

Научная статья

Сравнительный анализ методов вычисления коэффициентов интенсивности напряжений для анизотропных материалов при смешанной моде разрушения

*А.В. Савиковский^{1,2}, А.С. Семенов¹*¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация² АО «Силовые машины – ЗТЛ, ЛМЗ, Электросила, Энергомашиэкспорт», Санкт-Петербург, Российская Федерация

Представлены результаты сравнения четырех методов вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) для анизотропных материалов в задачах линейной механики разрушения при смешанной моде: метод экстраполяции перемещений, метод экстраполяции напряжений, метод эквивалентного объемного интегрирования при вычислении J_k -интегралов (инвариантных интегралов J_1 и J_2) и метод вычисления J_k -интегралов на основе интегрирования по контуру (по определению). Детально рассмотрена специфика анизотропии материалов с кубической симметрией, актуальная для монокристаллических сплавов на никелевой основе, из которых изготавливаются рабочие и направляющие лопатки современных газотурбинных установок. Для этого класса материалов с использованием формализма Лехницкого получены аналитические выражения для определения КИН на основе J_k -интегралов при произвольной ориентации трещины и смешанной моде разрушения. В качестве тестовой задачи для сравнительного анализа возможностей методов решается задача об одноосном растяжении анизотропной плоскости с наклонной трещиной в предположении плоского напряженного состояния, допускающая аналитическое решение. Оцениваются точность и сходимость обсуждаемых методов вычисления КИН в зависимости от дискретизации области (числа конечных элементов), ориентации трещины по отношению к направлению нагружения и степени анизотропии материала. Задача решена для трех характерных углов наклона трещины: 15° , когда доминирует I мода (отрыва) в сравнении с II модой (продольного сдвига); 45° , когда КИН равны между собой; 75° , когда II мода (продольного сдвига) доминирует над I модой (отрыва). Исследована чувствительность погрешностей K_I и K_{II} к погрешностям вычисления J_1 и J_2 , позволяющая установить ограничения на области применимости методов определения КИН на основе J_k -интегралов.

Ключевые слова: кубическая симметрия, наклонная трещина, смешанная мода разрушения, коэффициенты интенсивности напряжений, метод экстраполяции перемещений, метод экстраполяции напряжений, метод эквивалентного объемного интегрирования, контурные J_k -интегралы

Получение: 16.05.2026 / Принятие: 16.07.2026 / Публикация онлайн: 31.10.2026

УДК 539.42

1. Введение

Анализ трещиностойкости ответственных элементов энергетического оборудования является актуальной для практики задачей. Рабочие и направляющие лопатки современных авиадвигателей и стационарных газотурбинных установок подвержены действию высоких температур (например, температура газа на входе в турбину может достигать 1500°C [1]), значительных центробежных нагрузок [2] и давления газа [3]. В целях повышения прочности и долговечности рабочих лопаток во избежание их межкристаллитного разрушения в качестве конструкционных материалов все чаще применяют монокристаллические сплавы [3]. Жаропрочные монокристаллические сплавы на никелевой основе являются анизотропными материалами и обладают кубической симметрией с ярко выраженной зависимостью механических свойств от кристаллографического направления [2, 3].

В процессе эксплуатации от действия переменных интенсивных комбинированных нагрузок в рабочих лопатках возникают и развиваются трещины различной природы (вследствие мало- и многоциклового усталости, ползучести, термической усталости) [4]. При проектировании для оценки остаточного ресурса и обеспечения с высокой точностью требуемых запасов прочности, долговечности и трещиностойкости рабочих лопаток газовых турбин необходим учет анизотропии упругих свойств монокристаллических сплавов лопаток при расчетах показателей разрушения.

Одним из основных параметров линейной механики разрушения является коэффициент интенсивности напряжений (КИН) [5], по которому определяются распределения полей перемещений, напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. При рассмотрении трещин в конструкциях из анизотропных материалов в общем случае геометрии и нагружения возникает необходимость вычисления КИН в условиях смешанных мод разрушения (при комбинации нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига). В статье [6] получены асимптотические выражения для перемещений и напряжений в малой окрестности вершины трещины для анизотропной однородной плоскости при смешанной моде нагружения. С целью получения определяющих уравнений и асимптотических решений для анизотропного материала традиционно применяется формализм Лехницкого [7]. Для расчета параметров разрушения линейно-упругих анизотропных материалов используются разные методы. Так, методом экстраполяции перемещений рассчитывается КИН на основе перемещений берегов трещины [8], методом экстраполяции напряжений — исходя из предполагаемого направления роста трещины [9]. Примеры расчетов КИН анизотропных материалов при различных конфигурациях тел и конструкций с трещинами методами экстраполяции перемещений и напряжений представлены в [10–13]. Для определения траектории непрямолинейного роста трещины используются дополнительные критерии (максимального окружного напряжения, минимума плотности энергии деформаций, максимума выделения энергии, локальной симметрии и другие), а также критерии, основанные на вычислении КИН [14–16].

Другими параметрами разрушения в линейной и нелинейной механике разрушения служат контурные J_k -интегралы, одним из которых является инвариантный J -интеграл Черепанова–Райса [17–19]. Для трещины, растущей в условиях смешанной моды, также может быть введен векторный J -интеграл [20] с компонентами J_1 и J_2 , которые приемлемы для вычисления КИН (K_I и K_{II}) в случаях линейно-упругих материалов в условиях смешанной моды разрушения. Существуют различные численные методы отыскания J_k -интегралов, например: расчет по определению, связанный с непосредственным вычислением контурного интеграла; метод эквивалентного объемного интегрирования [21, 22]; метод виртуального закрытия трещины [23]; метод интеграла взаимодействия (M -интеграла) [24, 25] и другие. В настоящей статье применяются методы вычисления контурных J_k -интегралов по определению (прямое интегрирование по контуру) и метод эквивалентного объемного интегрирования (ЭОИ). При неучете вкладов по берегам трещины контурный интеграл J_2 , в отличие от J_1 , является неинвариантным. При вычислении слагаемых по берегам трещины вблизи ее вершины возникают вычислительные трудности [26, 27]. Данная проблема имеет несколько решений: пренебрежение слагаемым в вершине трещины или его экстраполяция [27, 28]. КИН могут быть найдены через J_k -интегралы [20–22]. Известны нелинейные выражения J_k -интегралов через КИН (в виде квадратичной формы) для анизотропных материалов [29, 30]. Однако обратные выражения КИН через J_k -интегралы при смешанной моде разрушения для анизотропных материалов связаны в общем случае с поиском корней полинома шестой степени, что требует применения численных методов. Для случая материалов с кубической симметрией в данной работе получены аналитические соотношения для вычисления КИН через контурные J_k -интегралы.

Несмотря на распространение методов экстраполяции перемещений, напряжений и J_k -интегралов, при определении КИН для анизотропных материалов все еще отсутствуют систематическое изучение их точности и сравнительный анализ сходимости в широком диапазоне отклонения осей анизотропии от направления роста трещины и параметров анизотропии материала. Целью данной работы является исследование точности и сходимости численных методов вычисления КИН для анизотропных материалов на примере решения тестовой задачи с наклонной трещиной и сравнение результатов, полученных всеми методами, с аналитическим решением, а также оценка влияния степени анизотропии материала и углов наклона трещины на скорость сходимости обсуждаемых методов.

2. Численные методы вычисления коэффициентов интенсивности напряжений для анизотропных материалов

2.1. Метод экстраполяции перемещений

Рассматривается задача с одиночной трещиной в анизотропном теле в предположении плоского напряженного состояния с произвольными нагрузками в плоскости Oxy . Трещина и связанная с ней система координат материала (x', y') повернуты на произвольный угол α ; система координат материала совпадает с глобальной системой координат (Рис. 1).

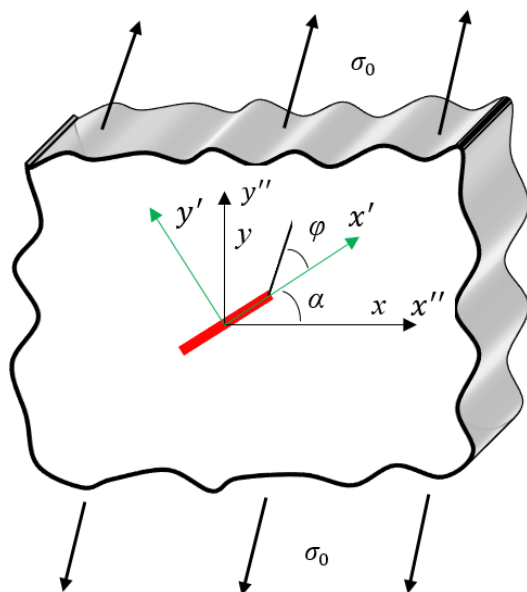


Рис. 1. Схема произвольного нагружения анизотропного тела с одиночной наклонной прямолинейной трещиной (выделена жирной линией): x, y – оси глобальной системы координат, x', y' – оси системы координат трещины, x'', y'' – оси анизотропии материала, α – угол наклона трещины, φ – угол между направлением на точку и осью (линией продолжения) трещины; стрелки указывают направление произвольного нагружения σ_0

Асимптотические выражения компонент вектора перемещений в окрестности вершины трещины в полярной системе координат при наличии мод разрушения отрыва и поперечного сдвига (ненулевые K_I и K_{II}) для анизотропного материала при использовании формализма Лехницкого имеют следующий вид [6]:

— при I моде разрушения

$$\begin{aligned} u'_x(r, \varphi) &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\mu'_1 p_2 \sqrt{\cos \varphi + \mu'_2 \sin \varphi} - \mu'_2 p_1 \sqrt{\cos \varphi + \mu'_1 \sin \varphi} \right) \right], \\ u'_y(r, \varphi) &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\mu'_1 q_2 \sqrt{\cos \varphi + \mu'_2 \sin \varphi} - \mu'_2 q_1 \sqrt{\cos \varphi + \mu'_1 \sin \varphi} \right) \right]; \end{aligned} \quad (1)$$

— при II моде разрушения

$$\begin{aligned} u'_x(r, \varphi) &= \frac{K_{II} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(p_2 \sqrt{\cos \varphi + \mu'_2 \sin \varphi} - p_1 \sqrt{\cos \varphi + \mu'_1 \sin \varphi} \right) \right], \\ u'_y(r, \varphi) &= \frac{K_{II} \sqrt{2r}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(q_2 \sqrt{\cos \varphi + \mu'_2 \sin \varphi} - q_1 \sqrt{\cos \varphi + \mu'_1 \sin \varphi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $u'_x(r, \varphi)$, $u'_y(r, \varphi)$ — перемещения в системе координат трещины; K_I , K_{II} — КИН для I и II мод разрушения; r — расстояние от вершины трещины до рассматриваемой точки; φ — угол между направлением на точку и осью (линией продолжения) трещины; $p_i = S_{11}\mu_i^2 + S_{12} - S_{16}\mu_i$, $q_i = (S_{12}\mu_i^2 + S_{22} - S_{26}\mu_i)/\mu_i$, где S_{ij} — компоненты матрицы податливости материала в системе координат трещины; μ'_1 , μ'_2 — корни характеристического уравнения равновесия анизотропного материала 4-й степени:

$$S'_{11}\mu^4 - 2S'_{16}\mu^3 + (2S'_{12} + S'_{66})\mu^2 - 2S'_{26}\mu + S'_{22} = 0. \quad (3)$$

Перемещения на свободных берегах трещины для I и II мод определяются с помощью выражений (1) и (2) при значениях угла φ , равных $\pm\pi$. Раскрытие трещины (относительное перемещение берегов) описывается системой уравнений:

$$\{\Delta \mathbf{U}'(r)\} = 2\sqrt{\frac{2r}{\pi}} [\mathbf{B}] \{\mathbf{K}\}, \quad (4)$$

где $\{\Delta \mathbf{U}'(r)\} = \begin{Bmatrix} u'_x(r, \pi) - u'_x(r, -\pi) \\ u'_y(r, \pi) - u'_y(r, -\pi) \end{Bmatrix}$, $\{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix}$, $[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} \left(\frac{\mu'_1 p_2 - \mu'_2 p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{p_2 - p_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i \right) \\ \operatorname{Re} \left(\frac{\mu'_1 q_2 - \mu'_2 q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{q_2 - q_1}{\mu'_1 - \mu'_2} i \right) \end{bmatrix}$ — матрица

2×2, описывающая взаимное влияние компонент вектора относительного смещения берегов трещины на КИН.

Учет в асимптотических разложениях (1) и (2) еще одного слагаемого — слагаемого следующего порядка степени по r :

$$\{\mathbf{K}\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\mathbf{B}]^{-1} \frac{\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} \{\Delta \mathbf{U}'(r_1)\} - \frac{r_1}{\sqrt{r_2}} \{\Delta \mathbf{U}'(r_2)\}}{r_2 - r_1}, \quad (5)$$

позволяет выразить КИН через значения раскрытия трещины в двух точках на берегах трещины, находящихся на расстояниях r_1 и r_2 от вершины.

2.2. Метод экстраполяции напряжений

Асимптотические выражения для компонент тензора напряжений в окрестности вершины трещины при наличии мод разрушения отрыва и поперечного сдвига (ненулевые K_I и K_{II}) для анизотропного материала на основе формализма Лехницкого имеют следующий вид [6]:

— в случае I моды разрушения

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx}(r, \varphi) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu'_1 \mu'_2}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos \varphi + \mu'_2 \sin \varphi}} - \frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu'_1 \sin \varphi}} \right) \right], \\ \sigma'_{yy}(r, \varphi) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\frac{\mu'_1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu'_2 \sin \varphi}} - \frac{\mu'_2}{\sqrt{\cos \varphi + \mu'_1 \sin \varphi}} \right) \right], \\ \sigma'_{xy}(r, \varphi) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu'_1 \mu'_2}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu'_2 \sin \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu'_1 \sin \varphi}} \right) \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

— в случае II моды разрушения

$$\begin{aligned}\sigma'_{xx}(r, \varphi) &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\frac{\mu_2'^2}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_2' \sin \varphi}} - \frac{\mu_1'^2}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_1' \sin \varphi}} \right) \right], \\ \sigma'_{yy}(r, \varphi) &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_2' \sin \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_1' \sin \varphi}} \right) \right], \\ \sigma'_{xy}(r, \varphi) &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu'_1 - \mu'_2} \left(\frac{\mu_1'}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_2' \sin \varphi}} - \frac{\mu_2'}{\sqrt{\cos \varphi + \mu_1' \sin \varphi}} \right) \right].\end{aligned}\quad (7)$$

Следствием уравнений (6) и (7), полученным с использованием выражений для напряжений на продолжении линии трещины ($\varphi = 0$), являются соотношения:

$$\left\{ \begin{matrix} K_I \\ K_{II} \end{matrix} \right\} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \left\{ \begin{matrix} \sigma'_{yy}(r, 0) \\ \sigma'_{xy}(r, 0) \end{matrix} \right\}.\quad (8)$$

Учет в асимптотических разложениях (6) и (7) слагаемого более высокого порядка степени по r позволяет представить КИН через значения напряжений в двух точках на берегах трещины, находящихся на расстояниях r_1 и r_2 в окрестности вершины трещины:

$$\left\{ \begin{matrix} K_I \\ K_{II} \end{matrix} \right\} = \sqrt{2\pi} \frac{r_2 \sqrt{r_1} \left\{ \begin{matrix} \sigma'_{yy}(r_1, 0) \\ \sigma'_{xy}(r_1, 0) \end{matrix} \right\} - r_1 \sqrt{r_2} \left\{ \begin{matrix} \sigma'_{yy}(r_2, 0) \\ \sigma'_{xy}(r_2, 0) \end{matrix} \right\}}{r_2 - r_1}.\quad (9)$$

В выражениях (6)–(9) компоненты тензора напряжений вычисляются в системе координат трещины.

2.3. Метод вычисления J_k -интегралов интегрированием по контуру

Рассматривается произвольный 2-мерный контур, охватывающий вершину трещины и опирающийся на ее берега (Рис. 2). В каждой точке контура известны нормаль к нему $\mathbf{n}$ и вектор напряжений $\mathbf{T}$, связанный с тензором напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ формулой: $\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Берега трещины считаются свободными от нагрузок.

Контурные J_k -интегралы определяются следующим образом [17, 18]:

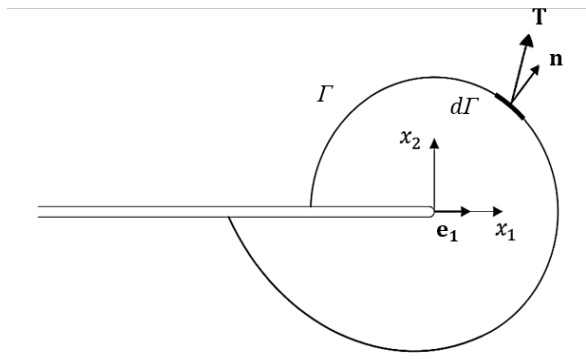


Рис. 2. Контур, охватывающий вершину трещины

$$\begin{aligned}J_k &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_k = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} (W \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{u} \nabla)) d\Gamma \right) \cdot \mathbf{e}_k = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(W n_k - n_j \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma.\end{aligned}\quad (10)$$

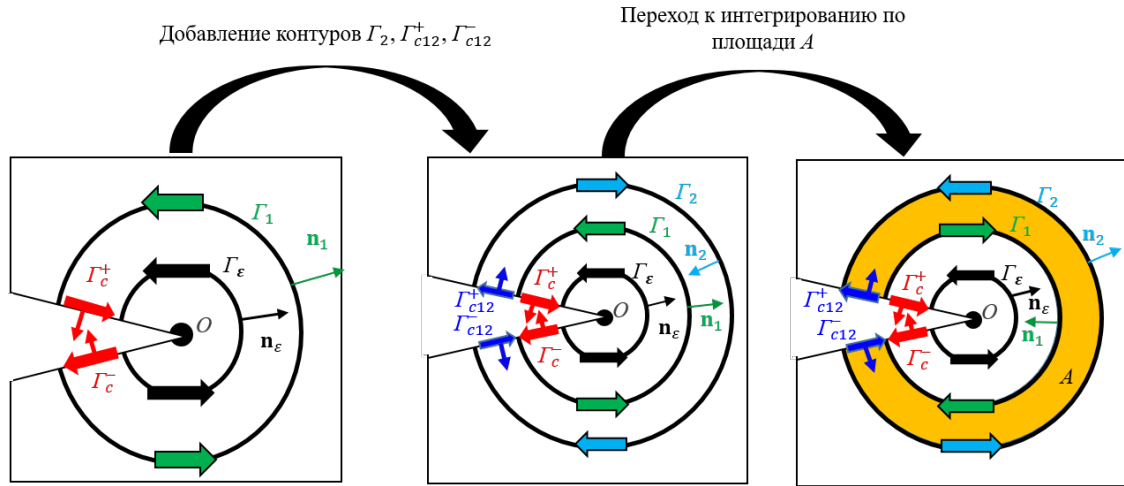
Здесь $k = 1, 2$; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; W — плотность механической энергии деформации; $\partial/\partial x_k$ — частная производная по координате системы координат трещины. Ось x_1 направлена вдоль трещины, ось x_2 — перпендикулярно ей, то есть J -интеграл определяется при стремлении контура к точке — вершине трещины. Из условия равенства нулю интеграла по замкнутому контуру, не охватывающему вершину трещины, получается выражение для J_k -интегралов по конечному (не бесконечно малому) контуру, учитывающее слагаемое по берегам трещины [26, 31]:

$$J_k = \int_{\Gamma_1} \left(W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \left(W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma,\quad (11)$$

где $k = 1, 2$. Слагаемое — интеграл по берегам трещины Γ_c — обеспечивает инвариантность контурного интеграла J_2 . В расчетах J_k -интегралов выражение (11) используется далее в качестве базового.

2.4. Вычисление J_k -интегралов методом эквивалентного объемного интегрирования

Рассматривается произвольное тело с трещиной, некоторым контуром интегрирования Γ_1 и бесконечно малым контуром интегрирования Γ_ε (Рис. 3).

Рис. 3. Схема расчета J_k -интегралов методом ЭОИ

Для использования метода эквивалентного объемного интегрирования (ЭОИ) вводится s -функция $s = s(x_1, x_2)$ такая, что $s = 1$ на ближнем контуре Γ_1 и $s = 0$ на дальнем контуре Γ_2 (Рис. 3). С учетом этого из (11) следует:

$$J_k = \int_{\Gamma_1} \left(W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) s d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \left(W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) s d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \left(W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma. \quad (12)$$

Применение теоремы Остроградского–Гаусса для замкнутой границы, образованной контурами Γ_1, Γ_2 и добавленным Γ_{c12} , приводит к уравнению для вычисления J_k -интегралов методом ЭОИ [32]:

$$J_k = - \int_A \left(W \frac{\partial s}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial s}{\partial x_j} \right) dA - \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial x_k} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) s dA - \\ - \int_{\Gamma_{c12}} \left(W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) s d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \left(W n_k - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\Gamma. \quad (13)$$

Здесь A — площадь между контурами Γ_1 и Γ_2 ; s — функция, которая выступает в роли функции формы конечного элемента. Таким образом, соседние контуры — это кольцевые слои конечных элементов вокруг вершины трещины.

Для уточнения последнего слагаемого J_{2c} в (13) при нахождении J_2 в конечном элементе около вершины трещины используется экстраполяция значения J_{2c} из предыдущего конечного элемента на основе асимптотических выражений. В статье [31] показано, что, независимо от того, изотропный материал или анизотропный, значения J_{2c} в отдельных конечных элементах (FE) соотносятся между собой как

$$\frac{J_{2c}^{1FE}}{J_{2c}^{qFE}} = \frac{J_{2c}^{first-contour}}{J_{2c}^{q-contour}} = \frac{1}{\sqrt{q} - \sqrt{q-1}}, \quad (14)$$

где q — номер внешнего контура. На его основе экстраполируется значение J_2 -интеграла в 1-й контур по значению J_2 -интеграла в удаленном охватывающем контуре, что позволяет существенно повысить точность вычисления J_2 .

2.5. Вычисление КИН через контурные J_k -интегралы в случае кубической симметрии

Выражения J_k -интегралов через КИН для анизотропного материала имеют вид [23, 29, 30]:

$$\begin{cases} J_1 = -\frac{S'_{11}}{2} (K_I^2 \text{Im}((\mu'_1 + \mu'_2) \bar{\mu}'_1 \bar{\mu}'_2) + 2K_I K_{II} \text{Im}(\bar{\mu}'_1 \bar{\mu}'_2) - K_{II}^2 \text{Im}(\mu'_1 + \mu'_2)), \\ J_2 = \frac{S'_{11}}{4} (K_I^2 \text{Im}(\mu_1'^2 \mu_2'^2) + 4K_I K_{II} \text{Im}(\mu'_1 + \mu'_2) \text{Re}(\mu'_1 \mu'_2) + K_{II}^2 \text{Im}(\mu_1'^2 + \mu_2'^2)), \end{cases} \quad (15)$$

где S'_{ij} — константы матрицы податливости в системе координат трещины, μ'_1 и μ'_2 — комплексные корни характеристического уравнения 4-й степени (3) с положительной мнимой частью для анизотропного материала в системе координат трещины. В случае плоского напряженного состояния и ортотропного материала корни μ'_1 и μ'_2 определяются следующим образом [33].

Вариант 1. Если $\left(\frac{E_1}{2G_{12}} - \nu_{12}\right)^2 - \frac{E_1}{E_2} < 0$, то корни уравнения (3) выражаются равенствами:

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= \frac{A \cos 2\alpha + \frac{A^2 + B^2 - 1}{2} \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha + A \sin 2\alpha + (A^2 + B^2) \sin^2 \alpha} + i \frac{B}{\cos^2 \alpha + A \sin 2\alpha + (A^2 + B^2) \sin^2 \alpha}, \\ \mu'_2 &= \frac{-A \cos 2\alpha + \frac{A^2 + B^2 - 1}{2} \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha - A \sin 2\alpha + (A^2 + B^2) \sin^2 \alpha} + i \frac{B}{\cos^2 \alpha - A \sin 2\alpha + (A^2 + B^2) \sin^2 \alpha},\end{aligned}\quad (16)$$

где $A = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)}$, $B = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} + \left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right)}$, α — угол наклона трещины относительно осей анизотропии материала.

Вариант 2. Если $\left(\frac{E_1}{2G_{12}} - \nu_{12}\right)^2 - \frac{E_1}{E_2} \geq 0$, то корни имеют вид:

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= \frac{((b^* + a^*)^2 - 1) \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + (b^* + a^*)^2 \sin^2 \alpha} + i \frac{b^* + a^*}{\cos^2 \alpha + (b^* + a^*)^2 \sin^2 \alpha}, \\ \mu'_2 &= \frac{((b^* - a^*)^2 - 1) \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + (b^* - a^*)^2 \sin^2 \alpha} + i \frac{b^* - a^*}{\cos^2 \alpha + (b^* - a^*)^2 \sin^2 \alpha},\end{aligned}\quad (17)$$

где $a^* = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right) - 2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}}$, $b^* = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{E_1}{G_{12}} - 2\nu_{12}\right) + 2 \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}}$. В случае кубической симметрии выполняется равенство $E_1 = E_2$, и уравнения (15)–(17) значительно упрощаются. При введении обозначений $E = E_1 = E_2$, $\nu_{12} = \nu$ получается: $A = \sqrt{\frac{1-\rho}{2}}$, $B = b^* = \sqrt{\frac{1+\rho}{2}}$, $a^* = \sqrt{\frac{\rho-1}{2}}$, $\rho = \frac{E}{2G} - \nu$. Для Варианта 1 ($|\rho| \leq 1$) с учетом $A^2 + B^2 - 1 = 0$ выражения для корней (16) становятся следующими:

$$\begin{aligned}\mu'_1 &= \frac{A \cos 2\alpha}{1 + A \sin 2\alpha} + i \frac{B}{1 + A \sin 2\alpha}, \\ \mu'_2 &= \frac{-A \cos 2\alpha}{1 - A \sin 2\alpha} + i \frac{B}{1 - A \sin 2\alpha}.\end{aligned}\quad (18)$$

В случае материалов с кубической симметрией в приложении к монокристаллическим никелевым сплавам всегда выполняется условие из Варианта 1 ($\rho < 1$), поэтому Вариант 2 далее не рассматривается. Подстановка выражений для корней (18) в уравнение (15) с учетом легко проверяемых соотношений $\text{Im}(\bar{\mu}'_1 \mu'_2) = 0$, $\text{Im}(\mu'^2_1 \mu'^2_2) = 0$ приводит к системе:

$$\begin{cases} J_1 = \frac{B}{E} (K_I^2 + K_{II}^2), \\ J_2 = \frac{B}{E} \left(-2K_I K_{II} - \frac{A^2 \sin 4\alpha}{1 - A^2 \sin^2 2\alpha} K_{II}^2 \right). \end{cases}\quad (19)$$

Заслуживают внимания сумма и разность J_1 и J_2 из (19):

$$\begin{cases} J_1 + J_2 = \frac{B}{E} \left[K_I^2 - 2K_I K_{II} + K_{II}^2 \left(1 - \frac{A^2 \sin 4\alpha}{1 - A^2 \sin^2 2\alpha} \right) \right], \\ J_1 - J_2 = \frac{B}{E} \left[K_I^2 + 2K_I K_{II} + K_{II}^2 \left(1 + \frac{A^2 \sin 4\alpha}{1 - A^2 \sin^2 2\alpha} \right) \right]. \end{cases}\quad (20)$$

Дополнение правых частей уравнений (20) до полных квадратов приводит к выражениям:

$$\begin{cases} J_1 - C J_2 = \frac{B}{E} (K_I + C K_{II})^2, \\ J_1 + D J_2 = \frac{B}{E} (K_I - D K_{II})^2, \end{cases}\quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}D &= \frac{\sqrt{(A^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha)^2 + (1 - A^2 \sin^2 2\alpha)^2} - A^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{1 - A^2 \sin^2 2\alpha}, \\ C &= \frac{\sqrt{(A^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha)^2 + (1 - A^2 \sin^2 2\alpha)^2} + A^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{1 - A^2 \sin^2 2\alpha}.\end{aligned}\quad (22)$$

Следствием (21) является система уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{E}{B}} \sqrt{J_1 - C J_2} = |K_I + C K_{II}|, \\ \sqrt{\frac{E}{B}} \sqrt{J_1 + D J_2} = |K_I - D K_{II}|, \end{cases} \quad (23)$$

откуда получаются выражения для КИН:

$$\begin{aligned} K_I &= \sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{D \sqrt{J_1 - C J_2} \text{sign}(K_I + C K_{II}) + C \sqrt{J_1 + D J_2} \text{sign}(K_I - D K_{II})}{C + D}}, \\ K_{II} &= \sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{\sqrt{J_1 - C J_2} \text{sign}(K_I + C K_{II}) - \sqrt{J_1 + D J_2} \text{sign}(K_I - D K_{II})}{C + D}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для снятия в (24) неопределенности в выборе знаков, связанной с заменой модуля в правых частях (23), рассмотрено восемь качественно различных ситуаций:

1) $K_I - D K_{II} > 0, K_I + C K_{II} > 0$,

$$K_I = \sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{D \sqrt{J_1 - C J_2} + C \sqrt{J_1 + D J_2}}{C + D}}, \quad K_{II} = \sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{\sqrt{J_1 - C J_2} - \sqrt{J_1 + D J_2}}{C + D}}; \quad (25)$$

2) $K_I - D K_{II} < 0, K_I + C K_{II} > 0$,

$$K_I = \sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{D \sqrt{J_1 - C J_2} - C \sqrt{J_1 + D J_2}}{C + D}}, \quad K_{II} = \sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{\sqrt{J_1 - C J_2} + \sqrt{J_1 + D J_2}}{C + D}}; \quad (26)$$

3) $K_I - D K_{II} > 0, K_I + C K_{II} < 0$,

$$K_I = -\sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{D \sqrt{J_1 - C J_2} - C \sqrt{J_1 + D J_2}}{C + D}}, \quad K_{II} = -\sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{\sqrt{J_1 - C J_2} + \sqrt{J_1 + D J_2}}{C + D}}; \quad (27)$$

4) $K_I - D K_{II} < 0, K_I + C K_{II} < 0$, откуда следует: $K_I < 0$, а это означает, что трещина закрыта;

5) $K_I - D K_{II} = 0, K_I + C K_{II} > 0$,

$$K_I = \sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{D \sqrt{J_1 - C J_2}}{C + D}}, \quad K_{II} = \sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{\sqrt{J_1 - C J_2}}{C + D}}; \quad (28)$$

6) $K_I - D K_{II} = 0, K_I + C K_{II} < 0$, из неравенств следует: $K_I < 0$, то есть трещина закрыта;

7) $K_I + C K_{II} = 0, K_I - D K_{II} > 0$,

$$K_I = \sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{C \sqrt{J_1 + D J_2}}{C + D}}, \quad K_{II} = -\sqrt{E \sqrt{\frac{2}{1+\rho}} \frac{\sqrt{J_1 + D J_2}}{C + D}}; \quad (29)$$

8) $K_I + C K_{II} = 0, K_I - D K_{II} < 0$, откуда следует $K_I < 0$, что говорит о закрытии трещины.

Для проверки знаков выражений $K_I + C K_{II}$ и $K_I - D K_{II}$, определяемых восемью рассмотренными ситуациями, требующими знания еще не определенных K_I и K_{II} , может быть рекомендовано использование асимптотических выражений для КИН, позволяющих по соответствующим напряжениям около вершины трещины судить о соотношениях КИН [6]:

$$\begin{cases} \sigma'_{yy}(r, 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}, \\ \sigma'_{xy}(r, 0) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}. \end{cases} \quad (30)$$

3. Краевая задача о растяжении анизотропной пластины с наклонной трещиной

Для приближения к решению задачи о растяжении плоскости с трещиной, имеющей аналитическое решение, берется анизотропная пластина квадратной формы с наклонной центральной макротрещиной (Рис. 4). Размеры пластины в 40 раз превышают длину трещины $2L = 1$ мм. В расчетах используется следующее значение постоянного по границе растягивающего нагружения: $\sigma_0 = 100$ МПа. Задача решается при условии плоского напряженного состояния.

Предполагается, что материал пластины является анизотропным и обладает кубической симметрией свойств. Обсуждается четыре значения параметра ρ , при этом $\rho = 0.15$ соответствует реальному монокристаллическому сплаву ВЖМ4 (отечественному высокожаропрочному рений-рутение-никелевому сплаву, предназначенному для работы в условиях экстремально высоких температур), $\rho = 1.0$ — изотропному материалу. Значения $\rho = 0.5$ и

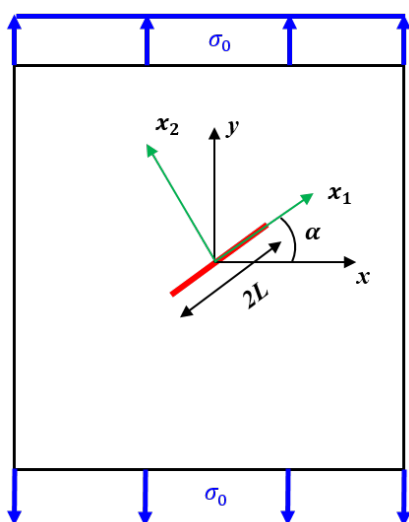


Рис. 4. Плоскость с центральной наклонной трещиной

- $\alpha = 15^\circ$, при котором $K_I > K_{II}$,
- $\alpha = 45^\circ$, при котором $K_I = K_{II}$,
- $\alpha = 75^\circ$, в этом случае $K_I < K_{II}$.

При исследовании сходимости численных решений применяются сетки разной плотности. Сетки включают число узлов: 5600, 22500, 90000 и 360000. Конечно-элементное разбиение с увеличенной областью около вершины трещины для сетки с 22500 узлами показано на рисунке 5. Для построения конечно-элементных моделей используются 8-узловые двумерные конечные элементы с квадратичной функцией формы для корректного вычисления распределений напряжений вблизи вершины трещины.

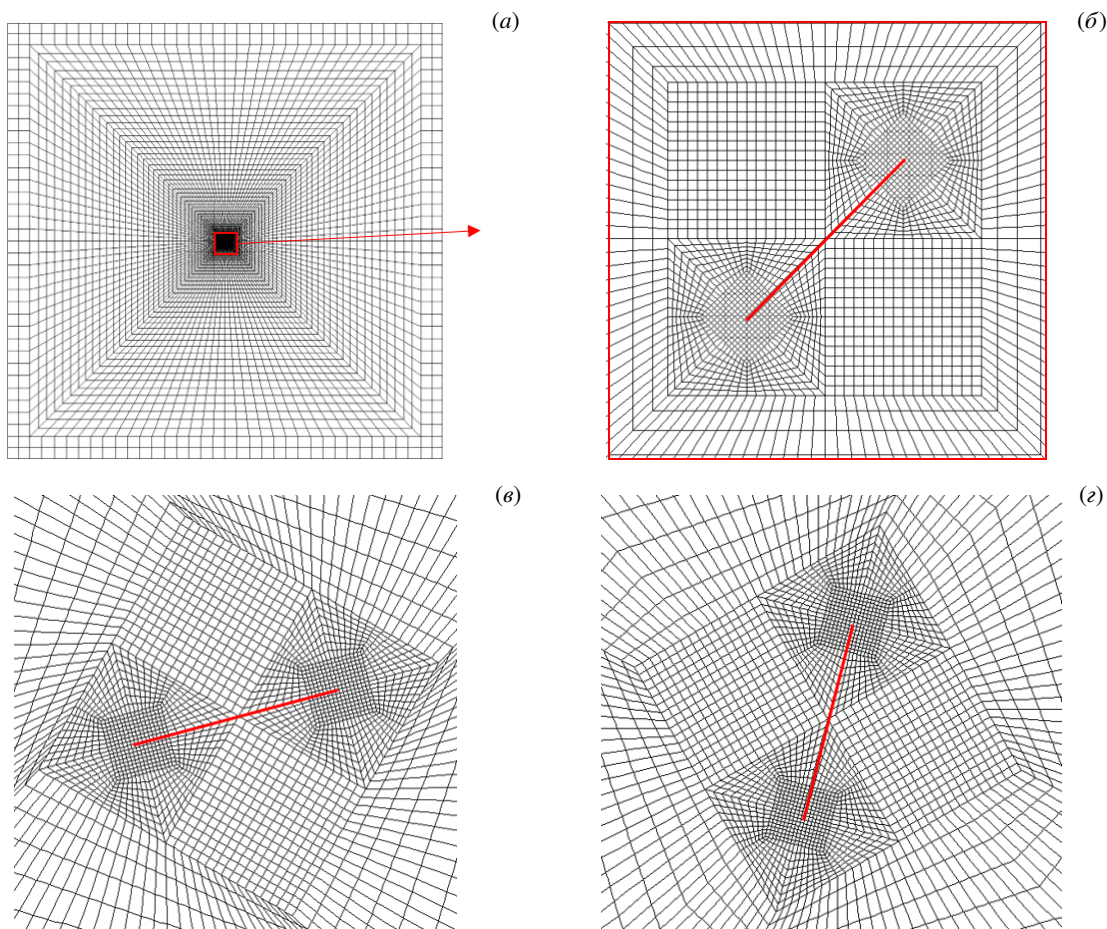


Рис. 5. Конечно-элементное разбиение в задаче о квадратной пластине с наклонной трещиной: полная конечно-элементная модель с 22500 узлами (а); область с трещиной в увеличенном масштабе при угле наклона трещины 45° (б), при 15° (в), при 75° (г)

$\rho = 2.0$ выбраны такими, что одно из них меньше плотности изотропного материала, а другое больше. Исследование фокусируется на сравнительном анализе сходимости разных численных методов при расчете КИН и оценке влияния на эту сходимость степени анизотропии.

Задача об одноосном растяжении плоскости с наклонной трещиной имеет аналитическое решение [6]:

$$\begin{aligned} K_I^{exact} &= \sigma_0 \sqrt{\pi L} \cos^2 \alpha, \\ K_{II}^{exact} &= \sigma_0 \sqrt{\pi L} \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \quad (31)$$

Следует отметить, что аналитическое решение для КИН (31) не зависит от упругих свойств и параметров анизотропии материала. Оно связано, во-первых, с бесконечностью плоскости, а во-вторых, с самоуравновешенностью нагрузок (растягивающих напряжений).

Чтобы проанализировать, как соотношение мод отрыва и сдвига влияет на результаты, рассматривается три угла наклона трещины:

При моделировании одноосного растяжения к верхней грани прикладывается растягивающее напряжение, на нижней грани фиксируются перемещения. Вычисление КИН производится методами экстраполяции перемещений и напряжений, а также через контурные интегралы J_k интегрированием по контуру (по определению) и методом ЭОИ согласно выражениям (24), причем для угла наклона трещины 15° используются формулы ситуации (25), для угла 45° — формулы (28), а для 75° — формулы (26).

Расчеты выполнены в конечно-элементном комплексе PANTOCRATOR [34], верификация которого на задачах с трещинами была проведена ранее в работах [31, 33].

4. К оценке сходимости численных методов

На рисунке 6 представлены результаты для сравнения сеточной сходимости различных методов вычисления КИН при одинаковом значении параметра анизотропии $\rho = 0.15$ и разном наклоне трещины. На графиках по оси ординат отложены отношения расчетных K_I и K_{II} к соответствующим аналитическим значениям из задачи о плоскости с трещиной (31).

Из рисунка видно, что во всех случаях наблюдается уменьшение погрешности при увеличении числа степеней свободы. Выявить явного лидера или аутсайдера среди обсуждаемых методов вычисления КИН в рассматриваемом

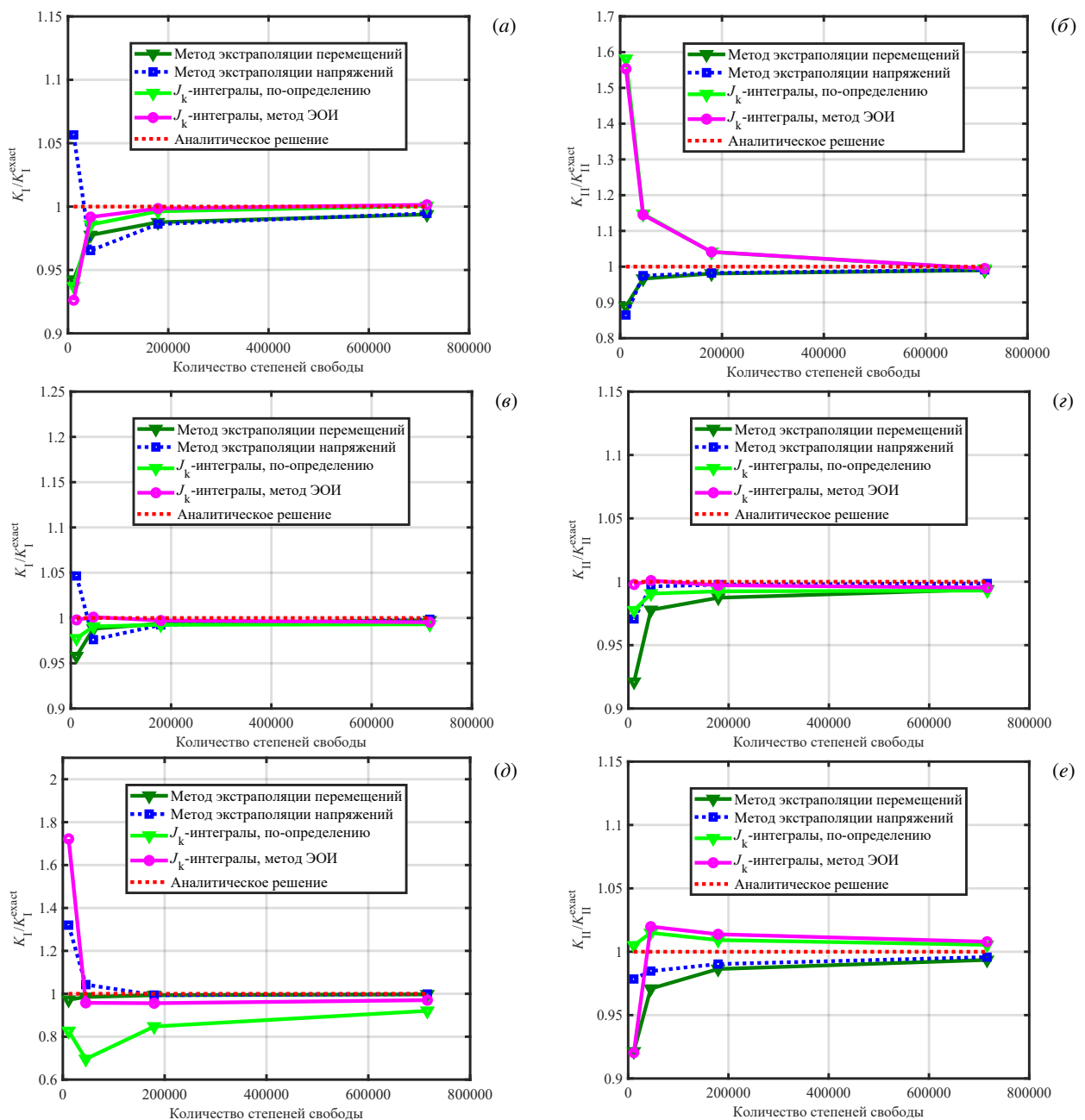


Рис. 6. К сравнению сходимости методов вычисления K_I (а, в, г) и K_{II} (б, г, е) при разном угле наклона трещины: 15° (а, б); 45° (в, г); 75° (д, е)

диапазоне изменения углов наклона трещины и заданной степени дискретизации области полученные результаты не позволяют. Однако следует отметить, что у методов, связанных с вычислением J_k -интегралов, при малых углах наклона трещины точность находимого K_{II} снижается, а при больших углах наклона трещины падает точность расчета K_I . Это связано с ростом погрешности определения слагаемого по берегам трещины в J_2 -интеграле [31].

Результаты влияния степени анизотропии материала (параметра ρ) на сходимость методов при вычислении K_I представлены на рисунке 7 для угла наклона трещины 15° . Рисунки 8 и 9 содержат данные аналогичных исследований при углах наклона 45° и 75° . Как видно из рисунка 7, наблюдается слабое влияние параметра ρ на сходимость всех рассматриваемых методов. Но при малом числе степеней свободы метод экстраполяции напряжений в случае угла наклона трещины 15° демонстрирует наихудшую точность расчета K_I (см. Рис. 7). Результаты на рисунках 7–9 свидетельствуют, что параметр анизотропии ρ слабо сказывается на сходимости методов для углов наклона трещины 15° и 45° . Но при угле 45° методы, связанные с вычислением КИН через J_k -интегралы, имеют сходимость лучшую, чем у методов вычисления КИН через перемещения берегов трещины и через напряжения. В то же время видно, что при 75° сходимость методов, в которых КИН рассчитываются

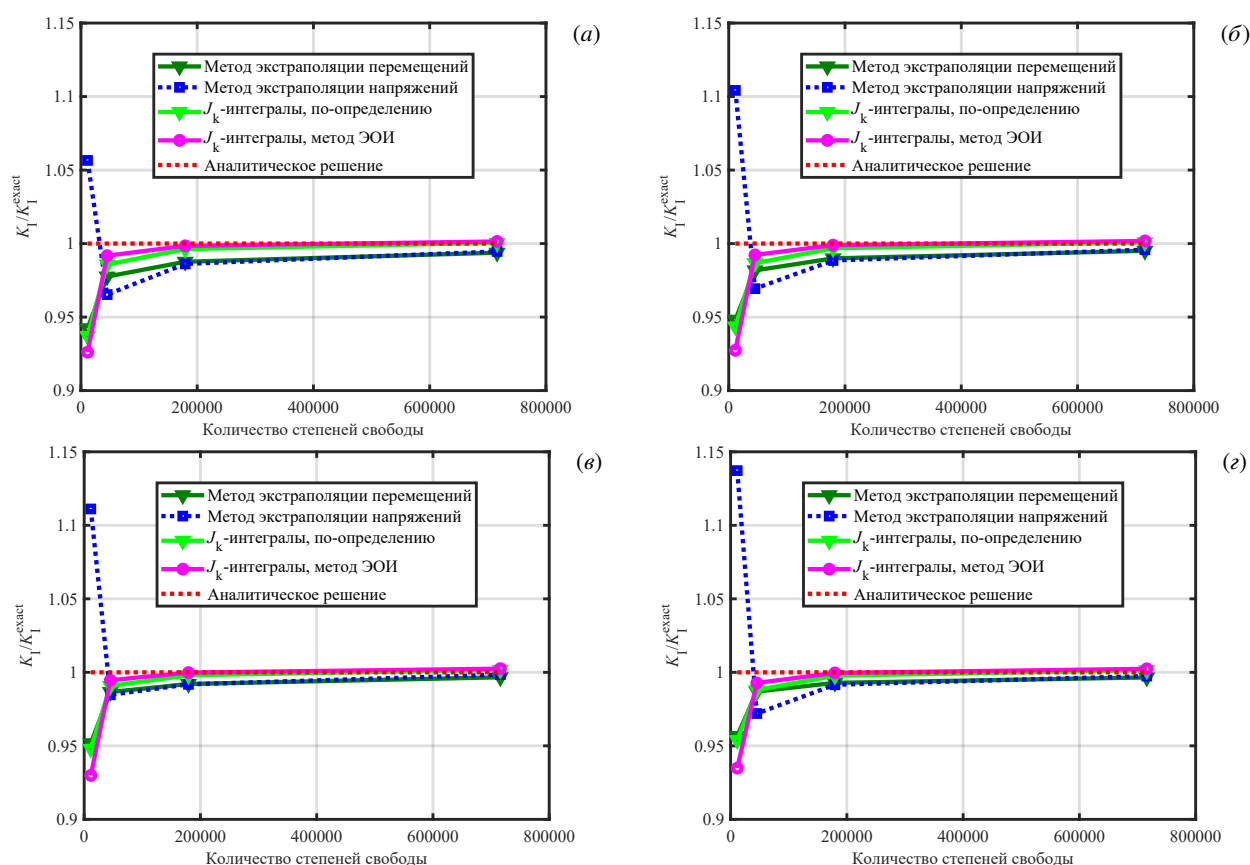


Рис. 7. Результаты вычисления K_I для угла наклона трещины 15° при значении параметра ρ : 0.15 (а), 0.5 (б), 1.0 (в), 2.0 (г)

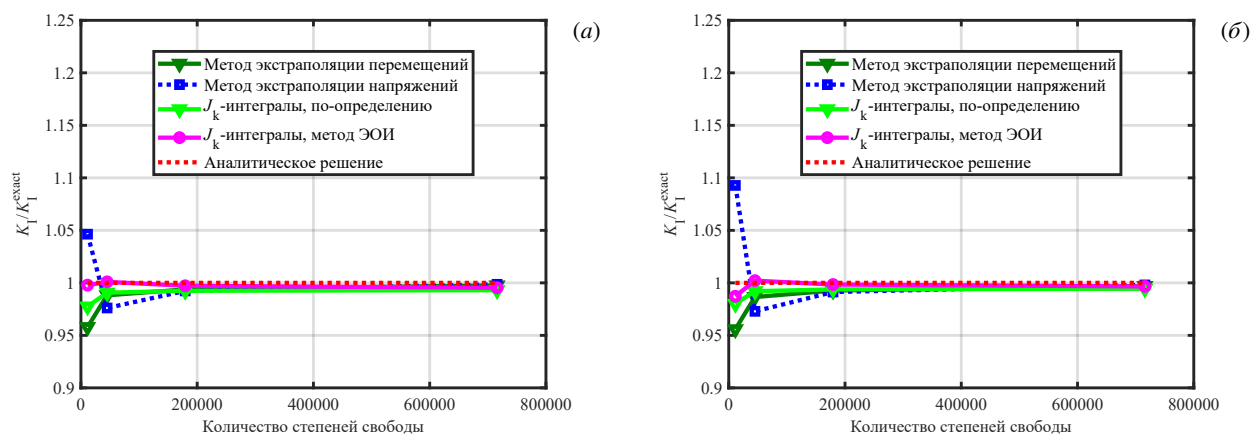


Рис. 8. Результаты вычисления K_I для угла наклона трещины 45° при значении параметра ρ : 0.15 (а), 0.5 (б), 1.0 (в), 2.0 (г)

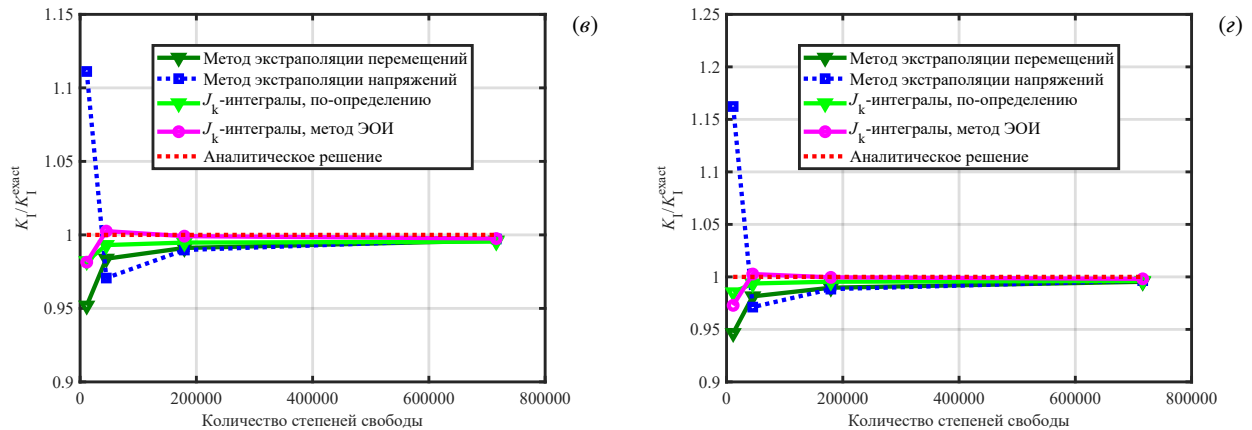
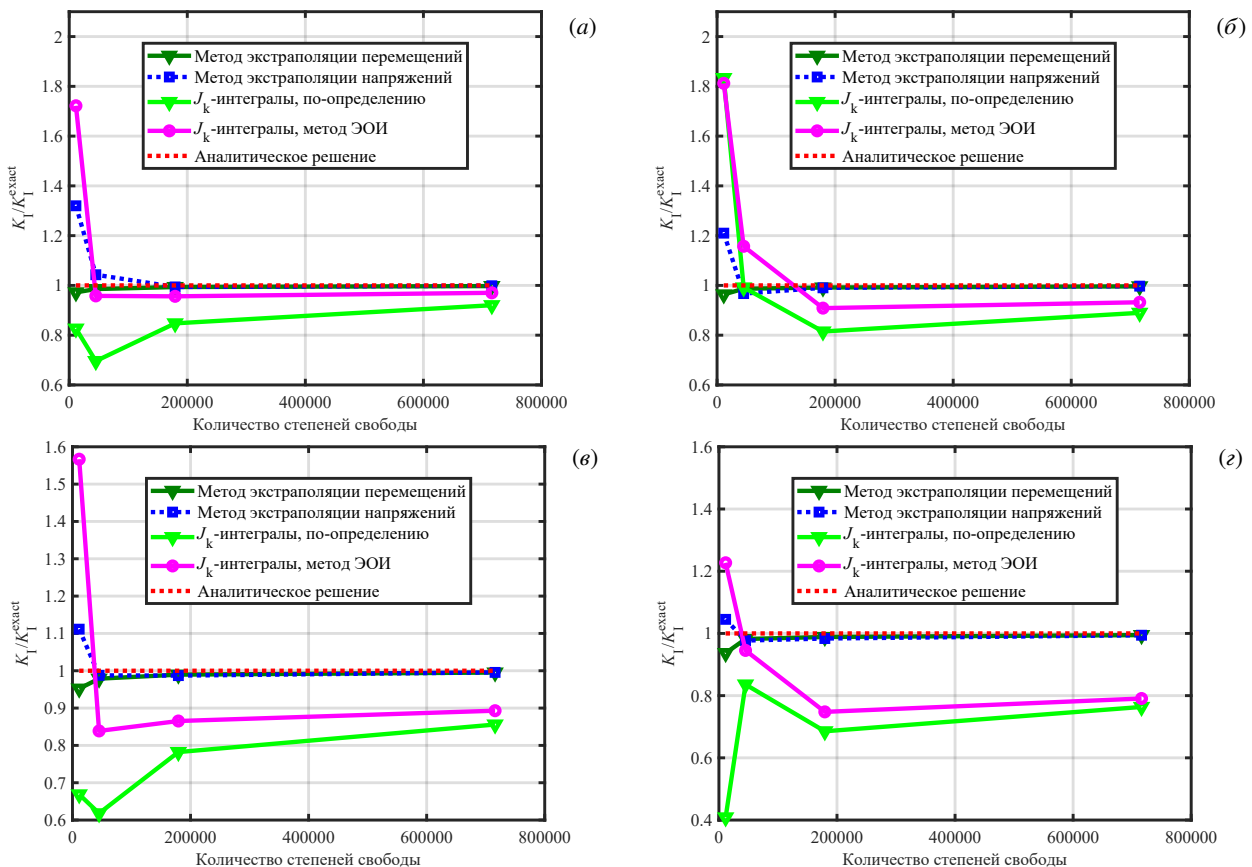


Рис. 8. Продолжение

Рис. 9. Результаты вычисления K_I для угла наклона трещины 75° при значениях параметра ρ : 0.15 (а), 0.5 (б), 1.0 (в), 2.0 (г)

через J_k -интегралы, заметно хуже, чем у методов вычисления КИН через перемещения и напряжения. Причем сходимость ухудшается при увеличении параметра анизотропии ρ .

В случае аналогичных исследований для K_{II} для всех углов наклона трещины влияние параметра анизотропии ρ на КИН гораздо слабее. Как показывает рисунок 10, при угле наклона 75° оно практически незаметно.

Эффект более существенного влияния параметра ρ на K_I , чем на K_{II} , можно объяснить исходя из результатов анализа чувствительности КИН к погрешностям вычисления J_k -интегралов на основе соотношений (25)–(29). Если предположить, что при расчете контурных интегралов J_1 и J_2 присутствовали численные ошибки, то оценить их влияние на КИН в зависимости от параметра анизотропии ρ можно по рисункам 11 и 12. На них показано, как ошибки КИН в % зависят от ошибок в J_k -интегралах при углах наклона трещины 15° и 75° .

Из рисунка 11 видно, что при малом угле наклона трещины к горизонтали (15°) параметр анизотропии ρ оказывает слабое влияние на ошибки КИН при наличии погрешности в определении контурных интегралов. С увеличением параметра анизотропии ρ погрешность расчета КИН растет. Важно, что ошибки вычисления J_1 -интеграла и K_I практически не связаны друг с другом.

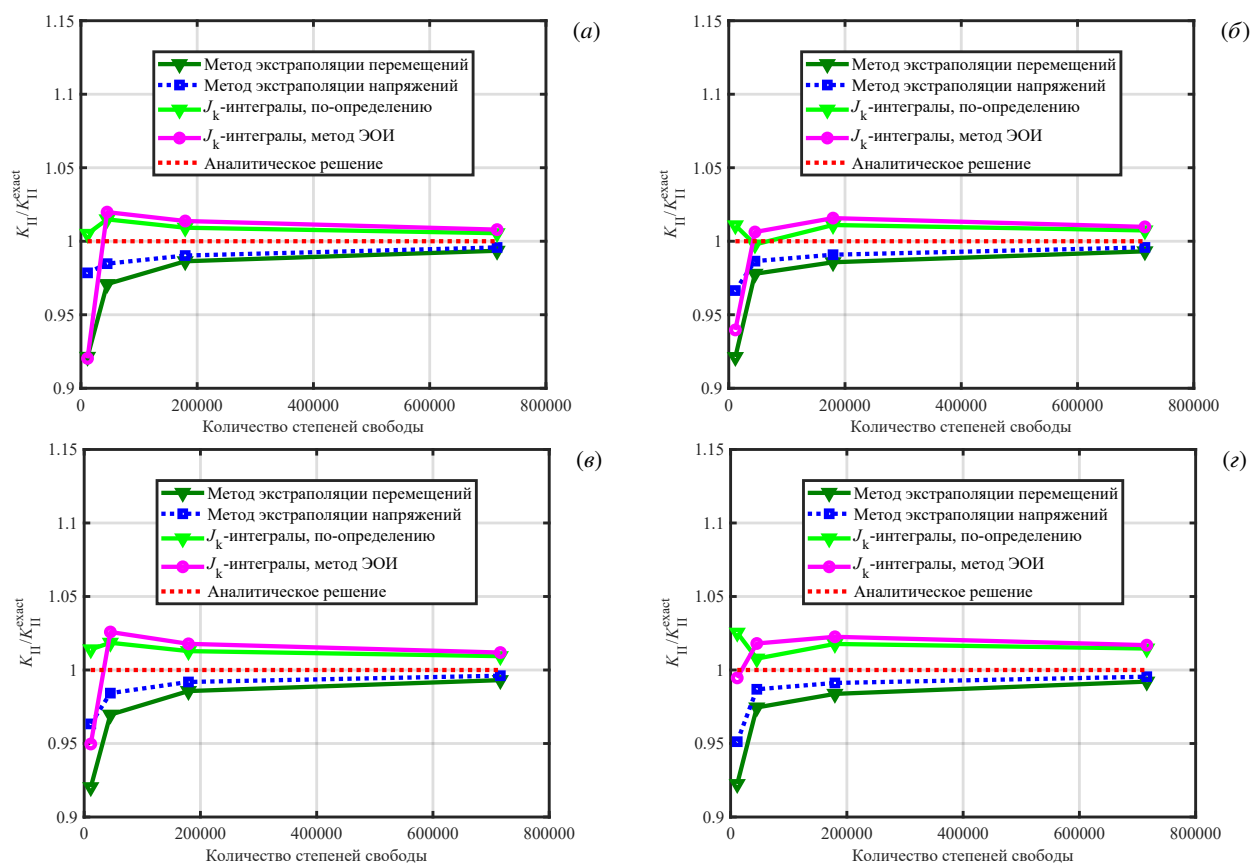


Рис. 10. Результаты вычисления K_{II} для угла наклона трещины 75° при значении параметра ρ : 0.15 (а), 0.5 (б), 1.0 (в), 2.0 (г)

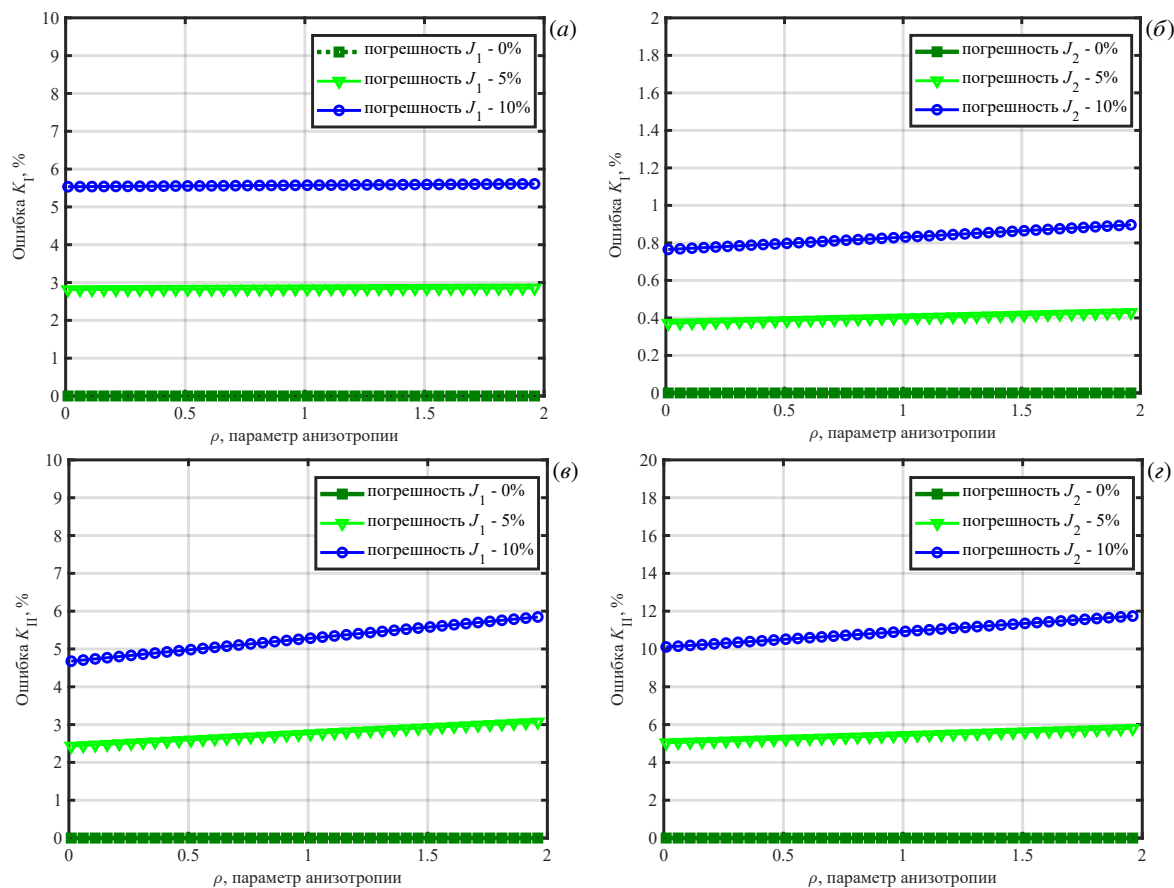


Рис. 11. Ошибки вычисления КИН (в %) в зависимости от параметра ρ и погрешностей расчета J_k -интегралов: ошибка K_I при погрешности J_1 -интеграла (а) и J_2 -интеграла (б); ошибка K_{II} при погрешности J_1 -интеграла (в) и J_2 -интеграла (г); угол наклона трещины 15°

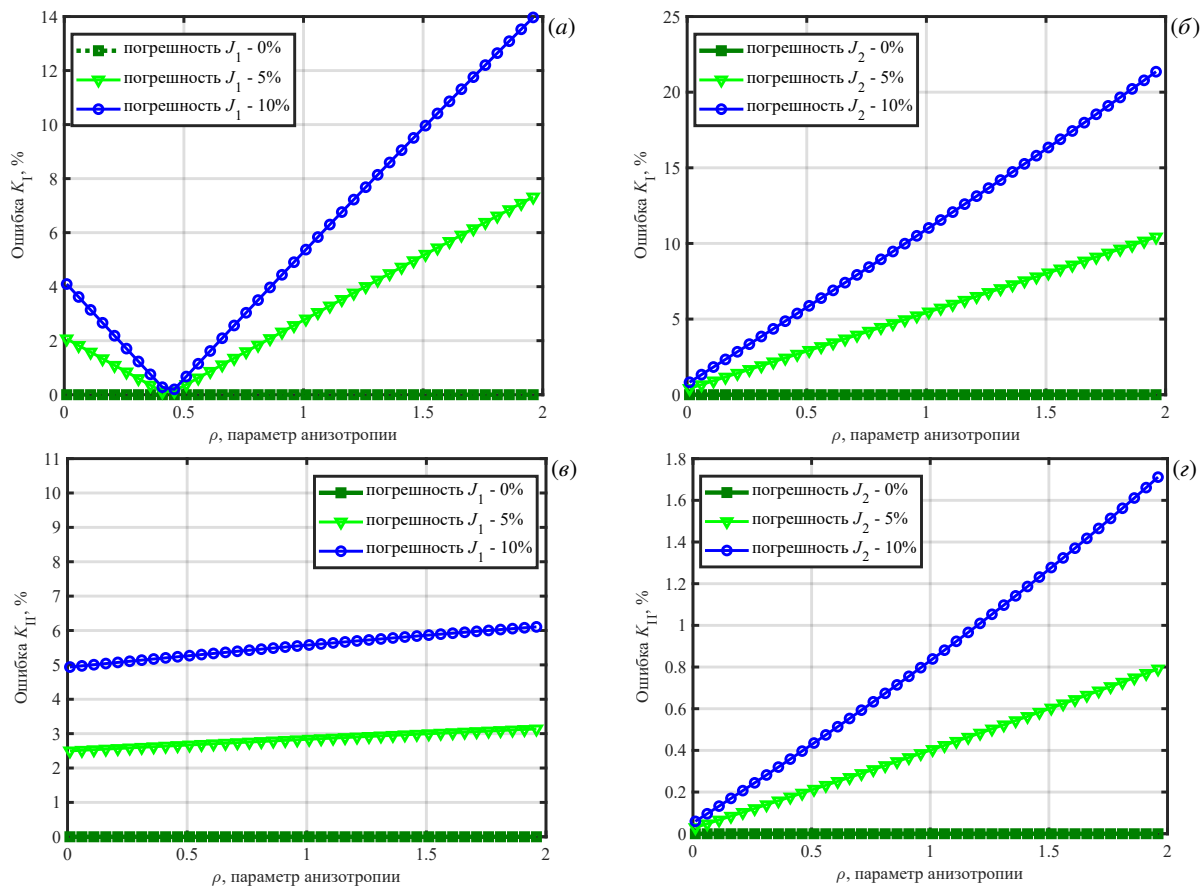


Рис. 12. Ошибки вычисления КИН (в %) в зависимости от параметра ρ и погрешностей расчета J_k -интегралов: ошибка K_I при погрешности J_1 -интеграла (а) и J_2 -интеграла (б); ошибка K_{II} при погрешности J_1 -интеграла (в) и J_2 -интеграла (г); угол наклона трещины 75°

При большом угле наклона трещины (75°), когда ее ориентация приближается к направлению действия нагрузки, параметр анизотропии ρ начинает существенно влиять на КИН (см. Рис. 12). Ошибка в вычислении J_2 -интеграла заметнее отражается на величине K_I , в сравнении с влиянием на K_{II} . Причем с увеличением параметра анизотропии ρ эта ошибка монотонно растет. В то же время ошибки в вычислении J_1 -интеграла сильнее влияют на K_{II} , чем на K_I . Следует отметить, что на графике зависимости ошибки K_I от погрешности J_1 -интеграла наблюдается минимум, отличный от нуля, при значении параметра анизотропии $\rho = 0.45$. При дальнейшем наращивании параметра анизотропии погрешность K_I линейно увеличивается.

В случае угла наклона трещины 45° графики не показаны, потому что анизотропия не влияет на погрешности КИН в зависимости от расчетных ошибок контурных J_k -интегралов.

Ухудшающаяся сходимость методов вычисления КИН через J_k -интегралы при увеличении степени анизотропии объясняется особенностями выражений (22)–(29), в которые параметр анизотропии ρ и угол наклона трещины входят нелинейно.

5. Выводы

1. Результаты сравнения четырех методов определения КИН (метода экстраполяции перемещений, метода экстраполяции напряжений, метода эквивалентного объемного интегрирования при расчете J_k -интегралов, метода вычисления J_k -интегралов на основе интегрирования по контуру (по определению)) при изменении в широком диапазоне углов наклона трещины, дискретизации области и варьировании степени анизотропии материала не позволили выявить явного лидера или аутсайдера. Отсутствием единого универсального метода объясняется распространение на практике различных подходов.

2. Во всех рассмотренных методах погрешность уменьшается при увеличении числа степеней свободы.

3. Недостатком методов, связанных с вычислением J_k -интегралов, является понижение точности расчета как K_I при больших (от 75° и почти до 90°) углах наклона трещины, так и K_{II} при малых углах наклона трещины в случае низкой плотности дискретизации. Такая особенность связана с увеличением погрешности слагаемого по берегам трещины в J_2 -интеграле.

4. Параметр анизотропии ρ слабо влияет на точность и сходимость методов при вычислении K_I для углов наклона трещины 15° и 45° . При 45° точность методов, связанных с вычислением КИН через J_k -интегралы, выше, чем у методов нахождения КИН через перемещения берегов трещины и через напряжения.

5. Для угла наклона трещины 75° точность и сходимость методов, основанных на вычислении J_k -интегралов, заметно ниже, чем у методов, использующих экстраполяцию перемещений и напряжений. Точность снижается при увеличении параметра анизотропии ρ . Для всех углов наклона трещины влияние параметра анизотропии ρ на K_{II} гораздо слабее, чем на K_I .

Исследование поддержано Российским научным фондом (проект № 25-19-00921).

Литература

1. Бондаренко Ю.А., Колодяжный М.Ю., Ечин А.Б., Нарский А.Р. Направленная кристаллизация, структура и свойства естественного композита на основе эвтектики Nb-Si на рабочие температуры до 1350°C для лопаток ГТД // Труды ВИАМ. 2018. № 1. С. 3–14. DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-1-1-1
2. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. Кн. 1: Материалы, свойства, повреждения, модели деформирования и разрушения. Рыбинск: «Газотурбинные технологии», 2010. 610 с.
3. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качанов Е.Б., Толорай В.Н., Гаврилин О.С. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. М.: Машиностроение, 1997. 336 с.
4. Semenov A.S., Semenov S.G., Getsov L.B. Methods of computational determination of growth rates of fatigue, creep, and thermal fatigue cracks in poli- and monocrystalline blades of gas turbine units // Strength of Materials. 2015. Vol. 47, no. 2. P. 268–290. DOI: 10.1007/s11223-015-9657-8
5. Irwin G.R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate // Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24, no. 3. P. 361–364. DOI: 10.1115/1.4011547
6. Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // International Journal of Fracture Mechanics. 1965. Vol. 1, no. 3. P. 189–203. DOI: 10.1007/BF00186854
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
8. Zhu W.X., Smith D.J. On the use of displacement extrapolation to obtain crack tip singular stresses and stress intensity factors // Engineering Fracture Mechanics. 1995. Vol. 51, no. 3. P. 391–400. DOI: 10.1016/0013-7944(94)00319-D
9. Itoh Y.Z., Murakami T., Kashiwaya H. Proportional extrapolation techniques for determining stress intensity factors // Engineering Fracture Mechanics. 1988. Vol. 31, no. 2. P. 297–308. DOI: 10.1016/0013-7944(88)90073-2
10. Ozkan U., Nied H.F., Kaya A.C. Fracture analysis of anisotropic materials using enriched crack tip elements // Engineering Fracture Mechanics. 2010. Vol. 77, no. 7. P. 1191–1202. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.003
11. Mazurowski B., O'Hara P., Gupta P., Duarte C.A. A displacement correlation method for stress intensity factor extraction from 3D fractures in anisotropic materials // Engineering Fracture Mechanics. 2021. Vol. 258. 108040. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.108040
12. Ranjan S., Arakere N.K. A Fracture Mechanics Based Methodology for Fatigue Life Prediction of Single Crystal Nickel Based Superalloys // Volume 5: Marine; Microturbines and Small Turbomachinery; Oil and Gas Applications; Structures and Dynamics, Parts A and B. Barcelona, Spain: ASMEDC, 2006. P. 1003–1016. DOI: 10.1115/GT2006-91111
13. Savikovskii A.V., Semenov A.S., Kachanov M.L. Influence of material anisotropy on the mechanics of surface damage // International Journal of Engineering Science. 2024. Vol. 198. 104025. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2024.104025
14. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 328 с.
15. Saouma V.E., Ayari M.L., Leavell D.A. Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids // Engineering Fracture Mechanics. 1987. Vol. 27, no. 2. P. 171–184. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90166-4
16. Семёнов А.С., Гецов Л.Б., Семёнов С.Г., Грищенко А.И. Сопротивление деформированию и разрушению монокристаллических жаропрочных сплавов при статическом и циклическом нагружении // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2014. № 5–3. С. 66–75.
17. Rice J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks // Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35, no. 2. P. 379–386. DOI: 10.1115/1.3601206
18. Черепанов Г.П. О распространении трещин в сплошной среде // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31, № 3. С. 476–488.
19. Eshelby J.D. The force on an elastic singularity // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1951. Vol. 244, no. 877. P. 87–112. DOI: 10.1098/rsta.1951.0016
20. Budiansky B., Rice J.R. Conservation Laws and Energy-Release Rates // Journal of Applied Mechanics. 1973. Vol. 40, no. 1. P. 201–203. DOI: 10.1115/1.3422926
21. Nikishkov G.P., Atluri S.N. Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the 'equivalent domain integral' method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1987. Vol. 24, no. 9. P. 1801–1821. DOI: 10.1002/nme.1620240914
22. Shivakumar K.N., Raju I.S. An equivalent domain integral method for three-dimensional mixed-mode fracture problems // Engineering Fracture Mechanics. 1992. Vol. 42, no. 6. P. 935–959. DOI: 10.1016/0013-7944(92)90134-Z
23. Judt P.O., Zarges J.-C., Feldmann M., Ricoeur A., Heim H.-P. Deflecting mode-I cracks in anisotropic materials // Mechanics of Materials. 2019. Vol. 136. 103060. DOI: 10.1016/j.mechmat.2019.05.007

24. Yu H., Kuna M. Interaction integral method for computation of crack parameters K–T – A review // Engineering Fracture Mechanics. 2021. Vol. 249. 107722. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107722
25. Banks-Sills L., Wawrzynek P.A., Carter B., Ingraffea A.R., Hershkovitz I. Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part II—Arbitrary geometry // Engineering Fracture Mechanics. 2007. Vol. 74, no. 8. P. 1293–1307. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2006.07.005
26. Kim J.-H., Paulino G.H. Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2002. Vol. 53, no. 8. P. 1903–1935. DOI: 10.1002/nme.364
27. Eischen J.W. An improved method for computing the J2-integral // Engineering Fracture Mechanics. 1987. Vol. 26, no. 5. P. 691–700. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90134-2
28. Nikishkov G.P., Vershinin A.V., Nikishkov Y.G. Mesh-independent equivalent domain integral method for J-integral evaluation // Advances in Engineering Software. 2016. Vol. 100. P. 308–318. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2016.08.006
29. Chang J.H., Wu D.J. Computation of mixed-mode stress intensity factors for curved cracks in anisotropic elastic solids // Engineering Fracture Mechanics. 2007. Vol. 74, no. 8. P. 1360–1372. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.07.011
30. Judt P.O., Ricoeur A., Linek G. Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 138. P. 33–48. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.03.003
31. Savikovskii A.V., Semenov A.S. Extrapolation methods for calculating the contour J2-integral at the mixed mode of fracture // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2026. Vol. 106, no. 1. e70308. DOI: 10.1002/zamm.70308
32. Вычислительные методы в механике разрушения / под ред. С. Атлури. М.: Мир, 1990. 392 с.
33. Савиковский А.В., Семенов А.С. Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений в ортотропных материалах при смешанной моде разрушения в плоском напряженном состоянии // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2022. Т. 15, № 2. С. 102–123. DOI: 10.18721/JPM.15210
34. Семенов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V-ой Международной конференции «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций». СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466–480.

Сведения об авторах:

Савиковский Артем Викторович, инженер, 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, лит. Б (СПбПУ); e-mail: savikovskii.artem@yandex.ru; ORCID: 0009-0007-3011-1560

Семенов Артем Семенович, дфмн, проф., СПбПУ; e-mail: semenov_as@spbstu.ru; ORCID: 0000-0002-8225-3487

Research article

Comparative analysis of computation methods for mixed-mode stress intensity factors of anisotropic materials

A.V. Savikovskii^{1,2}, A.S. Semenov¹

¹ Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation

² JSC “Power Machines - ZTL, LMZ, Electrosila, Energomashexport”, Saint-Petersburg, Russian Federation

The article discusses the results of comparison of four numerical methods used to calculate stress intensity factors (SIFs) for anisotropic materials in problems of mixed-mode linear fracture mechanics: (i) displacement extrapolation method, (ii) stress extrapolation method, (iii) equivalent domain integral (EDI) method for computation of J_k -integrals (invariant integrals J_1 and J_2), and (iv) calculation of J_k -integrals using contour integration (by definition). The specific features of anisotropy in materials with cubic symmetry, which is inherent in single-crystal nickel-based alloys commonly used in the manufacture of blades of modern gas turbine units, are considered in detail. For this class of materials with arbitrary crack orientation and a mixed fracture mode, the analytical expressions for determining the SIF in terms of J_k -integrals are obtained using Lekhnitskii's formalism. The problem of uniaxial tension of an anisotropic plane with an inclined crack under the assumption of a plane stress state and admissibility of an analytical solution is considered as a test problem for a comparative analysis of the methods. The accuracy and convergence of the four considered methods for calculating the SIF are analyzed depending on the degree of domain discretization (number of finite elements), crack orientation with respect to the loading direction, and the degree of material anisotropy. The comparison is performed for three characteristic crack inclination angles: 15°, when the I mode (tension) dominates over the II mode (longitudinal shear); 45°, when the SIFs are equal to each other; 75°, when the II mode (longitudinal shear) dominates over the I mode

(tension). The sensitivity of the errors in K_I and K_{II} to the errors in J_1 and J_2 is studied. This makes it possible to set limits on the scope of application of the methods for determining the SIF based on J_k -integrals.

Keywords: cubic symmetry, inclined crack, mixed mode, stress intensity coefficients, displacement extrapolation method, stress extrapolation method, equivalent volume integration method, contour J_k -integrals

Received: 16.05.2026 / **Accepted:** 16.07.2026 / **Published online:** 31.10.2026

Acknowledgements

The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-19-00921).

References

1. Bondarenko Yu. A., Kolodyazhny M. Yu., Echin A.B., Narskiy A.R. Directional solidification, structure and properties of natural composite based on eutectic Nb-Si at working temperatures up to 1350 °C degrees for the blades of gas turbine engine. Proceedings of VIAM. 2018. No. 1. P. 3–14. DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-1-1-1
2. Getsov L.B. Materialy i prochnost' detaley gazovykh turbin. Kn. 1: Materialy, svoystva, povrezhdeniya, modeli deformirovaniya i razrusheniya. Rybinsk: «Gazoturbinnyye tekhnologii», 2010. 610 p.
3. Shalin R.Y., Svetlov I.L., Kachanov Y.B., Tolorayya V.N., Gavrilin O.S. Monokristally nikelovykh zharoprochnykh splavov. M.: Mashinostroyeniye, 1997. 336 p.
4. Semenov A.S., Semenov S.G., Getsov L.B. Methods of computational determination of growth rates of fatigue, creep, and thermal fatigue cracks in poli- and monocrystalline blades of gas turbine units. Strength of Materials. 2015. Vol. 47, no. 2. P. 268–290. DOI: 10.1007/s11223-015-9657-8
5. Irwin G.R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. Journal of Applied Mechanics. 1957. Vol. 24, no. 3. P. 361–364. DOI: 10.1115/1.4011547
6. Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. International Journal of Fracture Mechanics. 1965. Vol. 1, no. 3. P. 189–203. DOI: 10.1007/BF00186854
7. Lekhnitskii S.G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Moscow: Mir Publishers, 1981. 430 p.
8. Zhu W.X., Smith D.J. On the use of displacement extrapolation to obtain crack tip singular stresses and stress intensity factors. Engineering Fracture Mechanics. 1995. Vol. 51, no. 3. P. 391–400. DOI: 10.1016/0013-7944(94)00319-D
9. Itoh Y.Z., Murakami T., Kashiwaya H. Proportional extrapolation techniques for determining stress intensity factors. Engineering Fracture Mechanics. 1988. Vol. 31, no. 2. P. 297–308. DOI: 10.1016/0013-7944(88)90073-2
10. Ozkan U., Nied H.F., Kaya A.C. Fracture analysis of anisotropic materials using enriched crack tip elements. Engineering Fracture Mechanics. 2010. Vol. 77, no. 7. P. 1191–1202. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.003
11. Mazurowski B., O'Hara P., Gupta P., Duarte C.A. A displacement correlation method for stress intensity factor extraction from 3D fractures in anisotropic materials. Engineering Fracture Mechanics. 2021. Vol. 258. 108040. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.108040
12. Ranjan S., Arakere N.K. A Fracture Mechanics Based Methodology for Fatigue Life Prediction of Single Crystal Nickel Based Superalloys. Volume 5: Marine; Microturbines and Small Turbomachinery; Oil and Gas Applications; Structures and Dynamics, Parts A and B. ASMEDC, 2006. P. 1003–1016. DOI: 10.1115/GT2006-91111
13. Savikovskii A.V., Semenov A.S., Kachanov M.L. Influence of material anisotropy on the mechanics of surface damage. International Journal of Engineering Science. 2024. Vol. 198. 104025. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2024.104025
14. Matviyenko Y.G. Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya. M.: FIZMATLIT, 2006. 328 p.
15. Saouma V.E., Ayari M.L., Leavell D.A. Mixed mode crack propagation in homogeneous anisotropic solids. Engineering Fracture Mechanics. 1987. Vol. 27, no. 2. P. 171–184. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90166-4
16. Semenov A.S., Getsov L.B., Semenov S.G., Grishchenko A.I. Deformation and fracture strength of single-crystal superalloys under static and cyclic loading. Bulletin of Samara State Aerospace University named after Academician of S. P. Korolev (National Research University). 2014. No. 5–3. P. 66–75.
17. Rice J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. Journal of Applied Mechanics. 1968. Vol. 35, no. 2. P. 379–386. DOI: 10.1115/1.3601206
18. Cherepanov G.P. Crack propagation in continuous media. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1967. Vol. 31, no. 3. P. 503–512. DOI: 10.1016/0021-8928(67)90034-2
19. Eshelby J.D. The force on an elastic singularity. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1951. Vol. 244, no. 877. P. 87–112. DOI: 10.1098/rsta.1951.0016
20. Budiansky B., Rice J.R. Conservation Laws and Energy-Release Rates. Journal of Applied Mechanics. 1973. Vol. 40, no. 1. P. 201–203. DOI: 10.1115/1.3422926

21. Nikishkov G.P., Atluri S.N. Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack, by the 'equivalent domain integral' method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987. Vol. 24, no. 9. P. 1801–1821. DOI: 10.1002/nme.1620240914
22. Shivakumar K.N., Raju I.S. An equivalent domain integral method for three-dimensional mixed-mode fracture problems. *Engineering Fracture Mechanics*. 1992. Vol. 42, no. 6. P. 935–959. DOI: 10.1016/0013-7944(92)90134-Z
23. Judt P.O., Zarges J.-C., Feldmann M., Ricoeur A., Heim H.-P. Deflecting mode-I cracks in anisotropic materials. *Mechanics of Materials*. 2019. Vol. 136. 103060. DOI: 10.1016/j.mechmat.2019.05.007
24. Yu H., Kuna M. Interaction integral method for computation of crack parameters K–T – A review. *Engineering Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 249. 107722. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107722
25. Banks-Sills L., Wawrzynek P.A., Carter B., Ingraffea A.R., Hershkowitz I. Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part II—Arbitrary geometry. *Engineering Fracture Mechanics*. 2007. Vol. 74, no. 8. P. 1293–1307. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2006.07.005
26. Kim J.-H., Paulino G.H. Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2002. Vol. 53, no. 8. P. 1903–1935. DOI: 10.1002/nme.364
27. Eischen J.W. An improved method for computing the J2-integral. *Engineering Fracture Mechanics*. 1987. Vol. 26, no. 5. P. 691–700. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90134-2
28. Nikishkov G.P., Vershinin A.V., Nikishkov Y.G. Mesh-independent equivalent domain integral method for J-integral evaluation. *Advances in Engineering Software*. 2016. Vol. 100. P. 308–318. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2016.08.006
29. Chang J.H., Wu D.J. Computation of mixed-mode stress intensity factors for curved cracks in anisotropic elastic solids. *Engineering Fracture Mechanics*. 2007. Vol. 74, no. 8. P. 1360–1372. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.07.011
30. Judt P.O., Ricoeur A., Linek G. Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation. *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 138. P. 33–48. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2015.03.003
31. Savikovskii A.V., Semenov A.S. Extrapolation methods for calculating the contour J2-integral at the mixed mode of fracture. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2026. Vol. 106, no. 1. e70308. DOI: 10.1002/zamm.70308
32. *Computational Methods in the Mechanics of Fracture* / ed. by S.N. Atluri. North-Holland, 1986. 414 p.
33. Savikovskii A.V., Semenov A.S. Calculation of mixed-mode stress intensity factors for orthotropic materials in the plane stress state. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 2022. Vol. 15, no. 2. P. 102–123. DOI: 10.18721/JPM.15210
34. Semenov A.S. PANTOCRATOR – konechno-elementnyy programmnyy kompleks, oriyentirovanny na resheniye nelineynykh zadach mekhaniki. *Trudy V-oy Mezhdunarodnoy konferentsii «Nauchno-tekhnicheskiye problemy prognozirovaniya nadezhnosti i dolgovechnosti konstruksiy»*. SPb.: Izd-vo SPbGPU, 2003. P. 466–480.