

Научная статья

Новая алгебраическая RANS-модель для пристенного подслоя гибридного RANS/LES-метода на основе методов машинного обучения

*Л.А. Усов^{1,2}, А.А. Савельев^{1,2}*¹ *Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского, Московская область, г. Жуковский, Российская Федерация*² *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Московская область, г. Долгопрудный, Российская Федерация*

В настоящее время активно развиваются гибридные RANS/LES-методы, одной из составляющих которых является RANS-модель, описывающая пристенную часть течения. В силу того, что данная область составляет около 10% толщины пограничного слоя, в ней могут хорошо проявлять себя относительно простые алгебраические замыкания. Однако они либо нелокальны, либо неявны. Целью данной статьи является формулировка новой явной локальной алгебраической RANS-модели пристенного подслоя, предназначенной для включения в состав гибридного RANS/LES-метода. При разработке модели применяются методы машинного обучения, широко распространившиеся в наши дни в области моделирования турбулентности. Процедура создания модели состоит из двух этапов. Сначала с помощью априорного тестирования на основе данных DNS о развитии турбулентного течения в плоском канале при значениях числа Рейнольдса по трению от 550 до 5 200 методом генетического программирования строится функциональная форма новой модели. Затем с помощью согласованного с моделью обучения подхода, использующего решение задачи о турбулентном течении в плоском канале, производится оптимизация коэффициентов. Результаты, рассчитанные по новой модели, сравниваются с результатами, полученными по классическим моделям Прандтля и Спаларта–Алмараса. Показано, что новая модель превосходит их по точности. Проведено тестирование новой модели при числе Рейнольдса по трению, равном 20 000, и выявлено, что с ее помощью достигаются профили средней скорости, хорошо согласующиеся с аппроксимацией Никельса и близкие к данным, вычисленным по другим моделям. Таким образом, в статье продемонстрировано успешное использование комбинации априорного и согласованного с моделью машинного обучения для создания оригинальной алгебраической RANS-модели турбулентности.

Ключевые слова: гибридные RANS/LES-методы, пристенные течения, алгебраические RANS-модели, машинное обучение

Получение: 01.04.2026 / *Принятие:* 14.08.2026 / *Публикация онлайн:* 31.10.2026

УДК 532.519.6

1. Введение

При численном моделировании турбулентных течений все более востребованными становятся гибридные RANS/LES-методы, с помощью которых удается успешно решать широкий спектр инженерных задач [1]. В применяющих их подходах внешняя часть течения описывается с помощью метода крупных вихрей (LES), а вблизи стенки — уравнениями Рейнольдса (RANS). Пристеночная полоса может охватывать как весь присоединенный пограничный слой, так и его часть. Во втором случае уравнения Рейнольдса решаются в относительно узкой полосе течения $y/\delta \lesssim 0.1$, где y — нормальная к стенке координата, а δ — местная толщина пограничного слоя. Профиль скорости в этой зоне можно считать универсальным в широком диапазоне величины градиента давления [2]. Благодаря этому при разработке гибридных RANS/LES-методов наблюдается тенденция к упрощению моделей для RANS-подслоя, а именно к использованию алгебраических моделей [3, 4], что позволяет ускорять расчет без существенной потери точности. В работах [5–7] показано, что с RANS-моделью такого типа в составе гибридного RANS/LES-метода даже в весьма сложных турбулентных течениях с отрывами удается получить результаты, сопоставимые по точности с результатами вихреразрешающих расчетов, в которых используются дифференциальные модели турбулентности. Учет нелинейных членов в выражении для напряжений Рейнольдса оказывается оправданным при RANS-моделировании в случае, когда модель должна описывать и внутреннюю, и внешнюю части пограничного слоя одновременно [8], однако прямых аргументов в пользу необходимости такого усложнения модели в случае гибридного RANS/LES-метода авторами не обнаружено.

Среди существующих алгебраических RANS-моделей для пристенных течений классическими являются модели Себечи–Смита [9] и Болдуина–Ломакса [10]. Однако эти модели нелокальны: они требуют знания параметров трения на стенке, что существенно затрудняет численное моделирование в условиях гибридного расчета, нуждающегося в параллельных вычислениях. Для преодоления данной проблемы в современных алгебраических моделях используются локальные неявные формулы [3–7, 11, 12]. Однако при решении неявных нелинейных уравнений также могут возникнуть трудности, в силу этого актуально создание явной локальной алгебраической модели турбулентности.

В наши дни при моделировании турбулентности все шире стали применяться методы машинного обучения [13]. Им требуются наборы высокоточных данных DNS-расчета или эксперимента для обучения модели и получения либо новых замыкающих соотношений для тензора напряжений Рейнольдса, либо «коррекции» уже имеющейся базовой модели турбулентности [14]. Существует два принципиально разных подхода к обучению моделей на эталонных данных: априорный (a priori) и согласованный с моделью (model-consistent) [14]. Априорный подход предполагает, что при реализации оптимизационного цикла в модель подставляются эталонные данные, по которым находятся целевые параметры. В этом случае результат получается быстро, однако обладает

существенным недостатком: в процессе апостериорного тестирования участвуют не эталонные данные, а данные расчета по этой же модели. В итоге часто возникают большие различия между априорными и апостериорными результатами [15, 16]. При согласованном с моделью подходе CFD-решатель встраивается в оптимизационный цикл. Это позволяет непосредственно наблюдать результат работы той или иной модели в процессе счета [17, 18]. Данный метод требует намного больших вычислительных затрат, однако позволяет получить модель, обладающую хорошими апостериорными свойствами. За последние годы подход согласованного с моделью обучения находит широкое распространение и продолжает развиваться [19].

Среди методов машинного обучения при создании моделей турбулентности можно выделить два направления. Первое направление — так называемые методы «черного ящика», основанные преимущественно на использовании искусственных нейронных сетей (Artificial Neural Networks — ANN). Эти методы способны давать хорошие результаты [20–22], однако не позволяют вывести для целевой функции явное алгебраическое выражение, поэтому их трудно встраивать в стандартные CFD-решатели. Кроме того, ANN склонны к переобучению на входных данных. Другим, более прозрачным направлением является ансамблирование деревьев решений (random forest) [23–25]. В работе [24] показано, что применение ансамбля деревьев решений для канонических течений в каналах с выступами приводит к меньшей ошибке, чем нейросети.

Альтернативное направление образуют методы символьной регрессии, позволяющие получить для целевой функции интерпретируемое математическое выражение, благодаря чему их легко включить в CFD-код. По сравнению с ANN методы символьной регрессии менее точны при интерполяции данных, но если полученное выражение имеет физический смысл, обладают большей обобщающей способностью [14]. Среди методов символьной регрессии можно выделить два класса: вероятностные (стохастические) эволюционные алгоритмы, основанные на генетическом программировании [26, 27], и детерминированные алгоритмы, основанные на разреженной регрессии методом наименьших квадратов [28]. Методы генетического программирования дают выражения более сложного вида, но при этом обладают гибкостью при поиске замыкания. Вследствие этого авторами работы было выбрано именно данное направление машинного обучения.

Эволюционные алгоритмы предполагают применение биологических законов эволюции: отбора, мутации, кроссинговера. Начальная версия алгоритма такого типа — GP (Genetic Programming) — принадлежит N. Cramer [26]. Затем С. Ferreira предложила более совершенную модификацию этого метода [27] — GEP (Gene Expression Programming). В работах [29, 30] с помощью GEP создается нелинейная поправка к модели турбулентности SST [31] с целью повышения точности описания анизотропии тензора напряжений Рейнольдса. В ряде публикаций показана эффективность новых моделей по сравнению с классической линейной моделью SST. Однако недостатком работ [29, 30] является использование априорного обучения, что неизбежно снижает уровень точности в апостериорном тестировании. В работах [32, 33] данный недостаток исправлен — для модификации классических моделей SST и Спаларта–Алмараса (SA) [34] авторы прибегают к согласованному с моделью обучению. Помимо RANS-моделирования, GEP также применялся для подсеточных LES-моделей. Например, в [35] авторы провели априорный анализ отфильтрованных мгновенных данных DNS в задаче о вырождении изотропной турбулентности и создали подсеточную модель, которая в апостериорном тестировании показала превосходство над классическими подсеточными моделями, такими как динамическая модель Смагоринского [36] и динамическая смешанная модель [37]. В работе [17] использовано согласованное с моделью обучение на основе задачи о конвекции вихря Тейлора–Грина, которое также позволило превзойти по точности классические подсеточные модели. В [38] GEP применен для создания функции перехода в гибридном RANS/LES-методе на основе анализа отфильтрованных данных DNS о турбулентном течении в трубе. Новый метод показал хорошие апостериорные результаты в задачах о распаде изотропной турбулентности, течении с периодическими холмами, обтекании тандема цилиндров. Последние работы авторов, развивающих GEP, посвящены гибридизации методов GEP и ANN [39, 40]. Основная идея состоит в объединении преимуществ обоих методов, а именно в глобальном поиске выражений с помощью генетического алгоритма и быстрой локальной градиентной оптимизации посредством нейронных сетей.

Данная работа посвящена созданию явной локальной алгебраической RANS-модели турбулентности с помощью методов генетического программирования, априорного и согласованного с моделью обучения для описания пристенной части течения. Структура статьи следующая: в разделе 2 описаны недостатки существующих алгебраических моделей и представлен подход к созданию новой модели; в разделе 3 изложены алгоритмы априорного и согласованного с моделью обучения, а также представлены результаты тестирования модели на примере течения в канале; заключительный раздел содержит выводы работы.

2. Подход к созданию новой модели

Турбулентные течения несжимаемой жидкости описываются незамкнутой системой уравнений Навье–Стокса, осредненных по Рейнольдсу (по повторяющимся индексам ведется суммирование):

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}.$$

Здесь U_i — средняя скорость жидкости в направлении i ; P — среднее давление; ρ — плотность жидкости (константа); ν — кинематический коэффициент вязкости (константа); u_i — пульсация скорости в направлении i (декартовы компоненты обозначаются как u, v, w); надчеркивание — символ осреднения по Рейнольдсу; $\overline{u_i u_j}$ — тензор напряжений Рейнольдса, описывающий средний эффект турбулентного переноса импульса.

В моделях турбулентности, основанных на гипотезе Буссинеска, напряжения Рейнольдса вычисляются следующим образом:

$$\overline{u_i u_j} = 2k\delta_{ij}/3 - 2\nu_t S_{ij},$$

где $k = \overline{u_i u_i}/2$ — кинетическая энергия турбулентности, δ_{ij} — символ Кронекера, ν_t — коэффициент турбулентной вязкости, $S_{ij} = (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i)/2$ — тензор скоростей деформации. Для течения в плоском канале, рассмотрением которого ограничена данная работа, производная $\partial k / \partial x = 0$, поэтому для замыкания системы уравнений нет необходимости в определении k .

Большинство алгебраических моделей турбулентности базируется на модели Прандтля [41]: $\nu_t = \lambda_{mix}^2 S$, где $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, λ_{mix} — длина смешения. Вблизи стенки λ_{mix} определяется следующим образом: $\lambda_{mix} = Kyf_{wd}$, где $K = 0.41$ — константа Кармана, f_{wd} — поправочная функция, понижающая величину турбулентной вязкости вблизи стенки. Примером такой функции является функция ван Дриста [42]: $f_{wd} = 1 - \exp(-y^+/26)$, где $y^+ = d_{wall}/l_\tau$, $l_\tau = \nu/u_\tau$, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$, d_{wall} — расстояние до ближайшей стенки, которое для нижней половины канала совпадает с вертикальной координатой y . Видно, что такой подход приводит к нелокальности — зависимости ν_t от величины трения на стенке. Чтобы избавиться от этой проблемы, модель можно модифицировать, например, подобно работе [5], заменить трение на стенке локальным диффузионным потоком импульса:

$$\tau_w/\rho = \nu \left. \frac{dU}{dy} \right|_{wall} \approx (\nu + \nu_t) \frac{dU}{dy}.$$

Однако в результате такой замены получается неявное уравнение для турбулентной вязкости вида: $F(\nu_t, y, dU/dy) = 0$, которое разрешимо только итерационно (например, методом Ньютона), что может стать источником проблем при численном моделировании.

Для избавления от итерационной процедуры предлагается следующий способ. В качестве локальных определяющих параметров течения взять масштаб длины Kd_{wall} и обратный масштаб времени dU/dy (в случае произвольного течения dU/dy заменяется на S) и получить из них лишь одну комбинацию с размерностью вязкости, а именно:

$$\nu_* = (Kd_{wall})^2 dU/dy.$$

Известно, что в реальных расчетах граница RANS- и LES-зон может отодвигаться от стенки в зависимости от геометрии течения и числа Рейнольдса, с ростом которого условие $y/\delta < 0.1$ для RANS-зоны может оказаться невыполнимым. Однако построение алгебраической RANS-модели для $y/\delta > 0.1$ в силу физических особенностей течения в турбулентном пограничном слое потребовало бы введения нелокальных параметров, что сильно затруднило бы расчет в параллельном режиме. Поэтому при использовании этой модели в составе гибридного RANS/LES-метода необходимо применять такие сетки, на которых граница между RANS- и LES-зонами располагается не выше 0.1δ . Таким образом, модель турбулентности будет иметь общий вид: $\nu_t^+ = F(\nu_*^+)$, где $\nu_t^+ = \nu_t/\nu$, $\nu_*^+ = \nu_*/\nu$, F — некоторая функция.

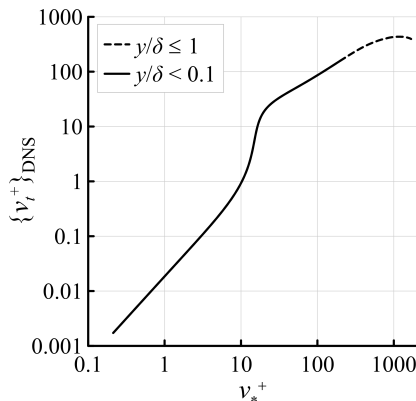


Рис. 1. Профиль $\{\nu_t^+(\nu_*^+)\}_{DNS}$, построенный по данным DNS [43] при $Re_\tau \approx 5200$: пунктирная кривая соответствует $y/\delta \leq 1$, сплошная кривая — пристенной части $y/\delta < 0.1$

На рисунке 1 представлен профиль $\{\nu_t^+(\nu_*^+)\}_{DNS}$, построенный по DNS-данным для развитого турбулентного течения в канале при значении числа Рейнольдса по трению $Re_\tau \approx 5200$ [43] ($Re_\tau = \delta u/\nu_w$, где ν_w — вязкость на стенке). Здесь величина $\{\nu_t\}_{DNS}$ была вычислена с помощью гипотезы Буссинеска: $\{\nu_t\}_{DNS} = -\overline{uv}/(dU/dy)$, при этом $\overline{uv} \equiv \overline{u_x u_y}$. Видно, что в пристенной части ($y/\delta < 0.1$, сплошная линия) пограничного слоя функция $\{\nu_t^+(\nu_*^+)\}_{DNS}$ является монотонно возрастающей. Это дает основание искать подходящую параметризацию $\nu_t^+(\nu_*^+)$ и строить локальную модель турбулентности без неявных соотношений.

Поиск зависимости $\nu_t^+(\nu_*^+)$ происходил в два этапа. Сначала с помощью априорного анализа данных DNS [43] и генетического программирования определялась функция $\nu_t^+(\nu_*^+)$. Затем методом согласованного с моделью обучения оптимизировались константы найденной на предыдущем этапе функциональной зависимости.

3. Создание модели

3.1. Априорное тестирование

На этапе априорного тестирования велся поиск зависимости $\nu_t^+(\nu_*^+)$ на основе данных DNS [43] о развитом турбулентном течении в канале при $Re_\tau \approx \{550, 1000, 2000, 5200\}$. Выбор простого типа течения обуславливался возможностью настроить RANS-модель на описание пристенной части ($y/\delta < 0.1$) пограничного слоя. Поскольку

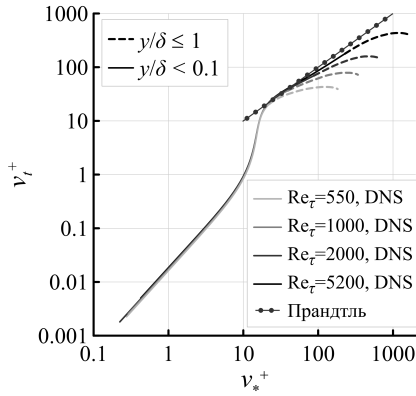


Рис. 2. Профили $\nu_t^+(\nu_*^+)$: пунктирные кривые – данные DNS при $Re_\tau \approx \{550, 1000, 2000, 5200\}$ [43] для $y/\delta \leq 1$, сплошные кривые – те же данные для пристенной части ($y/\delta < 0.1$) слоя; прямая с точками – модель Прандтля (1)

эта область относительно универсальна [2], можно ожидать, что полученная модель будет применима в составе гибридного RANS/LES-метода и для более сложных типов течения. Низкие числа Re_τ не рассматривались, поскольку модель предназначена для течений, в которых проведение LES-расчета с разрешением пристенных процессов (WRLES — Wall-Resolved Large-Eddy Simulation) невозможно или неоправданно. На рисунке 2 представлены профили $\{\nu_t^+(\nu_*^+)\}_{DNS}$ для $Re_\tau \approx \{550, 1000, 2000, 5200\}$. Пунктирные линии соответствуют области $y/\delta \leq 1$, сплошные линии — пристенной части $y/\delta < 0.1$, которая преимущественно будет описываться с помощью RANS-модели в составе гибридного RANS/LES-метода. Здесь также приведена прямая, отвечающая модели Прандтля для логарифмического участка при $Re_\tau \rightarrow \infty$:

$$\{\nu_t^+\}_{Re_\tau} = \nu_*^+. \quad (1)$$

Видно, что данные DNS хорошо согласуются с этой зависимостью в области от $\nu_*^+ \approx 20$ (что соответствует $y^+ \approx 30$) до границы $y/\delta = 0.1$. Заметные отличия появляются ближе к центру канала, где происходит отклонение от логарифмического закона из-за конечных значений числа Рейнольдса в DNS-расчете течений. Поэтому модель Прандтля можно использовать как внешнюю асимптотику новой модели. Из рисунка 2 также видно, что вблизи стенки ($\nu_*^+ \lesssim 20$) зависимость $\{\nu_t^+(\nu_*^+)\}_{DNS}$ является универсальной. Ее асимптотика при $y^+ \rightarrow 0$ имеет вид:

$$\{\nu_t^+\}_{DNS} \sim 0.0159(\nu_*^+)^{3/2}. \quad (2)$$

Таким образом, модель $\nu_t^+(\nu_*^+)$ можно задать как функцию, «переключающуюся» между двумя предельными асимптотическими режимами: зависимостью (2) вблизи стенки и зависимостью (1) на логарифмическом участке с помощью специальной переходной функции $f(\nu_*^+)$:

$$\nu_t^+(\nu_*^+) = f(\nu_*^+)0.0159(\nu_*^+)^{3/2} + (1 - f(\nu_*^+))\nu_*^+, \quad (3)$$

где $f(\nu_*^+) = 1$ вблизи стенки и $f(\nu_*^+) = 0$ во внешней части пограничного слоя. При этом эталонный профиль $\{\nu_t^+(\nu_*^+)\}_{exact}$ (Рис. 3 слева) строится кусочно: до точки пересечения с асимптотикой Прандтля используются DNS-данные при $Re_\tau \approx 5200$, а после этой точки — формула Прандтля. Функция $\{f(\nu_*^+)\}_{exact}$, полученная из соотношения (3) подстановкой в него $\{\nu_t^+(\nu_*^+)\}_{exact}$, представлена на рисунке 3, справа. Как видно, это монотонно убывающая функция достаточно простого вида со значениями между 0 и 1.

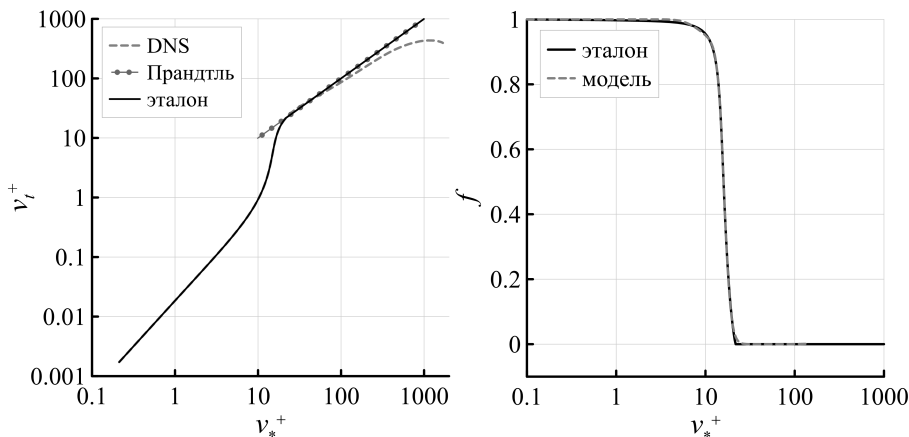


Рис. 3. Профили: слева $\nu_t^+(\nu_*^+)$ (пунктир – данные DNS [43] при $Re_\tau = 5200$, прямая с точками – модель Прандтля (1), сплошная линия – эталонный профиль, соответствующий комбинации данных DNS и модели Прандтля (1)); справа $f(\nu_*^+)$ (сплошная линия – эталонный профиль, пунктирная линия – модель (4))

Для создания модели $f(\nu_*^+)$ использовалось генетическое программирование, реализованное на высокоуровневом и высокопроизводительном языке Julia [44], который разработан в Массачусетском технологическом институте специально для научных вычислений. Julia сочетает в себе удобство языка Python и скорость языка C. Как отмечается в разделе 1, существует два алгоритма генетического программирования — GP

[26] и усовершенствованный GEP [27]. В следующем подразделе сравниваются их реализации из [45] для GP и из [46] для GEP.

3.2. Реализации алгоритмов GP и GEP и сравнительный анализ

Сравнение эффективности алгоритмов [45] и [46] затруднено наличием в каждом из них большого числа настроечных параметров, по-разному определяющих как скорость вычислений, так и точность получаемых функций. Можно выделить следующие основные группы:

1. Параметры, определяющие вид искомого выражения.
2. Параметры, по которым осуществляется отбор лучших выражений и создание новых.
3. Параметры, по которым оптимизируются константы моделей.

Наиболее «чистым» представляется тестирование с использованием настроек «по умолчанию». Исключение составляют параметры 1-й группы, фиксирующие область поиска выражений. Максимальная «сложность» задавалась равной 25, и рассматривались следующие операторы: $\{+, -, \times, /, \tanh(x), x^2, \sqrt{x}\}$. Целевой функцией являлся эталонный профиль $f(\nu_*)$; минимизировался средний квадрат отклонения (ошибки) — Mean Squared

Error (MSE), между моделью $\tilde{f}$ и эталоном f :
$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f_i - \tilde{f}_i)^2$$
. В алгоритмах [45, 46] параметр MSE «по

умолчанию» есть мера точности. Эти алгоритмы представляют собой итерационные процессы решения задачи символьной регрессии. Критерий остановки задавался авторами как условие достижения ошибки 10^{-5} . Стоит отметить, что методы генетического программирования являются стохастическими и дают различные результаты от пуска к пуску, в силу этого для статистики проведено пять запусков каждого алгоритма.

Сначала было выполнено тестирование метода GEP [46] и исследовано, при каком числе итераций наблюдается сходимость. На рисунке 4 слева представлен график изменения ошибки для пяти пусков. Видно, что при числе итераций 10^5 ошибка стабилизируется, но не достигает пороговой величины. Среднее время счета такого числа итераций равняется двум минутам. Затем тестировался алгоритм GP [45] с числом итераций $4 \cdot 10^3$; расчет в среднем занимал тот же промежуток времени. График сходимости представлен на рисунке 4 справа, на нем добавлены две горизонтальные линии, соответствующие минимальной ошибке метода GEP и пороговой ошибке 10^{-5} . Видно, что все кривые находятся ниже минимального уровня ошибки GEP, а в одном из запусков ошибка становится равной порогу точности.

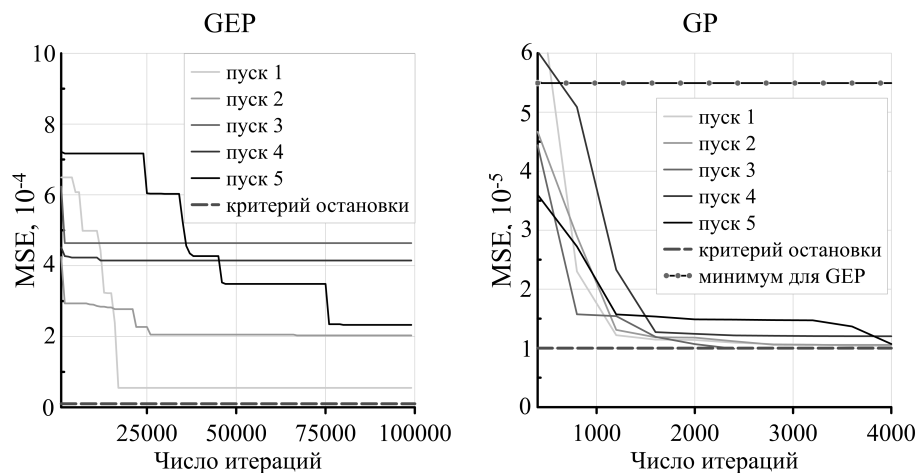


Рис. 4. Зависимости MSE от числа итераций для пяти пусков двух алгоритмов: слева GEP [46], справа GP [45] (сплошные линии), пунктирная линия – критерий остановки счета ($\text{MSE} = 10^{-5}$), линия с точками – минимальное для GEP значение $\text{MSE} = 5.5 \cdot 10^{-5}$

В таблице 1 приведены минимальные и средние по пяти пускам величины ошибок. Видно, что в данной задаче алгоритм [45] позволяет получить почти на порядок более точные выражения за то же время счета. По компактности выражений метод GP также оказывается более предпочтительным, поскольку самое точное среди полученных с помощью GEP выражений имело «сложность» 19, в то время как метод GP позволяет добиться той же точности для выражений «сложности» 11.

Таким образом, в данном тесте реализация GP [45] оказалась лучше реализации GEP [46] при параметрах «по умолчанию». Вследствие этого она была выбрана для дальнейших расчетов. Вероятно, есть возможность с

Таблица 1. Точности алгоритмов GEP и GP

	GEP	GP
Минимальная ошибка	$5.49 \cdot 10^{-5}$	10^{-5} (порог точности)
Средняя ошибка	$2.73 \cdot 10^{-4}$	$1.073 \cdot 10^{-5}$

помощью программы [46] получить лучшие результаты, однако это потребует погружения в ее особенности, что для рядового пользователя нежелательно.

Стоит также отметить, что в рассматриваемой задаче требовалось аппроксимировать одномерную монотонно убывающую функцию $f(\nu_*^+)$ на ограниченном интервале аргумента: $\nu_*^+ \in (0, 230)$. Это относительно простая задача по сравнению с теми, которые в работах [29, 30] решались методом GER. Возможно, именно в этих случаях алгоритм [46] позволяет получить лучшие по сравнению с [45] результаты и может считаться теоретически более совершенным методом.

При проведении «контрольного» расчета, из которого была получена финальная формула для $f(\nu_*^+)$, с целью изучения изменения точности по мере «усложнения» выражений максимальная «сложность» задавалась равной 30.

Такой анализ стал возможен благодаря тому, что в ходе выполнения программы [45] на экран выводится ранжированный по «сложности» список функций с указанием их точности. В качестве критерия сходимости было принято условие, что за 400 итераций минимальная ошибка перестает изменяться. В таблице 2 представлена часть списка выражений, полученных в результате работы программы.

Таблица 2. Список выражений, полученных в результате работы библиотеки [45]

Сложность	MSE	Выражение
1	0.12	0.179
4	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$\tanh \left[\frac{6.941}{\nu_*^+} \right]$
7	$3.0 \cdot 10^{-4}$	$\left\{ \tanh \left[\left(\frac{15.325}{\nu_*^+} \right)^4 \right] \right\}^2$
10	$9.6 \cdot 10^{-5}$	$\left\{ \tanh \left[\left(\frac{21.745}{\nu_*^+} \right)^2 - 0.2904 \right] \right\}^8$
14	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$\left\{ \tanh \left[\frac{1.659}{\nu_*^+} + \left(\tanh \left[\frac{25.472}{\nu_*^+} - 0.6 \right] \right)^2 \right] \right\}^4$
21	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$\tanh \left\{ \left[\left(\tanh \left[\frac{279.6}{(\nu_*^+ - 1.812)^2} \right] + \frac{0.917}{\nu_*^+} \right)^2 - 0.04 \right] \right\}^4 - 0.0018$
28	$9.1 \cdot 10^{-6}$	$-0.012 \tanh(0.212 \nu_*^+) + \tanh \left\{ \left(\left[\left(\frac{1.004}{\nu_*^+} \right)^2 + \tanh \left[\frac{287.2}{(\nu_*^+ - 1.525)^2} \right] \right]^4 - 0.0423 \right)^2 + 0.0102 \right\}$

В данном случае оптимальным представляется выражение:

$$f(\nu_*^+) = \left\{ \tanh \left[\frac{1.659}{\nu_*^+} + \left(\tanh \left[\frac{25.472}{\nu_*^+} - 0.6 \right] \right)^2 \right] \right\}^4, \quad (4)$$

поскольку более сложные формулы уже не приводят к существенному росту точности аппроксимации. Можно видеть, что в табличных выражениях сложности 21 и 28 имеются точки, в которых знаменатель обращается в нуль. Это устраняется введением поправки, например, следующей для сложности 21: $(\nu_*^+ - 1.812)^2 \rightarrow \max(10^{-10}, (\nu_*^+ - 1.812)^2)$. Для сложности 28 поправка записывается по аналогии. Модель (3), (4) в дальнейшем для краткости будет называться ALEx (Algebraic Local Explicit), ее график представлен на рисунке 3 справа.

3.3. Согласованное с моделью обучение

После получения функционального вида модели ALEx была выполнена оптимизация констант $C_1 - C_4$:

$$\begin{aligned} \nu_t^+ (\nu_*^+) &= f(\nu_*^+) C_1 (\nu_*^+)^{3/2} + (1 - f(\nu_*^+)) \nu_*^+, \\ f(\nu_*^+) &= \left\{ \tanh \left[\frac{C_2}{\nu_*^+} + \left\{ \tanh \left(\frac{C_3}{\nu_*^+} + C_4 \right) \right\}^2 \right] \right\}^4. \end{aligned} \quad (5)$$

Использовался алгоритм согласованного с моделью обучения [19], основанный на включении в оптимизационный цикл решения задачи о развитом турбулентном течении в плоском канале. Для этого течения осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса в переменных закона стенки принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dy^+} \left[-\frac{dU^+}{dy^+} + \overline{uv}^+ \right] = \frac{1}{\text{Re}_\tau}, \quad (6)$$

где $U^+ = U/u_\tau$, $\overline{uv}^+ = \overline{uv}/u_\tau^2$. Если (6) проинтегрировать по y^+ от стенки до некоторой безразмерной высоты $\tilde{y}^+$ и подставить $\overline{uv}^+ = -\nu_t^+ \frac{dU^+}{dy^+}$, то получится следующее выражение:

$$\frac{dU^+}{dy^+} (1 + \nu_t^+) + \frac{\tilde{y}^+}{\text{Re}_\tau} - 1 = 0, \quad (7)$$

где dU^+/dy^+ и ν_t^+ вычисляются в точке $\tilde{y}^+$. Если в (7) подставить модель (5), то получится ОДУ относительно функции U^+ . Для решения этого уравнения были использованы библиотеки DifferentialEquations [47] и Sundials [48] языка Julia с алгоритмом IDA [49], в основе которого лежат формулы дифференцирования назад (BDF). Этот алгоритм автоматически выбирает шаг интегрирования для достижения требуемой пользователем точности. Было проведено исследование того, как задаваемая точность влияет на результат. В качестве целевой функции рассматривалась величина максимальной относительной ошибки профиля скорости между решением с некоторой точностью $\tilde{U}$ и глубоко сошедшимся решением U_{exact} (соответствующим минимально возможным значениям параметров точности, граничащим с ошибкой округления): $E_1 = \max_{i: U_{\text{exact}}^i - \tilde{U}^i \neq 0} |(U_{\text{exact}}^i - \tilde{U}^i)/U_{\text{exact}}^i|$. Для дальнейших вычислений были выбраны такие параметры точности алгоритма, которые для всех Re_τ гарантируют ошибку не большую, чем 0.01%.

В качестве целевой функции была выбрана L_2 -норма разности между профилями $U^+(y^+)$ из DNS-данных [43] и расчетов по модели при $\text{Re}_\tau \approx \{550, 1000, 2000, 5200\}$ на участке $y/\delta < 0.1$:

$\|U_{\text{DNS}}^+ - U_{\text{model}}^+\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{r=1}^4 \sum_{i=1}^{N_r} (U_{\text{DNS},r,i}^+ - U_{\text{model},r,i}^+)^2}$, r — индекс суммирования по режимам Re_τ , i — индекс суммирования по узлам сетки от 1 до N_r в текущем режиме. При этом использовались сетки из базы данных DNS [43].

Оптимизация коэффициентов выполнялась методом Нелдера–Мида на основе библиотеки Optim [50] языка Julia. Начальным приближением послужили параметры модели ALE χ , полученные при априорном тестировании (анализ чувствительности к начальным значениям констант не проводился). В результате выполнения алгоритма получились значения коэффициентов, приведенные в таблице 3. Видно, что L_2 -норма разности, нормированная на ее значение до оптимизации, уменьшилась лишь примерно на 5%. По мнению авторов, это говорит об успешности априорного этапа тестирования, хотя нельзя исключать недостаточную гибкость функциональной формы (5) либо пологость оптимизационного ландшафта в окрестности начального приближения.

Таблица 3. Коэффициенты модели (5) до и после оптимизации

	C_1	C_2	C_3	C_4	L_2 -норма
До	0.0159	1.659	25.472	-0.6	1.0
После	0.0174	1.801	26.375	-0.661	0.952

На рисунке 5 приведены профили скорости, рассчитанные с помощью модели ALE χ с оптимизированными коэффициентами для всех рассмотренных чисел Рейнольдса, для сопоставления с DNS-данными [43] и результатами, полученными по двум моделям турбулентности: модели Прандтля [41] с поправкой ван Дрифта [42]

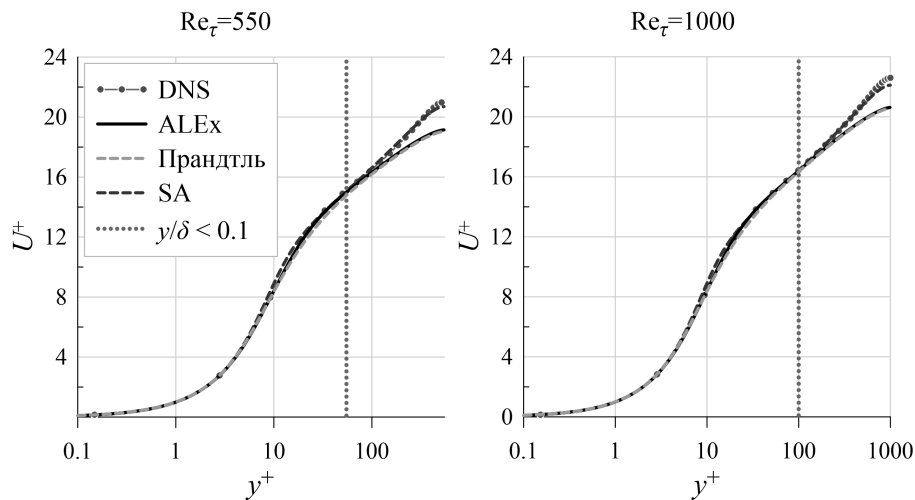


Рис. 5. Профили $U^+(y^+)$ для $\text{Re}_\tau \approx \{550, 1000, 2000, 5200\}$: линия с точками – данные DNS [43], сплошная линия – модель ALE χ , светлая пунктирная линия – модель Прандтля, темная пунктирная линия – модель SA, точечной линией показана граница области $y/\delta < 0.1$

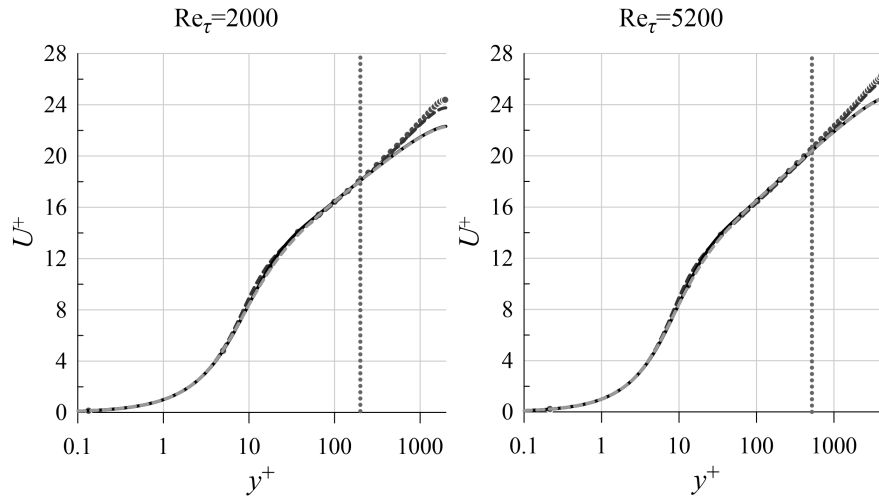


Рис. 5. Продолжение

и модели SA [34]. По аналогии с (5)–(7) обе модели были сформулированы для развитого турбулентного течения в плоском канале и реализованы на языке Julia. Для модели Прандтля использовался тот же алгоритм, что и для новой модели, а для модели SA подход был изменен в силу того, что получившаяся система ОДУ представляла собой краевую задачу. Для ее решения использовалась библиотека BoundaryValueDiffEq [51] с методом стрельбы (Shooting) и решателем Vern7 (явный метод Рунге–Кутты 7-го порядка, относящийся к семейству методов Вернера) [52]. Таблица 4 содержит количественные данные для сравнения трех моделей на участке $y/\delta < 0.1$ по двум показателям: максимальному относительному отклонению $E_1 = \max_i |(U_{\text{DNS}}^i - U_{\text{model}}^i)/U_{\text{DNS}}^i|$ и относительному

среднеквадратичному отклонению $E_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n ((U_{\text{DNS}}^i - U_{\text{model}}^i)/U_{\text{DNS}}^i)^2/n}$. Точка $U_{\text{DNS}} = 0$ из рассмотрения

исключена. Приведены максимальные $\max E_i$ и средние $\langle E_i \rangle$ ошибки по всем рассмотренным режимам Re_τ в процентах. Видно, что ошибки модели ALEx по всем рассмотренным показателям оказались примерно в четыре раза меньше ошибок модели Прандтля и почти на порядок меньше ошибок модели SA. Можно также отметить, что модель ALEx близка к модели Прандтля в логарифмической области и точнее нее в буферной зоне. Таким образом, несмотря на возможные ограничения процедуры апостериорной оптимизации, о которых сказано выше, удалось достичь достаточно хорошего согласования с эталонными данными на обучающей выборке.

Таблица 4. К сравнению точности моделей ALEx, Прандтля и SA при числах $\text{Re}_\tau \approx \{550, 1000, 2000, 5200\}$ на участке $y/\delta < 0.1$

	$\max E_1, \%$	$\langle E_1 \rangle, \%$	$\max E_2, \%$	$\langle E_2 \rangle, \%$
ALEx	0.81	0.58	0.48	0.31
Прандтль	3.54	2.7	1.89	1.32
SA	6.24	5.84	2.67	2.55

3.4. Тестирование при высоком числе Рейнольдса

Для проверки экстраполяционной способности модель ALEx была протестирована на данных для течения в канале при большом числе Рейнольдса, а именно $\text{Re}_\tau = 20000$ (валидационный тест). В качестве эталонных данных использовалась современная эмпирическая аппроксимация Никельса [53], поскольку авторам к моменту написания статьи не удалось найти доступные DNS-данные для такого числа Рейнольдса:

$$U^+ = y_c^+ \left(1 - \left(1 + 2(y^+/y_c^+) + \frac{1}{2}(3 - p_x^+ y_c^+)(y^+/y_c^+)^2 - \frac{3}{2}p_x^+ y_c^+ (y^+/y_c^+)^3 \right) e^{-3y^+/y_c^+} \right) + \frac{1}{6K} \ln \left(\frac{1 + (0.6(y^+/y_c^+))^6}{1 + \eta^6 + \eta^{12}} \right),$$

где $y_c^+ = 12$, $\eta = y/\delta$, $p_x^+ = \frac{\nu}{\rho u_\tau^3} \frac{dP}{dx} = -\frac{1}{\text{Re}_\tau}$, $K = 0.39$ (отличное от значения в модели Прандтля).

На рисунке 6 представлены профили средней скорости, соответствующие моделям ALEx, Прандтля, SA и аппроксимации Никельса. В таблице 5 приведены количественные показатели точности моделей на участке $y/\delta < 0.1$. Видно, что в этом тесте модель ALEx немного уступает по точности модели Прандтля, но по-прежнему превосходит модель SA.

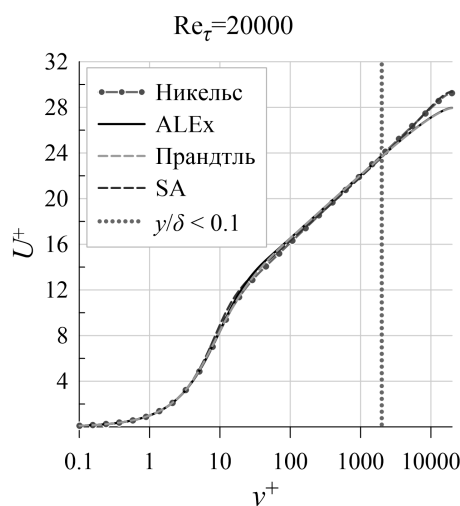


Рис. 6. Профили скорости $U^+(y^+)$ для $Re_\tau = 20\,000$: линия с точками – аппроксимация Никельса [53], сплошная линия – модель ALEx, светлая пунктирная линия – модель Прандтля, темная пунктирная линия – модель SA, точечной линией показана граница области $y/\delta < 0.1$

Таблица 5. Показатели точности моделей ALEx, Прандтля и SA при $Re_\tau = 20000$ на участке $y/\delta < 0.1$

	$E_1, \%$	$E_2, \%$
ALEx	3.84	1.88
Прандтль	2.76	1.41
SA	7.1	2.81

Поскольку RANS-модель настраивается на описание относительно универсальной узкой пристенной области $y/\delta < 0.1$ [2], её изолированное тестирование в течениях со сложной геометрией имеет ограниченную информативность. Подобные тесты необходимо проводить с включением RANS-модели в состав гибридного RANS/LES-метода, для которого она создается.

4. Выводы

В данной работе представлена новая алгебраическая RANS-модель для пристенной части ($y/\delta < 0.1$) пограничного слоя, ориентированная на использование в составе гибридных RANS/LES-методов. Она лишена недостатков существующих алгебраических RANS-моделей, заключающихся в нелокальности либо неясности их формулировок. Для создания явной локальной модели был введен безразмерный локальный параметр, от которого турбулентная вязкость зависит монотонно. Выполнен анализ двух алгоритмов генетического программирования, реализующих методы GP [45] и GEP [46], по результатам которого в качестве предпочтительного для данной задачи выбран код [45] для метода GP. Априорно, исходя из данных DNS [43] и модели Прандтля, получена функциональная форма новой модели ALEx. Затем методом согласованного с моделью обучения [19] на основе решения задачи о развитом турбулентном течении в плоском канале проведена оптимизация констант модели. Финальная версия новой модели сопоставлена с моделями Прандтля и SA; показано, что по величинам максимальной относительной ошибки и относительного среднеквадратичного отклонения она в разы превосходит другие модели в области $y/\delta < 0.1$ при $Re_\tau \approx \{550, 1000, 2000, 5200\}$ (обучающая выборка). Затем проверялась экстраполяционная способность модели на примере течения в канале при $Re_\tau = 20000$. В качестве эталона использовалась аппроксимация Никельса. Сопоставление с другими моделями показало, что ALEx немного уступает по точности модели Прандтля с нелокальной поправкой ван Дрифта [42], но по-прежнему оказывается лучше модели SA. Несмотря на недостатки априорного подхода, полученная модель лишь незначительно улучшена (примерно на 5%) на этапе согласованного обучения, что говорит об уместности использования данного подхода в рассмотренной задаче. Представленная комбинация априорного тестирования и согласованного с моделью обучения позволила эффективно использовать преимущества обоих методов, а именно:

- более сложную с точки зрения машинного обучения задачу поиска функциональной зависимости следует решать с помощью экономического априорного анализа;
 - затем ресурсоемким методом согласованного обучения оптимизировать только константы.
- Данная работа является демонстрацией возможностей методов машинного обучения для создания новых моделей турбулентности.

Исследование поддержано Российским научным фондом (проект № 24-79-10064) (<https://rscf.ru/project/24-79-10064/>).

Литература

1. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. Современные подходы к моделированию турбулентности. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2016. 233 с.

2. White F.M., Christoph G.H. A Simple Theory for the Two-Dimensional Compressible Turbulent Boundary Layer // Journal of Basic Engineering. 1972. Vol. 94, no. 3. P. 636–642. DOI: 10.1115/1.3425519
3. Peng S.-H. Algebraic Hybrid RANS-LES Modelling Applied to Incompressible and Compressible Turbulent Flows // 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. 2006. DOI: 10.2514/6.2006-3910. 3910.
4. Peng S.-H. Hybrid RANS-LES modeling based on zero- and one-equation models for turbulent flow simulation // Proceeding of Fourth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena. Begel House Inc., 2005. DOI: 10.1615/TSFP4.1930
5. Menter F.R., Kolmogorov D.K., Garbaruk A.V., Stabnikov A.S. Direct- and Large Eddy Simulations of Turbulent Flow in CS0 Diffuser on Resolved and Under-resolved Meshes // Flow, Turbulence and Combustion. 2023. Vol. 110, no. 3. P. 515–546. DOI: 10.1007/s10494-023-00399-1
6. Nebenführ B., Yao H., Peng S.-H., Davidson L. Hybrid RANS/LES Simulations for Aerodynamic and Aeroacoustic Analysis of a Multi-Element Airfoil // 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2013. DOI: 10.2514/6.2013-2066. 2066.
7. Nebenführ B., Peng S.-H., Davidson L. Hybrid RANS-LES Simulation of Turbulent High-Lift Flow in Relation to Noise Generation // Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Beijing, China: Springer Berlin Heidelberg, 2012. P. 303–314. DOI: 10.1007/978-3-642-31818-4_26
8. Li H., Yakovenko S.N. Application of machine learning methods to develop algebraic Reynolds-stress models for flows in channels // Proceeding of 10th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, THMT-23, Rome, Italy, 11-15 September 2023. Rome, Italy: Begel House Inc., 2023. DOI: 10.1615/ichmt.thmt-23.710
9. Smith A.M., Cebeci T. Numerical solution of the turbulent-boundary-layer equations: Technical report / Douglas Aircraft Company. 1967. DAC33735. DOI: 10.21236/ad0656430
10. Baldwin B., Lomax H. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows // 16th Aerospace Sciences Meeting. 1978. DOI: 10.2514/6.1978-257. 257.
11. Yilmaz I. An Algebraic Hybrid RANS-LES Model with Application to Turbulent Heat Transfer // Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Springer International Publishing, 2018. P. 503–512. DOI: 10.1007/978-3-319-70031-1_42
12. Zhu H., Fu S., Shi L., Wang Z.J. Implicit Large-Eddy Simulation for the High-Order Flux Reconstruction Method // AIAA Journal. 2016. Vol. 54, no. 9. P. 2721–2733. DOI: 10.2514/1.j054826
13. Duraisamy K., Iaccarino G., Xiao H. Turbulence Modeling in the Age of Data // Annual Review of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 51, no. 1. P. 357–377. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010518-040547
14. Data Driven Analysis and Modeling of Turbulent Flows / ed. by K. Duraisamy. Elsevier, 2025. P. 401. DOI: 10.1016/C2021-0-02739-5
15. Poroseva S.V., Colmenares F. J.D., Murman S.M. On the accuracy of RANS simulations with DNS data // Physics of Fluids. 2016. Vol. 28, no. 11. 115102. DOI: 10.1063/1.4966639
16. Thompson R.L., Sampaio L.E.B., Bragança Alves F.A.V. de, Thais L., Mompean G. A methodology to evaluate statistical errors in DNS data of plane channel flows // Computers & Fluids. 2016. Vol. 130. P. 1–7. DOI: 10.1016/j.compfluid.2016.01.014
17. Reissmann M., Hasslberger J., Sandberg R.D., Klein M. Application of Gene Expression Programming to a-posteriori LES modeling of a Taylor Green Vortex // Journal of Computational Physics. 2021. Vol. 424. 109859. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109859
18. Ben Hassan Saïdi I., Schmelzer M., Cinnella P., Grasso F. CFD-driven symbolic identification of algebraic Reynolds-stress models // Journal of Computational Physics. 2022. Vol. 457. 111037. DOI: 10.1016/j.jcp.2022.111037
19. Duraisamy K. Perspectives on machine learning-augmented Reynolds-averaged and large eddy simulation models of turbulence // Physical Review Fluids. 2021. Vol. 6, no. 5. 050504. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.050504
20. Holland J.R., Baeder J.D., Duraisamy K. Field Inversion and Machine Learning With Embedded Neural Networks: Physics-Consistent Neural Network Training // AIAA Aviation 2019 Forum. 2019. DOI: 10.2514/6.2019-3200. 3200.
21. Jiang C., Vinuesa R., Chen R., Mi J., Laima S., Li H. An interpretable framework of data-driven turbulence modeling using deep neural networks // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33, no. 5. 055133. DOI: 10.1063/5.0048909
22. Ling J., Kurzwski A., Templeton J. Reynolds-averaged turbulence modelling using deep neural networks with embedded invariance // Journal of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 807. P. 155–166. DOI: 10.1017/jfm.2016.615
23. Kaandorp M.L.A., Dwight R.P. Data-driven modelling of the Reynolds stress tensor using random forests with invariance // Computers & Fluids. 2020. Vol. 202. 104497. DOI: 10.1016/j.compfluid.2020.104497
24. Bernard A., Yakovenko S.N. Enhancement of RANS models by means of the tensor basis random forest for turbulent flows in two-dimensional channels with bumps // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2023. Vol. 64, no. 3. P. 437–441. DOI: 10.1134/S0021894423030094
25. Wu J.-L., Xiao H., Paterson E. Physics-informed machine learning approach for augmenting turbulence models: A comprehensive framework // Physical Review Fluids. 2018. Vol. 3, no. 7. 074602. DOI: 10.1103/physrevfluids.3.074602
26. Cramer N.L. A Representation for the Adaptive Generation of Simple Sequential Programs // Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms and their Applications. Pittsburgh, USA, 24-26 July 1985. 1985. P. 183–187.
27. Ferreira C. Gene Expression Programming: a New Adaptive Algorithm for Solving Problems // Complex Systems. 2001. Vol. 13. P. 87–129. DOI: 10.48550/arXiv.cs/0102027

28. Tibshirani R. Regression Shrinkage and Selection Via the Lasso // Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology. 1996. Vol. 58, no. 1. P. 267–288. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1996.tb02080.x
29. Weatheritt J., Sandberg R. A novel evolutionary algorithm applied to algebraic modifications of the RANS stress-strain relationship // Journal of Computational Physics. 2016. Vol. 325. P. 22–37. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.08.015
30. Weatheritt J., Sandberg R.D. The development of algebraic stress models using a novel evolutionary algorithm // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2017. Vol. 68. P. 298–318. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2017.09.017
31. Menter F. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows // 23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference. 1993. DOI: 10.2514/6.1993-2906.2906.
32. Zhao Y., Akolekar H.D., Weatheritt J., Michelassi V., Sandberg R.D. RANS turbulence model development using CFD-driven machine learning // Journal of Computational Physics. 2020. Vol. 411. 109413. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109413
33. Di Fabbio T., Fang Y., Tangermann E., Sandberg R.D., Klein M. Strategies for Enhancing One-Equation Turbulence Model Predictions Using Gene-Expression Programming // Fluids. 2024. Vol. 9, no. 8. 191. DOI: 10.3390/fluids9080191
34. Spalart P., Allmaras S. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 1992. DOI: 10.2514/6.1992-439.439.
35. Li H., Zhao Y., Wang J., Sandberg R.D. Data-driven model development for large-eddy simulation of turbulence using gene-expression programming // Physics of Fluids. 2021. Vol. 33, no. 12. 125127. DOI: 10.1063/5.0076693
36. Moin P., Squires K., Cabot W., Lee S. A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1991. Vol. 3, no. 11. P. 2746–2757. DOI: 10.1063/1.858164
37. Liu S., Meneveau C., Katz J. On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet // Journal of Fluid Mechanics. 1994. Vol. 275. P. 83–119. DOI: 10.1017/S0022112094002296
38. Weatheritt J., Sandberg R.D. Hybrid Reynolds-Averaged/Large-Eddy Simulation Methodology from Symbolic Regression: Formulation and Application // AIAA Journal. 2017. Vol. 55, no. 11. P. 3734–3746. DOI: 10.2514/1.j.055378
39. Li H., Waschkowski F., Zhao Y., Sandberg R.D. Turbulence Model Development based on a Novel Method Combining Gene Expression Programming with an Artificial Neural Network. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2301.07293
40. Li H., Zhao Y., Waschkowski F., Sandberg R.D. Evolutionary neural networks for learning turbulence closure models with explicit expressions // Physics of Fluids. 2024. Vol. 36, no. 5. 055126. DOI: 10.1063/5.0203975
41. Prandtl L. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1925. Vol. 5. P. 136–139.
42. Van Driest E.R. On Turbulent Flow Near a Wall // Journal of the Aeronautical Sciences. 1956. Vol. 23, no. 11. P. 1007–1011. DOI: 10.2514/8.3713
43. Lee M., Moser R.D. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau \approx 5200$ // Journal of Fluid Mechanics. 2015. Vol. 774. P. 395–415. DOI: 10.1017/jfm.2015.268
44. The Julia Programming Language. URL: <https://julialang.org/> (accessed: 30.10.2026)
45. SymbolicRegression.jl. URL: <https://juliapackages.com/p/symbolicregression> (accessed: 30.10.2026)
46. GeneExpressionProgramming.jl. URL: <https://github.com/maxreiss123/GeneExpressionProgramming.jl> (accessed: 30.10.2026)
47. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia. URL: <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/> (accessed: 30.10.2026)
48. Sundials.jl. URL: <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/dev/api/sundials/> (accessed: 30.10.2026)
49. Hindmarsh A.C., Taylor A.G. User documentation for IDA, a differential-algebraic equation solver for sequential and parallel computers: Technical report / Lawrence Livermore National Laboratory. 1999. UCRL-MA-136910
50. Optim.jl. URL: <https://juliapackages.com/p/optim> (accessed: 30.10.2026)
51. BoundaryValueDiffEq.jl. URL: <https://docs.sciml.ai/BoundaryValueDiffEq/dev/> (accessed: 30.10.2026). Julia package.
52. Verner J.H. Numerically optimal Runge–Kutta pairs with interpolants // Numerical Algorithms. 2010. Vol. 53, no. 2/3. P. 383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3
53. Nickels T.B. Inner scaling for wall-bounded flows subject to large pressure gradients // Journal of Fluid Mechanics. 2004. Vol. 521. P. 217–239. DOI: 10.1017/s0022112004001788

Сведения об авторах:

Усов Лев Александрович (корр.), мнс, Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского (ЦАГИ), 140180, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1; e-mail: usov.la@phystech.edu; ORCID: 0000-0001-7316-7328

Савельев Андрей Александрович, кфмн, нач. отдела, ЦАГИ; e-mail: andrey.savelyev@tsagi.ru; ORCID: 0000-0003-1174-1894

Research article

A new algebraic RANS model for the wall sublayer of the hybrid RANS/LES method based on machine learning methods

L.A. Usov^{1,2}, A.A. Savelyev^{1,2}

¹ Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russian Federation

² Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russian Federation

Today, there is a special focus on the development of Hybrid RANS/LES methods, in which the RANS model, describing the near-wall region of the flow, is one of their basic components. Since this region accounts for approximately 10% of the boundary layer thickness, one would expect that relatively simple algebraic closures can perform well in it. However, they are either non-local or implicit. The goal of this paper is to create a new explicit local algebraic RANS model for the near-wall sublayer, which will be used as a part of a hybrid RANS/LES method. The development of the model would involve the machine learning methods, which have found wide application in turbulence modeling. This procedure consists of two stages. First, by performing a priori testing based on the DNS data on the developed turbulent flow in a plane channel at the friction Reynolds numbers from 550 to 5 200, the functional form of the new model is constructed using genetic programming. Then, the optimization of coefficients is carried out by applying a model-consistent learning approach that is based on the solution of a turbulent flow in a plane channel. The results calculated by the new model are compared with those obtained with the use of the classical Prandtl and Spalart-Allmaras models. It is shown that the new model outperforms them in accuracy. The new model was tested at a friction Reynolds number of 20 000. It has been found that with this model it is possible to construct mean velocity profiles that agree well with the Nickels approximation and are close to those calculated by other models. Thus, this paper demonstrates that a combination of a priori and model-consistent machine learning approaches has been rather successful in creating an original algebraic RANS turbulence model.

Keywords: hybrid RANS/LES methods, wall-bounded flows, algebraic RANS models, machine learning

Received: 01.04.2026 / **Accepted:** 14.08.2026 / **Published online:** 31.10.2026

Acknowledgements

The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-79-10064).

References

1. Garbaruk A.V., Strelets M.K., Travin A.K., Shur M.L. Modern approaches to the modeling of turbulence. Saint Petersburg: Izd-vo Politehnicheskogo un-ta, 2016. 233 p.
2. White F.M., Christoph G.H. A Simple Theory for the Two-Dimensional Compressible Turbulent Boundary Layer. *Journal of Basic Engineering*. 1972. Vol. 94, no. 3. P. 636–642. DOI: 10.1115/1.3425519
3. Peng S.-H. Algebraic Hybrid RANS-LES Modelling Applied to Incompressible and Compressible Turbulent Flows. 36th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit. 2006. DOI: 10.2514/6.2006-3910. 3910.
4. Peng S.-H. Hybrid RANS-LES modeling based on zero- and one-equation models for turbulent flow simulation. *Proceeding of Fourth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*. Begel House Inc., 2005. DOI: 10.1615/TSFP4.1930
5. Menter F.R., Kolmogorov D.K., Garbaruk A.V., Stabnikov A.S. Direct- and Large Eddy Simulations of Turbulent Flow in CS0 Diffuser on Resolved and Under-resolved Meshes. *Flow, Turbulence and Combustion*. 2023. Vol. 110, no. 3. P. 515–546. DOI: 10.1007/s10494-023-00399-1
6. Nebenführ B., Yao H., Peng S.-H., Davidson L. Hybrid RANS/LES Simulations for Aerodynamic and Aeroacoustic Analysis of a Multi-Element Airfoil. 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2013. DOI: 10.2514/6.2013-2066. 2066.
7. Nebenführ B., Peng S.-H., Davidson L. Hybrid RANS-LES Simulation of Turbulent High-Lift Flow in Relation to Noise Generation. *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. P. 303–314. DOI: 10.1007/978-3-642-31818-4_26
8. Li H., Yakovenko S.N. Application of machine learning methods to develop algebraic Reynolds-stress models for flows in channels. *Proceeding of 10th International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, THMT-23, Rome, Italy, 11-15 September 2023*. Begel House Inc., 2023. DOI: 10.1615/ichmt.thmt-23.710
9. Smith A.M., Cebeci T. Numerical solution of the turbulent-boundary-layer equations: Technical report / Douglas Aircraft Company. 1967. DAC33735. DOI: 10.21236/ad0656430
10. Baldwin B., Lomax H. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. 16th Aerospace Sciences Meeting. 1978. DOI: 10.2514/6.1978-257. 257.

11. *Yilmaz I.* An Algebraic Hybrid RANS-LES Model with Application to Turbulent Heat Transfer. Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Springer International Publishing, 2018. P. 503–512. DOI: 10.1007/978-3-319-70031-1_42
12. *Zhu H., Fu S., Shi L., Wang Z.J.* Implicit Large-Eddy Simulation for the High-Order Flux Reconstruction Method. AIAA Journal. 2016. Vol. 54, no. 9. P. 2721–2733. DOI: 10.2514/1.j054826
13. *Duraisamy K., Iaccarino G., Xiao H.* Turbulence Modeling in the Age of Data. Annual Review of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 51, no. 1. P. 357–377. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010518-040547
14. Data Driven Analysis and Modeling of Turbulent Flows / ed. by K. Duraisamy. Elsevier, 2025. P. 401. DOI: 10.1016/C2021-0-02739-5
15. *Poroseva S.V., Colmenares F.J.D., Murman S.M.* On the accuracy of RANS simulations with DNS data. Physics of Fluids. 2016. Vol. 28, no. 11. 115102. DOI: 10.1063/1.4966639
16. *Thompson R.L., Sampaio L.E.B., Bragança Alves F.A.V. de, Thais L., Mompean G.* A methodology to evaluate statistical errors in DNS data of plane channel flows. Computers & Fluids. 2016. Vol. 130. P. 1–7. DOI: 10.1016/j.compfluid.2016.01.014
17. *Reissmann M., Hasslberger J., Sandberg R.D., Klein M.* Application of Gene Expression Programming to a-posteriori LES modeling of a Taylor Green Vortex. Journal of Computational Physics. 2021. Vol. 424. 109859. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109859
18. *Ben Hassan Saïdi I., Schmelzer M., Cinnella P., Grasso F.* CFD-driven symbolic identification of algebraic Reynolds-stress models. Journal of Computational Physics. 2022. Vol. 457. 111037. DOI: 10.1016/j.jcp.2022.111037
19. *Duraisamy K.* Perspectives on machine learning-augmented Reynolds-averaged and large eddy simulation models of turbulence. Physical Review Fluids. 2021. Vol. 6, no. 5. 050504. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.050504
20. *Holland J.R., Baeder J.D., Duraisamy K.* Field Inversion and Machine Learning With Embedded Neural Networks: Physics-Consistent Neural Network Training. AIAA Aviation 2019 Forum. 2019. DOI: 10.2514/6.2019-3200. 3200.
21. *Jiang C., Vinuesa R., Chen R., Mi J., Laima S., Li H.* An interpretable framework of data-driven turbulence modeling using deep neural networks. Physics of Fluids. 2021. Vol. 33, no. 5. 055133. DOI: 10.1063/5.0048909
22. *Ling J., Kurczowski A., Templeton J.* Reynolds-averaged turbulence modelling using deep neural networks with embedded invariance. Journal of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 807. P. 155–166. DOI: 10.1017/jfm.2016.615
23. *Kaandorp M.L.A., Dwight R.P.* Data-driven modelling of the Reynolds stress tensor using random forests with invariance. Computers & Fluids. 2020. Vol. 202. 104497. DOI: 10.1016/j.compfluid.2020.104497
24. *Bernard A., Yakovenko S.N.* Enhancement of RANS models by means of the tensor basis random forest for turbulent flows in two-dimensional channels with bumps. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2023. Vol. 64, no. 3. P. 437–441. DOI: 10.1134/S0021894423030094
25. *Wu J.-L., Xiao H., Paterson E.* Physics-informed machine learning approach for augmenting turbulence models: A comprehensive framework. Physical Review Fluids. 2018. Vol. 3, no. 7. 074602. DOI: 10.1103/physrevfluids.3.074602
26. *Cramer N.L.* A Representation for the Adaptive Generation of Simple Sequential Programs. Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms and their Applications. Pittsburgh, USA, 24-26 July 1985. 1985. P. 183–187.
27. *Ferreira C.* Gene Expression Programming: a New Adaptive Algorithm for Solving Problems. Complex Systems. 2001. Vol. 13. P. 87–129. DOI: 10.48550/arXiv.cs/0102027
28. *Tibshirani R.* Regression Shrinkage and Selection Via the Lasso. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology. 1996. Vol. 58, no. 1. P. 267–288. DOI: 10.1111/j.2517-6161.1996.tb02080.x
29. *Weatheritt J., Sandberg R.* A novel evolutionary algorithm applied to algebraic modifications of the RANS stress-strain relationship. Journal of Computational Physics. 2016. Vol. 325. P. 22–37. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.08.015
30. *Weatheritt J., Sandberg R.D.* The development of algebraic stress models using a novel evolutionary algorithm. International Journal of Heat and Fluid Flow. 2017. Vol. 68. P. 298–318. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2017.09.017
31. *Menter F.* Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows. 23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference. 1993. DOI: 10.2514/6.1993-2906. 2906.
32. *Zhao Y., Akolekar H.D., Weatheritt J., Michelassi V., Sandberg R.D.* RANS turbulence model development using CFD-driven machine learning. Journal of Computational Physics. 2020. Vol. 411. 109413. DOI: 10.1016/j.jcp.2020.109413
33. *Di Fabbio T., Fang Y., Tangermann E., Sandberg R.D., Klein M.* Strategies for Enhancing One-Equation Turbulence Model Predictions Using Gene-Expression Programming. Fluids. 2024. Vol. 9, no. 8. 191. DOI: 10.3390/fluids9080191
34. *Spalart P., Allmaras S.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 1992. DOI: 10.2514/6.1992-439. 439.
35. *Li H., Zhao Y., Wang J., Sandberg R.D.* Data-driven model development for large-eddy simulation of turbulence using gene-expression programming. Physics of Fluids. 2021. Vol. 33, no. 12. 125127. DOI: 10.1063/5.0076693
36. *Moin P., Squires K., Cabot W., Lee S.* A dynamic subgrid-scale model for compressible turbulence and scalar transport. Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1991. Vol. 3, no. 11. P. 2746–2757. DOI: 10.1063/1.858164
37. *Liu S., Meneveau C., Katz J.* On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet. Journal of Fluid Mechanics. 1994. Vol. 275. P. 83–119. DOI: 10.1017/S0022112094002296
38. *Weatheritt J., Sandberg R.D.* Hybrid Reynolds-Averaged/Large-Eddy Simulation Methodology from Symbolic Regression: Formulation and Application. AIAA Journal. 2017. Vol. 55, no. 11. P. 3734–3746. DOI: 10.2514/1.j055378

39. *Li H., Waschkowski F., Zhao Y., Sandberg R.D.* Turbulence Model Development based on a Novel Method Combining Gene Expression Programming with an Artificial Neural Network. 2023. DOI: 10.48550/arXiv.2301.07293
40. *Li H., Zhao Y., Waschkowski F., Sandberg R.D.* Evolutionary neural networks for learning turbulence closure models with explicit expressions. *Physics of Fluids*. 2024. Vol. 36, no. 5. 055126. DOI: 10.1063/5.0203975
41. *Prandtl L.* Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1925. Vol. 5. P. 136–139.
42. *Van Driest E.R.* On Turbulent Flow Near a Wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1956. Vol. 23, no. 11. P. 1007–1011. DOI: 10.2514/8.3713
43. *Lee M., Moser R.D.* Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau \approx 5200$. *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. Vol. 774. P. 395–415. DOI: 10.1017/jfm.2015.268
44. The Julia Programming Language. URL: <https://julialang.org/> (accessed: 30.10.2026)
45. SymbolicRegression.jl. URL: <https://juliapackages.com/p/symbolicregression> (accessed: 30.10.2026)
46. GeneExpressionProgramming.jl. URL: <https://github.com/maxreiss123/GeneExpressionProgramming.jl> (accessed: 30.10.2026)
47. DifferentialEquations.jl: Efficient Differential Equation Solving in Julia. URL: <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/stable/> (accessed: 30.10.2026)
48. Sundials.jl. URL: <https://docs.sciml.ai/DiffEqDocs/dev/api/sundials/> (accessed: 30.10.2026)
49. *Hindmarsh A.C., Taylor A.G.* User documentation for IDA, a differential-algebraic equation solver for sequential and parallel computers: Technical report / Lawrence Livermore National Laboratory. 1999. UCRL-MA-136910
50. Optim.jl. URL: <https://juliapackages.com/p/optim> (accessed: 30.10.2026)
51. BoundaryValueDiffEq.jl. URL: <https://docs.sciml.ai/BoundaryValueDiffEq/dev/> (accessed: 30.10.2026). Julia package.
52. *Verner J.H.* Numerically optimal Runge–Kutta pairs with interpolants. *Numerical Algorithms*. 2010. Vol. 53, no. 2/3. P. 383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3
53. *Nickels T.B.* Inner scaling for wall-bounded flows subject to large pressure gradients. *Journal of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 521. P. 217–239. DOI: 10.1017/s0022112004001788