0$.

Главные оси ортотропии совпадали с осями эллипса. Исследовался материал — однонаправленный углепластик (близкие справочные значения для системы Т300/5208 [26]), обладающий ярко выраженными ортотропными

свойствами со следующими упругими константами: $E_1 = 150$ ГПа, $E_2 = 10$ ГПа, $G_{12} = 5$ ГПа, $\nu_{12} = 0.30$, $\nu_{21} = 0.02$. Этим значениям соответствовали коэффициенты матрицы жёсткости:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 150.91 & 3.02 & 0 \\ 3.02 & 10.06 & 0 \\ 0 & 0 & 5.00 \end{pmatrix} \text{ ГПа}, \quad \rho = 1600 \text{ кг/м}^3.$$

Частота $\omega = 7500$ рад/с отвечала $\lambda_\omega = \omega R_0 \sqrt{\rho/E_2} = 0.3$, где для эллиптической области принимался характерный размер $R_0 = \sqrt{ab} = 0.1$ м.

Неизвестными являлись полярные компоненты перемещения u_r , u_φ ; масштаб перемещений считался равным $U_{\text{ref}} = P_0 R_0 / E_2 = 10^{-5}$ м. При построении коллокационной системы использовалось по 40 значений каждого координатного параметра характеристического множества: $N_\xi = N_\eta = 40$. Для каждого фиксированного значения параметра учитывалось четыре корня характеристического уравнения, поэтому число комплексных точек составляло $Q = 4N_\xi + 4N_\eta = 320$, что после разделения на действительную и мнимую части дало 640 вещественных уравнений. Число коэффициентов разложения выбиралось в соответствии с критерием устойчивости из раздела 4 (дальнейшее расширение базиса не изменяло восстановленные граничные функции в пределах принятой точности и не увеличивало информативную часть сингулярного спектра). В итоговом расчёте использовалось число коэффициентов $N = 18$: $N_{u_r} = 10$ для u_r и $N_{u_\varphi} = 8$ для u_φ , так что $N = N_{u_r} + N_{u_\varphi}$. Для матрицы размером 640×18 число сингулярных чисел равнялось $\min(640, 18) = 18$. Устойчивость выбранной конфигурации контролировалась при варьировании $N_\xi = N_\eta$ и числа коэффициентов в обоих блоках; рабочий ранг $r = 14$ соответствовал устойчивому отделению первых сингулярных значений от области малых сингулярных чисел. Получающаяся деформация являлась симметричной: нагруженные верхняя и нижняя дуги смещались внутрь, а боковые участки — наружу на меньшую величину.

Построенное решение сравнивалось с реализацией посредством МКЭ с локальным сгущением в окрестности нагруженных дуг (сетка состояла из 42 720 элементов и имела 172 074 степени свободы). Погрешность АГИУ составила: 4.6% для u_r (по всей границе) и 2.8% для u_φ (по всей границе); на дугах — участках приложения симметричной нагрузки — ошибка u_φ возрастала до 3.6%, что связано с локализованным характером заданного поверхностного напряжения.

Для контроля устойчивости дискретизации дополнительно анализировался спектр нормированной матрицы системы. Спектральные характеристики служили внутренней диагностикой дискретной системы: по ним выбирался эффективный ранг УСР и проверялось отделение информативных сингулярных компонент от области малых сингулярных чисел. Для компонент u_r и u_φ использовалась блочная регуляризация с оператором второй производной $L = D^2$. Аппроксимация выполнялась полиномами Чебышёва 1-го рода $T_n(\tau)$, где локальный параметр участка линейно отображается на $\tau \in [-1, 1]$. Два параметра регуляризации, λ_{u_r} и λ_{u_φ} , определялись по минимуму GCV-функционала (см. подраздел 4.2), обобщённого на случай двух параметров: $G(\lambda_{u_r}, \lambda_{u_\varphi})$ минимизировался по двумерной сетке значений для блочной регуляризованной системы [16]: $\lambda_{u_r} = 10^{-12}$ и $\lambda_{u_\varphi} = 10^{-13}$.

Таблица 1 и рисунок 2 фиксируют диагностический признак некорректности дискретной задачи 1-го рода. В таблице через σ_k обозначено k -е сингулярное число нормированной матрицы, σ_1 — максимальное сингулярное число, $\sigma_{\min}$ — минимальное. Всего матрица имеет 18 сингулярных чисел, по числу столбцов. В УСР используется рабочий ранг $r = 14$, выбираемый по спектральному разрыву и устойчивости решения. Численный SVD-ранг, определяемый по машинному порогу малости сингулярных чисел, равен 15. Различие обусловлено разными критериями определения этих рангов. Рабочий ранг выбирается на основе анализа спектрального разрыва и критерия устойчивости (см. подраздел 4.2), вследствие этого он, как правило, меньше; оставшиеся сингулярные числа подавляются при регуляризации. Величины $\sigma_{\min}/\sigma_1 = 1.51 \cdot 10^{-16}$ и $\text{cond}(\mathbf{A}_{\text{eq}}) = 6.61 \cdot 10^{15}$, где $\mathbf{A}_{\text{eq}}$ — уравновешенная матрица системы, полученная нормировкой столбцов $\mathbf{A}$ на их евклидовы нормы (разброс исходных норм см. в Табл. 1), а $\text{cond} = \sigma_1/\sigma_{\min}$ — её спектральное число обусловленности, следует рассматривать как численные индикаторы вырожденности нормированной матрицы в пределах машинной точности.

Таблица 1. Показатели дискретной системы для эллиптической области

Показатель	Значение	Описание
Размер системы	$2Q \times N = 640 \times 18$	640 вещественных уравнений коллокации и 18 неизвестных коэффициентов разложения
Число сингулярных чисел	$N_\sigma = 18$	равно числу столбцов, поскольку $2Q > N$
Рабочий ранг УСР	$r = 14$	число сингулярных компонент, сохранённых после усечения
Численный SVD-ранг	15	число сингулярных чисел из 18, превышающих машинный порог
Отношение минимального и максимального сингулярных чисел	$\sigma_{\min}/\sigma_1 = 1.51 \cdot 10^{-16}$	индикатор численной вырожденности матрицы на уровне машинной точности
Разброс норм столбцов	$2.115 \cdot 10^3$	отношение максимальной и минимальной евклидовых норм столбцов исходной матрицы

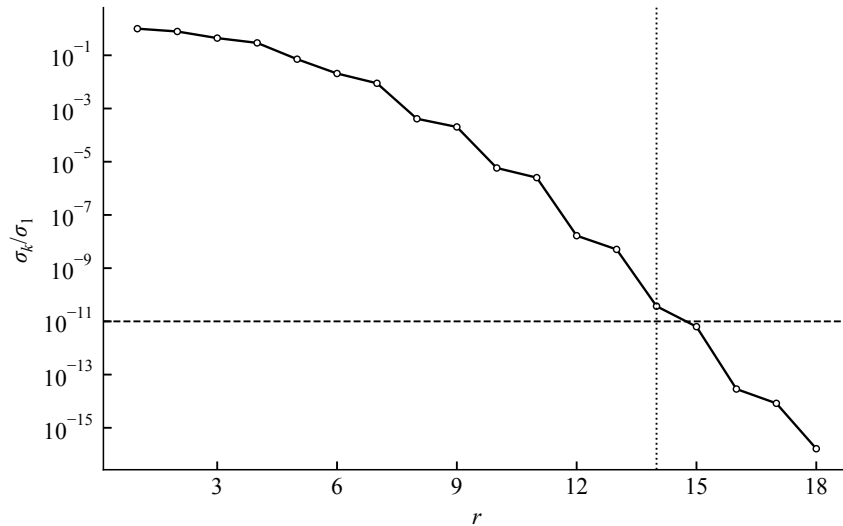


Рис. 2. Сингулярные числа нормированной системы для эллиптической области; пунктирной линией показан порог рабочего усечения 10^{-11} для отношения σ_k/σ_1 ; точечной линией выделен рабочий ранг $r = 14$

5.2. Прямоугольная область со смешанными граничными условиями

Во втором численном эксперименте рассматривалась плоская задача для ортотропного прямоугольника:

$$\Omega = [0, a] \times [0, b], \quad a = 2 \text{ м}, \quad b = 1 \text{ м}.$$

Граница включала четыре участка:

$$\partial\Omega = \Gamma_L \cup \Gamma_R \cup \Gamma_B \cup \Gamma_T,$$

$$\Gamma_L = \{(0, x_2) : 0 \leq x_2 \leq b\}, \quad \Gamma_R = \{(a, x_2) : 0 \leq x_2 \leq b\},$$

$$\Gamma_B = \{(x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq a\}, \quad \Gamma_T = \{(x_1, b) : 0 \leq x_1 \leq a\}.$$

Граничные условия имели вид:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_L} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{t}|_{\Gamma_B \cup \Gamma_T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{t}|_{\Gamma_R} = (t_0(2x_2/b - 1), 0), \quad (25)$$

где $t_0 = 1$ МПа. Таким образом, левый торец (индекс L) был закреплён, правый торец R находился под нагрузкой, а две горизонтальные стороны (нижняя B и верхняя T) были свободны от нагрузок.

Материалом служил углепластик Т300/5208 [26] с безразмерными упругими постоянными, нормированными на модуль упругости E_2 для плоского напряжённого состояния. Матрица $\mathbf{C}$ в форме раздела 2 имела коэффициенты:

$$C_{11} = 17.65, \quad C_{22} = 1.00, \quad C_{12} = 0.28, \quad C_{66} = 0.70.$$

В полной смешанной постановке неизвестными являлись напряжения на закреплённой стороне и перемещения на трёх остальных сторонах:

$$t_1(0, x_2), t_2(0, x_2), \quad u_1(a, x_2), u_2(a, x_2), \quad u_1(x_1, 0), u_2(x_1, 0), \quad u_1(x_1, b), u_2(x_1, b),$$

то есть восемь граничных функций. При расчётах использовалась симметричная редукция относительно средней линии $x_2 = b/2$:

$$u_1(x_1, b - x_2) = -u_1(x_1, x_2), \quad u_2(x_1, b - x_2) = u_2(x_1, x_2).$$

Отсюда

$$u_1(x_1, b) = -u_1(x_1, 0), \quad u_2(x_1, b) = u_2(x_1, 0).$$

В силу этого свободная верхняя сторона восстанавливалась по нижней и не являлась независимым блоком неизвестных. В дискретной системе осталось шесть независимых функций:

$$t_1(0, x_2), t_2(0, x_2), \quad u_1(a, x_2), u_2(a, x_2), \quad u_1(x_1, 0), u_2(x_1, 0).$$

Параметры дискретизации прямоугольной области сведены в таблицу 2.

В углах типа «заделка–свободная граница» компоненты вектора напряжений имеют локальную степенную особенность, характерную для клиновидных областей в анизотропной теории упругости [3, 17, 18]. Анализ задачи для ортотропного клина дал значение показателя $\gamma = \nu - 1 = -0.15$.

Таблица 2. Показатели дискретной системы для прямоугольной области

Показатель	Значение	Описание
Независимые граничные функции	6	После симметричной редукции верхняя свободная сторона восстанавливается по нижней
Число коэффициентов на одну функцию	$N_c=40$	Используются полиномы Чебышёва 1-го рода T_n по локальной координате, приведённой к $[-1,1]$; число членов выбирается по стабилизации граничных следов и рабочего ранга УСР
Коэффициенты гладкой части	$6N_c=240$	Число коэффициентов до наложения условий согласования в угловых точках
Независимые коэффициенты после согласования	$N=234$	Условия согласования на смежных сторонах уменьшают число свободных коэффициентов
Параметры коллокации	$N_\xi=N_\eta=48$	Число значений координатных параметров характеристического множества.
Комплексные коллокационные точки	$Q=4N_\xi+4N_\eta=384$	Для каждого фиксированного параметра учитываются четыре корня характеристического уравнения
Строки вещественной системы	$2Q=768$	Получаются после разделения комплексной системы на действительную и мнимую части
Размер дискретной матрицы	$2Q \times N=768 \times 234$	Число строк равно $2Q$, число столбцов — числу независимых коэффициентов
Число сингулярных чисел	$N_\sigma=\min(2Q,N)=234$	Значение используется при анализе сингулярного спектра до регуляризации

Длина локального участка δ_t выбиралась равной $\delta_t/b=0.006$. В регулярной части $t_2(0,x_2)$ использовалась регуляризация с оператором второй производной $L=D^2$ по локальной координате, как и в подразделе 5.1; параметр $\lambda_{t_2}=10^{-4}$ определялся автоматически по критерию GCV [16]. Остальные блоки стабилизировались усечением сингулярного спектра по критерию раздела 4. Рабочий ранг итоговой регуляризованной системы УСР составил $r=199$.

Результаты для сравнения с МКЭ при $\lambda_\omega=0.30$ приведены на рисунке 3. Контрольное МКЭ-решение получено на сетке из 60×120 четырёхузловых четырёхугольных элементов с билинейной аппроксимацией перемещений (в англоязычной литературе — Q4), что соответствует 14 762 степеням свободы. Достаточность сетки проверялась по стабилизации граничных L_2 -норм при переходе к более густым прямоугольным разбиениям. Локальный сингулярный элемент снижает ошибку в определении $t_2(0,x_2)$; расчёты остальных компонент демонстрируют малые относительные отклонения.

Расчёты показали, что при $\lambda_\omega=0.30$ включение локальных сингулярных элементов снижает среднюю ошибку АГИУ относительно МКЭ с 3.261% до 1.021%, а ошибку $t_2(0,x_2)$ — с 16.929% до 2.108% (Табл. 3). Таким образом, угловые точки не препятствуют применению дискретной АГИУ-схемы, но требуют согласованного с геометрией локального учёта особенностей поля напряжений.

Таблица 3. Относительные L_2 -ошибки АГИУ относительно МКЭ для прямоугольной области при $\lambda_\omega=0.30$

Компонента	Ошибка, %	Компонента	Ошибка, %
$u_1(a,x_2)$	0.698	$u_2(a,x_2)$	0.058
$u_1(x_1,b)$	0.184	$u_2(x_1,b)$	0.424
$t_1(0,x_2)$	2.656	$t_2(0,x_2)$	2.108

5.3. Резонансы прямоугольной области

В модельной спектральной задаче рассматривалась та же прямоугольная область, тот же материал и те же обозначения сторон границы, что в подразделе 5.2. Задавались однородные смешанные граничные условия:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_L}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{u}|_{\Gamma_R}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{t}|_{\Gamma_B}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{t}|_{\Gamma_T}=\mathbf{0}. \quad (26)$$

Однородность условий (26) означала отсутствие внешнего возбуждения. Собственная частота соответствовала такому значению λ_ω , при котором задача (2), (26) имеет нетривиальное решение. Эталонные частоты получались путём независимого решения прямой спектральной задачи на последовательности сгущающихся конечно-элементных сеток.

В силу симметрии области, материала и условий (26) относительно средних линий $x_1=a/2$ и $x_2=b/2$ (при переносе начала координат в центр области — отражений $x_1 \mapsto -x_1$, $x_2 \mapsto -x_2$) спектральная задача раскладывалась по четырём классам чётности (от A до D), которые введены в подразделе 4.3. В этих подпространствах открылась возможность раздельного поиска собственных форм. Пробное пространство каждого расчёта при этом уменьшалось вчетверо, а близкие резонансы разных классов не сливались в один пик индикатора

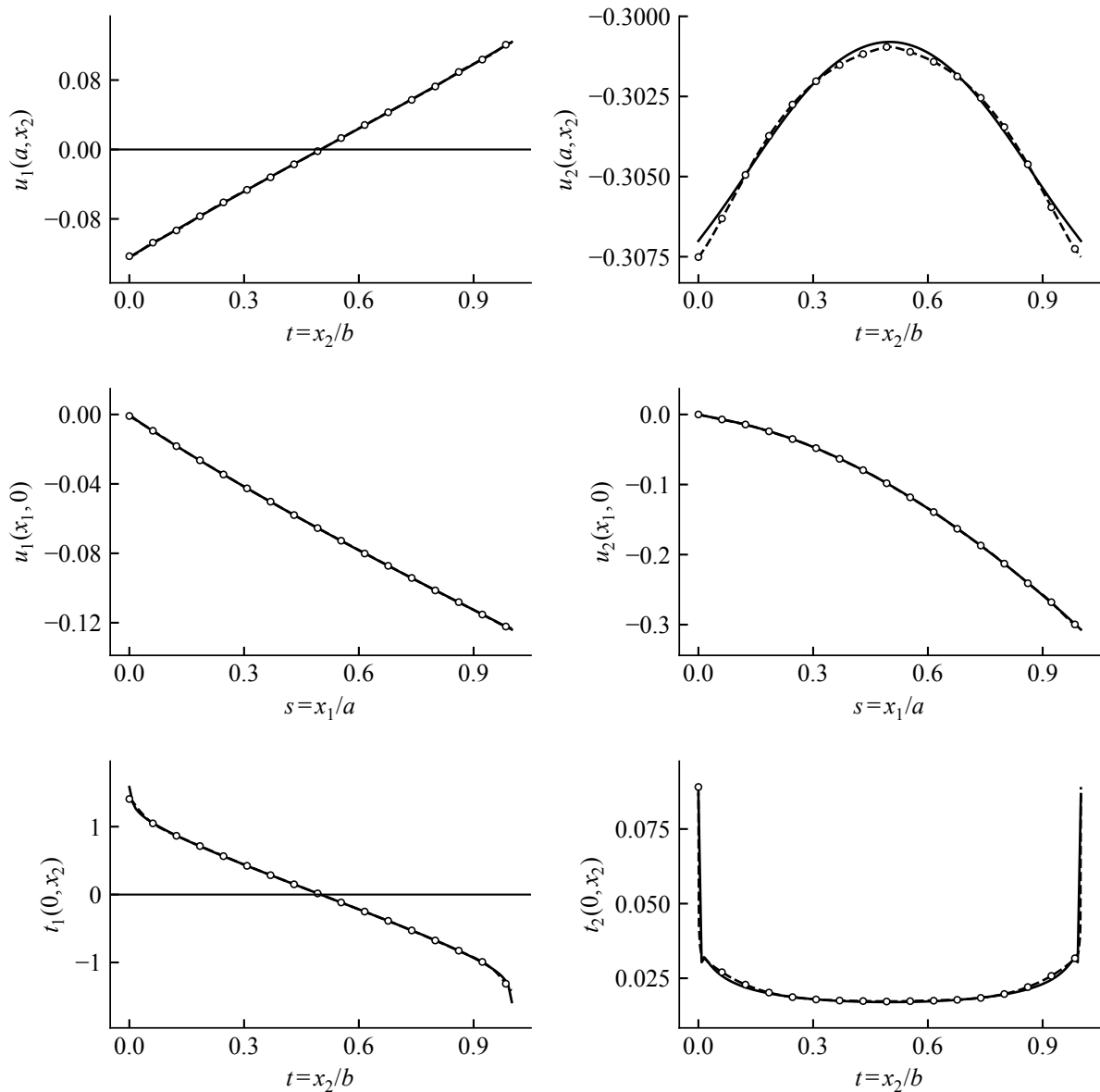


Рис. 3. Граничные функции прямоугольной области при $\lambda_\omega = 0.30$: АГИУ (штриховые линии с кружками) и МКЭ (сплошные линии)

и надёжно различались (Табл. 4, столбец «Класс»). Объединение результатов по четырём классам дало полный спектр рассматриваемой смешанной задачи, так что собственные частоты при таком разделении не терялись.

В МЧР (см. подраздел 4.2 [22, 23]), где приближённое поле представляет собой комбинацию решений, точно удовлетворяющих уравнениям движения (2), а собственная частота отвечает минимуму нормы граничной невязки, для условий (26) используется индикатор (24). В данном расчёте бралось по 14 значений декартовых параметров $N_\xi = N_\eta = 14$; для каждого фиксированного параметра учитывались четыре комплексных корня. Пробное пространство содержало $N = 112$ комплексных функций, что после разделения на действительную и мнимую части соответствовало 224 вещественным столбцам. Невязка условий (26) аппроксимировалась по 100 точкам на каждой стороне; нормировка в знаменателе (24) вычислялась по сетке с количеством 28×16 внутренних точек. Начальная сетка по λ_ω выбиралась с учётом предварительной локализации резонансов, локальное уточнение проводилось в окрестности шириной 0.06 по λ_ω . МКЭ-эталонное решение получалось на последовательности прямоугольных Q4-сеток от 80×40 до 240×120 элементов с последующей экстраполяцией Ричардсона по параметру сетки h — характерному размеру элемента. Погрешность билинейных элементов по частоте убывала как $O(h^2)$, что позволяло по последовательности сгущающихся сеток оценить предельное значение λ_ω при $h \rightarrow 0$. В таблице 4 через ε_{rel} обозначено относительное отклонение результатов МЧР от МКЭ-эталона.

Таблица 4. Первые пять собственных частот прямоугольной области для условий (26) в расчётах МЧР и МКЭ

№	Класс	λ_ω МЧР	λ_ω МКЭ	$\varepsilon_{\text{rel}}, \%$
1	D	1.24127	1.24194	0.0538
2	C	2.47834	2.47982	0.0594
3	A	3.33697	3.33740	0.0129
4	D	3.78171	3.78403	0.0613
5	B	3.86388	3.86606	0.0565

5.4. Резонансы эллиптической области

Далее представлены результаты определения резонансных значений λ_ω для области вида ортотропного эллипса с указанными выше константами и свободной границей:

$$t_1|_{\partial\Omega} = t_2|_{\partial\Omega} = 0.$$

Безразмерная частота задавалась параметром $\lambda_\omega = \omega R_0 \sqrt{\rho/E_2}$, где, как и в подразделе 5.1, $R_0 = \sqrt{ab} = 0.1$ м.

В силу симметрии области и свободной границы спектральная задача редуцировалась к задаче на четверти эллипса. Собственные частоты определялись по индикатору (24) и сравнивались с МКЭ-решением обобщённой задачи на собственные значения. Исходное пробное пространство содержало 32 вещественные функции. Норма граничной невязки аппроксимировалась по 160 точкам на редуцированной четверти границы. Локализация каждого максимума $\Phi(\lambda_\omega)$ выполнялась в окрестности полуширины 0.08 по λ_ω . Для каждого из четырёх резонансов начальный поиск проводился на равномерной сетке из 81 значения безразмерной частоты λ_ω в интервале от $(\lambda_\omega^{\text{МКЭ}} - 0.08)$ до $(\lambda_\omega^{\text{МКЭ}} + 0.08)$, после чего положение максимума индикатора уточнялось. МКЭ-эталон получался на сетке из 65 536 шестиугольных треугольных элементов с квадратичной аппроксимацией перемещений, число степеней свободы составляло 263 170.

В таблице 5 приведены данные вычислений на основе АГИУ и МКЭ. Через ε_{rel} обозначено относительное отклонение от МКЭ-эталона.

Таблица 5. Собственные частоты эллипса: АГИУ и МКЭ

№	Класс	λ_ω АГИУ	λ_ω МКЭ	$\varepsilon_{\text{rel}}, \%$
1	C	1.71868	1.71870	0.001254
2	D	1.87834	1.87836	0.001256
3	A	2.16455	2.16458	0.001255
4	B	2.42005	2.42008	0.001258

На рисунке 4 по оси ординат отложено значение индикатора $\Phi(\lambda_\omega)$ из (24). Индикатор вычисляется отдельно для каждого из четырёх классов чётности (пробное пространство состоит из полей соответствующей чётности, поэтому каждая кривая отвечает своему классу). Найденный максимум сразу относится к определённому классу симметрии (см. Табл. 5, столбец «Класс»). Собственная частота в АГИУ определяется как абсцисса локального максимума кривой $\Phi(\lambda_\omega)$ своего класса.

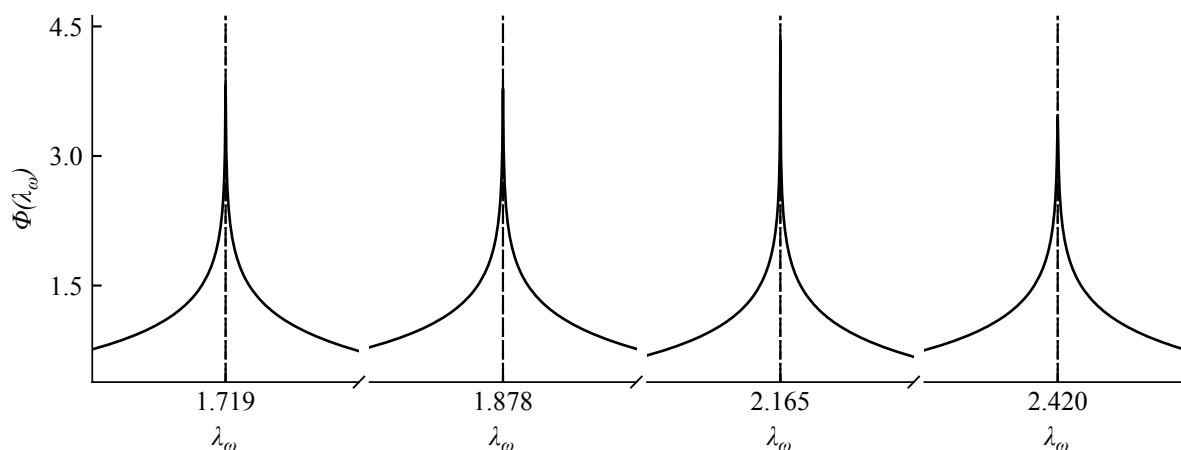


Рис. 4. Индикатор $\Phi(\lambda_\omega)$ для первых четырёх собственных частот эллиптической области, рассчитанный на основе АГИУ (сплошные линии), и значения λ_ω , вычисленные МКЭ (пунктирные линии)

6. Заключение

Построена и численно реализована схема альтернативных граничных интегральных уравнений (АГИУ) 1-го рода с гладкими ядрами для установившихся колебаний ортотропного тела в плоской постановке. Система АГИУ формируется через условия разрешимости на характеристическом множестве дифференциального оператора и не требует явного построения фундаментальных и сингулярных решений. Предложенная схема приводит к дискретизации только граничных неизвестных и применима как к прямым смешанным постановкам, так и к спектральной задаче о собственных частотах.

Проведена серия вычислительных экспериментов для плоских областей эллиптической и прямоугольной формы и подробно описаны расчётные данные о граничных полях и резонансных частотах. Осуществлено их сравнение с результатами, отвечающими МКЭ-эталонам, которое показало достаточную точность предложенной схемы.

Литература

1. *Bonnet M.* Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids. Chichester: Wiley, 1999. 392 p.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках / под ред. Р. В. Гольдштейн. М.: Мир, 1984. 494 с.
3. *Ting T. C. T.* Anisotropic Elasticity: Theory and Applications. Oxford: Oxford University Press, 1996. 570 p. DOI: 10.1093/oso/9780195074475.001.0001
4. *Сумбатян М. А.* О корректной трактовке одного некорректного граничного уравнения в акустике замкнутых областей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41, № 3. С. 436–442.
5. *Бабешко В. А.* Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
6. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
7. *Ватульян А. О.* О граничных интегральных уравнениях 1-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости // Доклады Академии наук. 1993. Т. 333, № 3. С. 312–314.
8. *Ватульян А. О., Садчиков Е. В.* О граничных интегральных уравнениях в акустике // Акустический журнал. 1998. Т. 44, № 3. С. 326–330.
9. *Ватульян А. О., Шамшин В. М.* Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение к динамическим пространственным задачам теории упругости // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, № 3. С. 462–469.
10. *Ватульян А. О., Садчиков Е. В.* О новой формулировке граничных интегральных уравнений в задачах о колебаниях анизотропных тел // Известия Академии наук. Механика твёрдого тела. 1999. № 2. С. 78–84.
11. *Williams M. L.* Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // Journal of Applied Mechanics. 1952. Vol. 19, no. 4. P. 526–528. DOI: 10.1115/1.4010553
12. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
13. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis. Berlin: Springer, 1983. 391 p.
14. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука, 1979. 285 с.
15. *Hansen P. C.* Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion. Philadelphia: SIAM, 1998. 247 p. DOI: 10.1137/1.9780898719697
16. *Golub G. H., Heath M., Wahba G.* Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter // Technometrics. 1979. Vol. 21, no. 2. P. 215–223. DOI: 10.1080/00401706.1979.10489751
17. *Dempsey J. P., Sinclair G. B.* On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge // Journal of Elasticity. 1979. Vol. 9, no. 4. P. 373–391. DOI: 10.1007/BF00044615
18. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд. М.: Наука, 1977. 416 с.
19. *Cheung Y. K., Jin W. G., Zienkiewicz O. C.* Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions // Communications in Applied Numerical Methods. 1989. Vol. 5, no. 3. P. 159–169. DOI: 10.1002/cnm.1630050304
20. *Jin W. G., Cheung Y. K., Zienkiewicz O. C.* Application of the Trefftz method in plane elasticity problems // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1990. Vol. 30, no. 6. P. 1147–1161. DOI: 10.1002/nme.1620300605
21. *Boroomand B., Soghrati S., Movahedian B.* Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010. Vol. 81, no. 8. P. 971–1018. DOI: 10.1002/nme.2718
22. *Fox L., Henrici P., Moler C.* Approximations and Bounds for Eigenvalues of Elliptic Operators // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1967. Vol. 4, no. 1. P. 89–102. DOI: 10.1137/0704008
23. *Betcke T., Trefethen L. N.* Reviving the Method of Particular Solutions // SIAM Review. 2005. Vol. 47, no. 3. P. 469–491. DOI: 10.1137/S0036144503437336

24. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. 3-е изд. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 476 с.
25. Любарский Г. Я. Теория групп и её применение в физике. М.: Физматгиз, 1958. 355 с.
26. Hyer M. W., Herakovich C. T., Milkovich S. M., Short Jr. J. S. Temperature dependence of mechanical and thermal expansion properties of T300/5208 graphite/epoxy // Composites. 1983. Vol. 14, no. 3. P. 276–280. DOI: 10.1016/0010-4361(83)90016-2
27. Hansen P. C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // SIAM Review. 1992. Vol. 34, no. 4. P. 561–580. DOI: 10.1137/1034115
28. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 240 с.

Сведения об авторах:

Ватульян Александр Ованесович (корр.), проф., дфмн, зав. каф., Южный федеральный университет (ЮФУ), 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, д. 105/42; e-mail: aovatulyan@sfedu.ru; ORCID: 0000-0003-0444-4496

Шамшин Вячеслав Михайлович, кфмн, препод., Ростовский-на-Дону колледж связи и информатики (РКСИ), 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Тургеневская, д. 10/6; e-mail: ufocombat@mail.ru; ORCID: 0009-0006-2880-7182

Research article

Boundary integral equations of the first kind with smooth kernels in dynamic problems of orthotropic elasticity theory

A.O. Vatulyan^{1,2}, V.M. Shamshin³

¹ Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russian Federation.

² Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation.

³ Rostov-on-Don College of Communications and Informatics, Rostov-on-Don, Russian Federation.

Steady-state harmonic vibrations of an orthotropic elastic body are considered in a plane formulation. To solve boundary-value problems, a method of alternative boundary integral equations (ABIE) of the first kind with smooth kernels is proposed. The method enforces the solvability conditions directly on the characteristic set of the differential operator instead of constructing an explicit fundamental solution. The boundary formulation reduces the dimension of the problem by one and is especially effective for problems in which boundary displacements and stresses are unknown. In the zero-frequency limit, the scheme formally turns into the static ABIE formulation with the same set of boundary unknowns. A procedure for reducing the boundary equations to an overdetermined system of linear algebraic equations is proposed. To find its regularized solution, the truncated singular value decomposition (TSVD) method is applied. Numerical verification of the method is carried out by considering four model problems: for an elliptical domain with a prescribed stress vector on the boundary; for a rectangular domain clamped on one side; for the same rectangular domain with homogeneous mixed boundary conditions in a spectral formulation; and for an elliptical domain, in which the resonance frequencies are being determined. Comparison with the results of finite-element computations shows that, in the first problem, the discrepancy in the boundary displacements of the ellipse is 3–5%, while in the second problem the maximum discrepancy in components is 2.7%; in the problems of determining resonant frequencies, the maximum relative discrepancy between the computed frequencies does not exceed 0.07% for the rectangular domain and $10^{-3}\%$ for the elliptical domain. The obtained results confirm the computational stability and applicability of the proposed ABIE scheme.

Keywords: alternative boundary integral equations of the first kind, smooth kernels, characteristic set, orthotropic elasticity theory, steady-state vibrations, natural frequencies, corner singularities, regularization, FEM.

Received: 27.06.2026 / *Accepted:* 08.09.2026 / *Published online:* 31.10.2026

References

1. Bonnet M. Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids. Wiley, 1999. 392 p.
2. Banerjee P. K., Butterfield R. Boundary Element Methods in Engineering Science. London: McGraw-Hill, 1981. 452 p.
3. Ting T. C. T. Anisotropic Elasticity: Theory and Applications. Oxford University Press, 1996. 570 p. DOI: 10.1093/oso/9780195074475.001.0001
4. Sumbatyan M. A. A correct treatment of an ill-posed boundary equation in the acoustics of closed regions. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2001. Vol. 41, no. 3. P. 407–412.

5. Babeshko V. A. Obobshchennyi metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti. M.: Nauka, 1984. 256 p.
6. Babeshko V. A., Glushkov Ye. V., Zinchenko Zh. F. Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred. M.: Nauka, 1989. 344 p.
7. Vatul'yan A. O. O granichnykh integral'nykh uravneniyakh 1-go roda v dinamicheskikh zadachakh anizotropnoy teorii uprugosti. Doklady Akademii nauk. 1993. Vol. 333, no. 3. P. 312–314.
8. Vatul'yan A. O., Sadchikov E. V. A New Formulation of Boundary Integral Equations for the Helmholtz Equation. Acoustical Physics. 1998. Vol. 44, no. 3. P. 271–274.
9. Vatul'yan A. O., Shamshin V. M. A new version of boundary integral equations and their application to dynamic three-dimensional problems of the theory of elasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1998. Vol. 62, no. 3. P. 427–434. DOI: 10.1016/S0021-8928(98)00054-9
10. Vatul'yan A. O., Sadchikov E. V. On a new formulation of boundary integral equations in problems of vibration of anisotropic solids. Mechanics of Solids. 1999. Vol. 34, no. 2. P. 66–70.
11. Williams M. L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. Journal of Applied Mechanics. 1952. Vol. 19, no. 4. P. 526–528. DOI: 10.1115/1.4010553
12. Parton V. Z., Perlin P. I. Mathematical Methods of the Theory of Elasticity: in 2 vols. Moscow: Mir, 1984. Vol. 1, 317 p. Vol.2, 356 p.
13. Hörmander L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis. Springer, 1983. 391 p.
14. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach. 2nd ed. M.: Nauka, 1979. 285 p.
15. Hansen P. C. Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion. SIAM, 1998. 247 p. DOI: 10.1137/1.9780898719697
16. Golub G. H., Heath M., Wahba G. Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. Technometrics. 1979. Vol. 21, no. 2. P. 215–223. DOI: 10.1080/00401706.1979.10489751
17. Dempsey J. P., Sinclair G. B. On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge. Journal of Elasticity. 1979. Vol. 9, no. 4. P. 373–391. DOI: 10.1007/BF00044615
18. Lekhnitskii S. G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Moscow: Mir Publishers, 1981. 430 p.
19. Cheung Y. K., Jin W. G., Zienkiewicz O. C. Direct solution procedure for solution of harmonic problems using complete, non-singular, Trefftz functions. Communications in Applied Numerical Methods. 1989. Vol. 5, no. 3. P. 159–169. DOI: 10.1002/cnm.1630050304
20. Jin W. G., Cheung Y. K., Zienkiewicz O. C. Application of the Trefftz method in plane elasticity problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1990. Vol. 30, no. 6. P. 1147–1161. DOI: 10.1002/nme.1620300605
21. Boroomand B., Soghrati S., Movahedian B. Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010. Vol. 81, no. 8. P. 971–1018. DOI: 10.1002/nme.2718
22. Fox L., Henrici P., Moler C. Approximations and Bounds for Eigenvalues of Elliptic Operators. SIAM Journal on Numerical Analysis. 1967. Vol. 4, no. 1. P. 89–102. DOI: 10.1137/0704008
23. Betcke T., Trefethen L. N. Reviving the Method of Particular Solutions. SIAM Review. 2005. Vol. 47, no. 3. P. 469–491. DOI: 10.1137/S0036144503437336
24. Kurant R., Gil'bert D. Metody matematicheskoy fiziki. T. 1. 3rd ed. M.; L.: Gosudarstvennoye izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1951. 476 p.
25. Lyubarskii G. Ya. The Application of Group Theory in Physics. Oxford: Pergamon Press, 1960. 380 p. DOI: 10.1016/C2013-0-08180-7
26. Hyer M. W., Herakovich C. T., Milkovich S. M., Short Jr. J. S. Temperature dependence of mechanical and thermal expansion properties of T300/5208 graphite/epoxy. Composites. 1983. Vol. 14, no. 3. P. 276–280. DOI: 10.1016/0010-4361(83)90016-2
27. Hansen P. C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. SIAM Review. 1992. Vol. 34, no. 4. P. 561–580. DOI: 10.1137/1034115
28. Morozov V. A. Regul'yarnyye metody resheniya nekorrektno postavlennyykh zadach. M.: Nauka, 1987. 240 p.