

Научная статья

Гибридная вычислительная схема для моделирования возбуждения упругих волн в изотропном слое пьезокерамическим актуатором различной конфигурации

А.А. Евдокимов, П.А. Нец, А.А. Еремин, М.В. Варелджан

Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация

Моделирование процесса возбуждения бегущих упругих волн поверхностным или встроенным ультразвуковыми преобразователями является одной из ключевых задач при разработке и обосновании эффективности методов неразрушающего контроля и мониторинга состояния конструкций. Для ее решения известная гибридная численно-аналитическая схема распространяется на исследование динамики трехмерных волноводов. Задача сводится к рассмотрению поведения изотропного упругого слоя под действием локализованного источника колебаний, расположенного на произвольном расстоянии от границ слоя. Построение решения осуществляется в два этапа. На первом этапе формируется набор вспомогательных численных решений в окрестности преобразователя. На втором этапе найденные решения связываются с полем в оставшейся однородной части слоя, которое представляется в виде суммы цилиндрических бегущих волн. Каждая такая волна выражается как произведение формы колебания для указанной моды вдоль вертикальной координаты и функции, характеризующей интенсивность излучения в выбранном направлении. Последняя описывается рядом Фурье по полярному углу, при этом коэффициенты разложения определяются исходя из условий непрерывности векторов смещений и напряжений на границе раздела между зоной слоя, содержащей источник колебаний, и оставшейся частью. Развиваемая схема способна моделировать взаимодействие между упругим слоем и преобразователем произвольной формы, учитывать связанность физических полей и не требует самостоятельной программной реализации конечно-элементных расчетов. Кроме того, с ее помощью можно оценить эффективность возбуждения нормальных мод в выбранном частотном диапазоне в зависимости от направления их распространения. Верификация схемы осуществляется путем сопоставления с численными результатами, полученными в рамках других подходов. В качестве примера использования разработанной схемы применительно к ультразвуковому мониторингу тонкостенных конструкций анализируются особенности возбуждения бегущих упругих волн поверхностным или внедренным в упругий слой пьезокерамическим преобразователем разной геометрии.

Ключевые слова: гибридная вычислительная схема, бегущие упругие волны, метод конечных элементов, пьезокерамический актуатор

Получение: 17.04.2026 / Публикация онлайн: 05.08.2026

УДК 534.2

1. Введение

Ультразвуковые методы неразрушающего контроля, основанные на применении упругих волн Рэлея–Лэмба, способных распространяться на значительные расстояния от источника колебаний, представляют собой эффективный инструмент для реализации систем непрерывного мониторинга состояния протяженных тонкостенных конструкций [1, 2]. Важным подготовительным этапом при проектировании подобных диагностирующих систем является разработка физически адекватных математических и компьютерных моделей, описывающих процесс возбуждения в исследуемом объекте бегущих упругих волн преобразователями разных типов. В качестве источников колебаний в этом случае рассматриваются как размещаемые на поверхности [2, 3], так и встраиваемые в материал конструкции преобразователи [4, 5], основанные на физическом принципе обратного пьезоэффекта. Их применение позволяет проектировать селективное или направленное генерирование отдельных бегущих упругих волн [6–8], оптимизировать расположение элементов в актуаторно-сенсорной сети как ключевой части системы ультразвукового мониторинга [9], увеличивать площадь покрытия указанной сетью диагностируемой конструкции, а также обеспечивать контроль ее труднодоступных участков.

Решение краевых задач о возбуждении бегущих упругих волн поверхностными или встроенными источниками колебаний может быть построено численно. В инженерной практике для этого используется метод конечных элементов (МКЭ), реализованный в специализированном программном обеспечении, например, в ANSYS, COMSOL, Fidesys и другом. Основными преимуществами МКЭ является возможность построения моделей волноводов или/и преобразователей со сложной геометрией, с учетом свойств материала, расположением электродов и другого. Для моделирования протяженных волноводов формулируются специальные поглощающие или неотражающие граничные условия, например, идеально согласованные слои (Perfectly Matched Layer, PML) [10, 11]. Вместе с тем для детального анализа волновой структуры вызываемых преобразователем колебаний требуется дополнительная постобработка МКЭ-результатов. В работах [12–14] предлагается выделение из общего решения отдельных плоских волн исходя из условий ортогональности бегущих волн. Однако для эффективного применения такого подхода в случае трехмерных волноводов по-прежнему необходимо рассматривать протяженные расчетные области [13], поскольку вблизи источника колебаний или препятствия сложно отделить антиплоские SH-волны от симметричных волн Лэмба в рамках используемой математической формы волнового поля в виде суммы плоских волн.

Дополнительные ограничения МКЭ-подходов связаны с необходимостью аппроксимации решения в протяженных однородных областях между источником колебаний и точками измерения волнового поля. Для

моделирования данных участков требуются существенные вычислительные ресурсы (память, процессорное время), что особенно заметно в случае трехмерных задач. Естественный способ избежать этого заключается в разработке упрощенных моделей для описания взаимодействия актуатора с волноводом, или стыковка численного решения, учитывающего динамическое поведение пьезопреобразователя, с аналитическим представлением волнового поля при удалении от источника колебаний. Например, в случае тонкого и жесткого пьезокерамического актуатора его динамическая реакция в расчет не принимается, а воздействие пьезоэлемента на упругую подложку в диапазоне низких частот хорошо изображается моделью точечных сил с использованием эффективных граничных условий [2, 15, 16]. Альтернативным подходом служит моделирование динамического поведения пьезоактуатора и, возможно, самого волновода в рамках инженерных теорий, что позволяет снизить размерность рассматриваемых задач [17–19]. Упрощенные модели делают возможным получение волновой структуры решения в любой точке упругой подложки при незначительных затратах вычислительных ресурсов, однако, им присуща общая особенность — ограниченный диапазон частот, в которых они применимы.

Гибридные подходы, сочетающие прямые численные методы расчета волновой динамики ограниченных участков волновода, содержащих неоднородности, и разложения по нормальным модам для однородных частей, разрабатываются как для решения задач о возбуждении бегущих волн, так и для моделирования их рассеяния на препятствиях [20–25]. В рамках таких подходов предполагается построение МКЭ-решения для самого актуатора [26, 27] или некоторой области волновода с актуатором внутри [28, 29], которое затем стыкуется с некоторым аналитическим или полуаналитическим решением в оставшихся точках волновода. В работах [26, 27] используются конечные элементы (КЭ) повышенного порядка точности для решения краевой задачи линейной пьезоупругости для актуатора, и далее это решение связывается с полуаналитическим интегральным решением для волновода, которое представляется в виде свертки матрицы Грина и контактных напряжений. В работах [28, 29] решение исходной краевой задачи о взаимодействии поверхностного актуатора с волноводом получается в два этапа: на первом этапе строится МКЭ-решение в области, включающей сам актуатор и некоторую небольшую часть упругого слоя вблизи него, а также PML-условия (Perfectly Matched Layer — идеально согласованный слой) для моделирования оттока волновой энергии на бесконечность. Затем с его помощью определяются неизвестные контактные напряжения, используемые в интегральном решении. Описанные подходы применимы для актуаторов сложной геометрии, могут учитывать наличие клеевой прослойки между пьезоэлементом и подложкой, а также особенности его электродирования и сохраняют свою функциональность с ростом частоты и появлением высших нормальных мод (исключение составляют частотные диапазоны, соответствующие волнам с отрицательной групповой скоростью, см. подходы, представленные в работах [28, 29]), однако и их использование возможно, но только в случае преобразователей, расположенных на поверхности волновода.

В настоящей работе гибридная численно-аналитическая схема [30–32] обобщается на случай трехмерного волновода, рассматриваемого как изотропный слой, для моделирования возбуждения бегущих упругих волн внедренным в него пьезопреобразователем. В рамках данной схемы слой делится на две части: цилиндрическую, содержащую источник колебаний, и оставшуюся неограниченную часть. Решение внутри цилиндра находится численно как линейная комбинация МКЭ-решений вспомогательных краевых задач. Граничные условия для этих задач формулируются таким образом, чтобы их линейная комбинация с неизвестными коэффициентами удовлетворяла исходной краевой задаче. На боковой поверхности цилиндра с пьезоэлементом задаются напряжения, индуцируемые отдельными нормальными модами (волнами Лэмба и SH-волнами) на рассматриваемой частоте. В оставшейся бесконечно протяженной однородной части упругого слоя поле ищется в виде суперпозиции цилиндрических бегущих упругих волн. Такое представление решения автоматически обеспечивает выполнение условий непрерывности вектора напряжений на границе цилиндра. Условия непрерывности вектора смещений служат основой для определения неизвестных коэффициентов, входящих как в суммы МКЭ-решений, так и в суммы бегущих волн. Слагаемые разложения поля вне области с неоднородностью могут быть интерпретированы как произведение функции интенсивности, характеризующей направленность излучения соответствующей моды для заданного полярного угла, на модальную форму по толщине слоя и на амплитудную функцию, убывающую при удалении от боковой поверхности цилиндрической части. Развиваемый подход применим для любого частотного диапазона и позволяет моделировать актуаторы любой формы и расположения относительно границ волновода. Верификация предлагаемой схемы осуществляется путем сопоставления полученных авторами численных результатов с данными других подходов: МКЭ с поглощающими граничными условиями в виде PML; интегрального подхода [33–35]. В качестве примера, иллюстрирующего применение предлагаемой гибридной численно-аналитической схемы для решения задач, встающих при проектировании систем ультразвукового мониторинга тонкостенных конструкций, анализируются особенности излучения отдельных бегущих упругих волн погруженными или поверхностными пьезокерамическими актуаторами в форме цилиндра или прямоугольного параллелепипеда в алюминиевой пластине.

2. Гибридная численно-аналитическая схема

Рассматривается задача об установившихся гармонических колебаниях изотропного упругого слоя $W = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| < \infty, |x_2| < \infty, -h \leq x_3 \leq 0\}$, внутри которого выделяется цилиндрическая область $D^F = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq r_b^2, -h \leq x_3 \leq 0\}$, содержащая источник колебаний (Рис. 1). Оставшаяся часть слоя $D^A = W \setminus D^F$ предполагается однородной. В области D^A вектор смещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ удовлетворяет

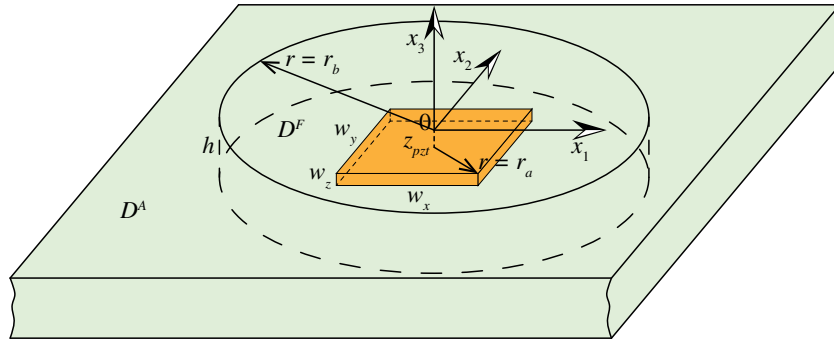


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии рассматриваемых задач

уравнениям Ламе:

$$(\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где λ, μ — параметры Ламе, ω — круговая частота, ρ — плотность материала, а под индексом «Т» понимается операция транспонирования соответствующего вектора или матрицы. Верхняя и нижняя границы слоя в области D^A считаются свободными от напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma}|_{x_3=0} = \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\sigma}|_{x_3=-h} = \mathbf{0}, \quad x_1^2 + x_2^2 > r_b^2. \quad (2)$$

В области D^F находится источник колебаний, в качестве которого в общем случае рассматривается пьезоэлектрический преобразователь (актуатор), занимающий объем Ω . Актуатор может располагаться как на поверхности слоя, так и внутри него (Рис. 1). В практических приложениях наиболее часто используются пьезопреобразователи, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда ($\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leq w_x/2, |x_2| \leq w_y/2, z_{pzt} - w_z \leq x_3 \leq z_{pzt}\}$) или прямого кругового цилиндра ($\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq r_a^2, z_{pzt} - w_z \leq x_3 \leq z_{pzt}\}$). Для формализации геометрических характеристик (местонахождения и конфигурации) источника вводятся следующие дополнительные обозначения: w_x и w_y — длина и ширина (у прямоугольного пьезопреобразователя); r_a — радиус основания (при цилиндрической форме) и z_{pzt} — координата верхней горизонтальной плоскости актуатора; w_z — его толщина. Величина r_a используется также в обобщенном смысле — как минимальный радиус кругового цилиндра, в который может быть вписан источник колебаний произвольной формы (например, актуатор в форме прямоугольного параллелепипеда $2r_a = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$).

Поверхность контакта актуатора со слоем W обозначается как $\partial\Omega^W = D^F \cap \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ — поверхность области Ω . В этом случае уравнения (1) во внутренних точках актуатора заменяются уравнениями теории линейной электроупругости [36, 37]:

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l \partial x_j} + e_{kij} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_j} + \rho \omega^2 u_i(\mathbf{x}) = 0, \quad e_{ikl} \frac{\partial^2 u_k(\mathbf{x})}{\partial x_l \partial x_i} - \varepsilon_{ik} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

где $c_{ijkl}, e_{kij}, \varepsilon_{ik}$ — компоненты тензоров упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных соответственно, $\phi(\mathbf{x})$ — потенциал электрического поля. Подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Компоненты вектора напряженности $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^T$ определяются как производные функции потенциала:

$$E_k(\mathbf{x}) = - \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial x_k}.$$

В остальной части области D^F , то есть в объеме $D^F \setminus \Omega$, поле упругих смещений по-прежнему описывается уравнениями Ламе (1) с теми же упругими параметрами, что и в области D^A .

Поверхность актуатора $\partial\Omega$ разделяется на три участка для задания граничных условий: $\partial\Omega = \partial\Omega^U \cup \partial\Omega^G \cup \partial\Omega^V$, соответствующих частям границы пьезоэлемента, на которых задются электрические смещения, условия заземления или электрический потенциал. С учетом введенных обозначений электрические граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega^U, \\ \phi(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega^G, \\ \phi(\mathbf{x}) &= V_{pzt}, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega^V. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ — вектор электрических смещений; $\mathbf{n}$ — нормаль в соответствующей точке поверхности актуатора.

Механические граничные условия зависят от типа актуатора. Если пьезопреобразователь полностью погружен в слой, то на границе раздела между актуатором и упругим слоем $\partial\Omega^W$ задаются условия непрерывности векторов смещений и напряжений. В случае частично заглубленного пьезоэлемента аналогичные условия сохраняются на той части его границы, которая погружена в упругий слой ($\partial\Omega^W$), а ее оставшиеся участки ($\partial\Omega \setminus \partial\Omega^W$) свободны от механических напряжений. Если же актуатор расположен на поверхности слоя, то условия непрерывности векторов смещений и напряжений между ним и упругим слоем выполняются только в области контакта $\partial\Omega^W$, а все остальные границы пьезоэлемента предполагаются свободными от напряжений.

Описываемая далее гибридная схема позволяет рассматривать и более сложные конфигурации пьезоэлементов. В частности, область Ω может быть многосоставной, что соответствует, например, задачам о селективном возбуждении отдельных нормальных мод группой полосовых или кольцевых актуаторов [6, 7], расположенных на поверхности волновода. Граничные условия (4) также могут быть дополнены, например, при наличии у пьезоэлемента нескольких сигнальных электродов, на которые могут подаваться разные по амплитуде и фазе электрические потенциалы [8].

В то же время с использованием предлагаемого подхода можно рассматривать и классические задачи о инициировании упругих колебаний заданной поверхностной нагрузкой $\mathbf{q}(x_1, x_2)$, действующей в некоторой области $\partial\Omega^W$ на верхней и/или нижней границах волновода. Соответствующий пример рассматривается в разделе 3 при верификации предлагаемой гибридной схемы (Рис. 2). В этом случае постановка краевой задачи состоит из уравнений движения (1), справедливых во всем волноводе W , однородных граничных условий (2) в области D_A , а в области D_F , если, например, нагрузка прикладывается к поверхности $x_3 = 0$, выполняются следующие граничные условия:

$$\boldsymbol{\sigma}|_{x_3=0} = \mathbf{q}(x_1, x_2) \quad \boldsymbol{\sigma}|_{x_3=-h} = \mathbf{0}, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq r_b^2. \quad (5)$$

На боковой поверхности цилиндра D^F предполагается непрерывность векторов смещений и напряжений в обеих сформулированных постановках задачи. Замыкает постановки принцип излучения, а именно принцип предельного поглощения [38].

Для описания применяемой гибридной численно-аналитической схемы целесообразно перейти от декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ к цилиндрической — $Or\varphi z$. Поле смещений $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)^T$ и тензор напряжений в цилиндрических координатах связаны с соответствующими величинами в декартовой системе следующими соотношениями:

$$\mathbf{C}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{C}^T(\varphi)\mathbf{u}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^T(\varphi) \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \mathbf{C}(\varphi).$$

Решение в однородной части волновода в рамках гибридной численно-аналитической схемы представляется в виде суперпозиции волн Лэмба и SH-волн:

$$\mathbf{v}^A(r, \varphi, z) = \sum_n \begin{pmatrix} A_{1,n}^P(r, \varphi) P_n(z) \\ A_{2,n}^P(r, \varphi) P_n(z) \\ A_{3,n}^P(r, \varphi) R_n(z) \end{pmatrix} + \sum_n \begin{pmatrix} A_{1,n}^{SH}(r, \varphi) N_n(z) \\ A_{2,n}^{SH}(r, \varphi) N_n(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где вектор-функции интенсивности имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n^P &= \begin{pmatrix} A_{1,n}^P \\ A_{2,n}^P \\ A_{3,n}^P \end{pmatrix} = \sum_m c_{n,m} \mathbf{A}_{n,m}^P(r) e^{im\varphi} = \sum_m c_{n,m} \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -i\zeta_n^2 L_1^m(\zeta_n r) \\ i\zeta_n^2 L_2^m(\zeta_n r) \\ \zeta_n L_3^m(\zeta_n r) \end{pmatrix} e^{im\varphi}, \\ \mathbf{A}_n^{SH} &= \begin{pmatrix} A_{1,n}^{SH} \\ A_{2,n}^{SH} \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_m c_{n,m} \mathbf{A}_{n,m}^{SH}(r) e^{im\varphi} = \sum_m c_{n,m} \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -i\zeta_n^3 L_2^m(\zeta_n r) \\ -i\zeta_n^3 L_1^m(\zeta_n r) \\ 0 \end{pmatrix} e^{im\varphi}, \\ L_1^m(z) &= \frac{1}{2i} (H_{m+1}^{(1)}(z) - H_{m-1}^{(1)}(z)), \quad L_2^m(z) = \frac{1}{2} (H_{m+1}^{(1)}(z) + H_{m-1}^{(1)}(z)), \quad L_3^m(z) = H_m^{(1)}(z). \end{aligned} \quad (7)$$

В соотношении (6) первая сумма означает суперпозицию цилиндрических волн Лэмба, возбуждаемых на рассматриваемой частоте, а вторая — суперпозицию антиплоских SH-волн. Вектор-функции $\mathbf{A}_n^P$ и $\mathbf{A}_n^{SH}$ характеризуют интенсивность излучения в выбранном направлении и на указанном расстоянии для волн Лэмба или SH-волн с номером n и волновым числом ζ_n ; они раскладываются в ряды Фурье по углу φ с амплитудными множителями $\mathbf{A}_{n,m}^P(r)$ и $\mathbf{A}_{n,m}^{SH}(r)$ и неизвестными коэффициентами $c_{n,m}$. Функции L_1^m , L_2^m и L_3^m из (7) выражаются через функции Ханкеля первого рода порядка m , обозначаемые как $H_m^{(1)}$. Для исследуемого упругого слоя функции P_n , R_n , N_n описывают форму волны вдоль вертикальной координаты z и определяются как вычеты функций $P(\alpha, z)$, $R(\alpha, z)$, $N(\alpha, z)$, входящих в элементы Фурье-символа $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, z)$ матрицы Грина в полюсах $\alpha = \zeta_n$, $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$. Явный вид функций P_n , R_n , N_n для обсуждаемых здесь задач приведен в работе [35].

В разложении (6) присутствует конечное число слагаемых с вещественными волновыми числами ζ_n , описывающих бегущие волны с амплитудой, убывающей при $r \rightarrow \infty$ как $1/\sqrt{r}$, и бесконечное число слагаемых, соответствующих волнам с экспоненциально затухающей амплитудой: $e^{-|r \operatorname{Im} \zeta_n|}/\sqrt{r}$. Такой характер амплитуд есть следствие асимптотического поведения функций A_n^P и A_n^{SH} при $r \rightarrow \infty$, позволяющее ограничить суммы в (6) конечным числом членов, включающим все слагаемые с вещественными волновыми числами и некоторое число слагаемых с комплексными ζ_n , имеющими наименьшие по модулю мнимые части. Число удерживаемых слагаемых обозначается как N^P и N^{SH} для плоских и антиплоских волн соответственно, а число волн с вещественными волновыми числами — N_r^P и N_r^{SH} . Кроме того, число членов в рядах Фурье по углу φ для функций интенсивности равняется M . Параметры r_b , N^P , N^{SH} , M взаимосвязаны и выбираются исходя из требуемой точности решения, а также зависят от сложности формы области Ω . Рекомендации по их выбору приводятся далее в разделе 3.

Решение в неоднородной части волновода D^F представляется в виде суммы вспомогательных решений $\mathbf{v}_{n,m}^F$ и $\mathbf{v}_0^F$ с неизвестными коэффициентами $\mathbf{c} = (c_{1,-M}, \dots, c_{1,M}, c_{2,-M}, \dots, c_{N^P+N^{SH},M})^T$, совпадающими с аналогичными неизвестными в соотношениях (7):

$$\mathbf{v}^F(r, \varphi, z) = \mathbf{v}_0^F(r, \varphi, z) + \sum_{n=1}^{N^P+N^{SH}} \sum_{m=-M}^M c_{n,m} \mathbf{v}_{n,m}^F(r, \varphi, z). \quad (8)$$

Вспомогательное решение $\mathbf{v}_0^F(r, \varphi, z)$ описывает приток волновой энергии в упругий слой от источника колебаний, а сумма решений $\mathbf{v}_{n,m}^F(r, \varphi, z)$ соответствует ее переносу из области D^F на бесконечность. Представления (6) и (8), соответствующие областям D^A и D^F , справедливы не только для поля смещений $\mathbf{v}$, но и для всех компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ в цилиндрической системе координат.

Краевые задачи, которым отвечают вспомогательные решения $\mathbf{v}_0^F$ и $\mathbf{v}_{n,m}^F$, формулируются таким образом, чтобы сумма (8) удовлетворяла исходной краевой задаче (например, (1), (2) и (5)). На боковой поверхности цилиндра ($r = r_b$) условия могут задаваться либо на вектор смещений, либо на вектор напряжений, либо на их комбинацию. В предыдущих работах [30, 32] для случая плоской деформации граничные условия определялись на основе соотношений ортогональности бегущих волн. В настоящей работе они формулируются исходя из выражения для энергии E , переносимой упругими волнами через боковую поверхность цилиндра и усредненной за период $T = 2\pi/\omega$ в поле гармонических колебаний $\mathbf{v}e^{-i\omega t}$ [39]:

$$E = -\frac{\sigma}{2} \operatorname{Im}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \int_{-h}^0 \int_0^{2\pi} v_r \sigma_{rr}^* + v_\varphi \sigma_{r\varphi}^* + v_z \sigma_{rz}^* d\varphi dz, \quad r = r_b. \quad (9)$$

Здесь символ «*» обозначает комплексное сопряжение. Поля смещений и напряжений на боковой поверхности цилиндра D^F связаны соотношениями линейной теории упругости:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(v_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \quad \sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).$$

Для дальнейших выкладок вводятся следующие обозначения в рамках аналитического представления (6):

$$\mathbf{v}^A(r, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{N^P+N^{SH}} \sum_{m=-M}^M c_{n,m} \mathbf{v}_{n,m}^A(r, \varphi, z), \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_{n,m}^A(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} A_{r,n,m}^P(r) P_n(z) \\ A_{\varphi,n,m}^P(r) P_n(z) \\ A_{z,n,m}^P(r) R_n(z) \end{pmatrix} e^{im\varphi}, \quad \text{при } n \leq N^P, \quad \mathbf{v}_{n,m}^A(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} A_{r,n,m}^{SH}(r) N_n(z) \\ A_{\varphi,n,m}^{SH}(r) N_n(z) \\ 0 \end{pmatrix} e^{im\varphi}, \quad \text{при } n > N^P.$$

Соотношение (6) и представление (10) используются для определения компонент вектор-функции напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{n,m}^A$ на боковой поверхности цилиндра D^F . Краевые задачи для получения вспомогательных решений $\mathbf{v}_0^F$ и $\mathbf{v}_{n,m}^F$ в случае модельной задачи (1), (2), (5) включают уравнения Ламе (1) во всех внутренних точках цилиндра D^F , а также следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_0^F(r, \varphi, z)|_{r=r_b} &= \mathbf{0}, & \boldsymbol{\sigma}_{n,m}^F(r, \varphi, z)|_{r=r_b} &= \boldsymbol{\sigma}_{n,m}^A(r, \varphi, z), \\ \boldsymbol{\sigma}_0^F(r, \varphi, z)|_{z=0} &= \mathbf{q}(r \cos \varphi, r \sin \varphi), & \boldsymbol{\sigma}_{n,m}^F(r, \varphi, z)|_{z=0} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\sigma}_0^F(r, \varphi, z)|_{z=-h} &= \mathbf{0}, & \boldsymbol{\sigma}_{n,m}^F(r, \varphi, z)|_{z=-h} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для краевой задачи (1)–(4) во внутренних точках области D^F используются уравнения (1) и (3). Механические граничные условия на внешних поверхностях цилиндра в случае погруженного актуатора имеют вид:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_0^F(r, \varphi, z)|_{r=r_b} &= \mathbf{0}, & \boldsymbol{\sigma}_{n,m}^F(r, \varphi, z)|_{r=r_b} &= \boldsymbol{\sigma}_{n,m}^A(r, \varphi, z), \\ \boldsymbol{\sigma}_0^F(r, \varphi, z)|_{z=-h} &= \mathbf{0}, & \boldsymbol{\sigma}_{n,m}^F(r, \varphi, z)|_{z=-h} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\sigma}_0^F(r, \varphi, z)|_{z=0} &= \mathbf{0}, & \boldsymbol{\sigma}_{n,m}^F(r, \varphi, z)|_{z=0} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (12)$$

На границе раздела погруженного актуатора и цилиндра, как и ранее, предполагается выполнение условий непрерывности векторов смещений и напряжений. Для поверхностного актуатора условия (12) модифицируются с учетом его расположения на верхней поверхности цилиндра: внешние поверхности актуатора считаются свободными от механических напряжений, а на границах его контакта с волноводом задаются условия непрерывности векторов смещений и напряжений.

Электрические граничные условия (4) для вспомогательных задач принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0^F \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{D}_{n,m}^F \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega^U, \\ \phi_0^F &= 0, & \phi_{n,m}^F &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega^G, \\ \phi_0^F &= V_{pzt}, & \phi_{n,m}^F &= 0, & \mathbf{x} &\in \partial\Omega^V. \end{aligned}$$

Таким образом, решение $\mathbf{v}_0^F$ описывает возбуждение волн встроенным, частично погруженным или поверхностным актуатором вследствие разности электрических потенциалов, возникающих между участками его границы $\partial\Omega^G$ и $\partial\Omega^V$, тогда как сумма решений $\mathbf{v}_{n,m}^F$ по всем m моделирует передачу волновой энергии во внешнюю область D^A для моды с номером n .

Сформулированные краевые задачи для области D^F обеспечивают непрерывность вектора напряжений при переходе от суммы численных решений вида (8) к аналитическим представлениям (10). Для построения численного решения можно прибегать к любому КЭ-пакету, поддерживающему мультифизическое моделирование. В данной работе применяется COMSOL Multiphysics. Неизвестные коэффициенты с определяются из условия непрерывности вектора смещений на боковой поверхности цилиндра $r = r_b$, имеющего следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{N^P+N^{SH}} \sum_{m=-M}^M c_{n,m} \mathbf{v}_{n,m}^A = \mathbf{v}_0^F + \sum_{n=1}^{N^P+N^{SH}} \sum_{m=-M}^M c_{n,m} \mathbf{v}_{n,m}^F. \quad (13)$$

Дискретизация соотношения (13) может быть выполнена разными способами. В настоящей работе применяется метод Галеркина, где в качестве проекторов используются вектор-функции напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{k,l}^A(r, \varphi, z)$, $k = \overline{1, N^P+N^{SH}}$, $l = \overline{-M, M}$, введенные ранее при постановке краевых задач (11). С учетом обозначения скалярного произведения на боковой поверхности цилиндра (9) условие (13) приводится к виду:

$$\sum_{n=1}^{N^P+N^{SH}} \sum_{m=-M}^M c_{n,m} [(\mathbf{v}_{n,m}^A, \boldsymbol{\sigma}_{k,l}^A) - (\mathbf{v}_{n,m}^F, \boldsymbol{\sigma}_{k,l}^A)] = (\mathbf{v}_0^F, \boldsymbol{\sigma}_{k,l}^A).$$

Полученные соотношения образуют систему линейных алгебраических уравнений размерности $(2M+1)(N^P+N^{SH}) \times (2M+1)(N^P+N^{SH})$:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f}. \quad (14)$$

Матрицы системы $\mathbf{A}$ и векторы правой части $\mathbf{f}$ записываются как

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{B}, \quad d_{ij} = (\mathbf{v}_{n,m}^A, \boldsymbol{\sigma}_{k,l}^A), \quad b_{ij} = (\mathbf{v}_{n,m}^F, \boldsymbol{\sigma}_{k,l}^A), \quad f_i = (\mathbf{v}_0^F, \boldsymbol{\sigma}_{k,l}^A),$$

где индексы определяются соотношениями:

$$i = (2M+1)(k-1) + M+1+l, \quad j = (2M+1)(n-1) + M+1+m, \quad k, n = \overline{1, N^P+N^{SH}}, \quad l, m = \overline{-M, M}.$$

После нахождения из системы (14) вектора с решением исходной краевой задачи представляется в виде суммы бегущих волн (6), (10) для точек, расположенных вне области D^F , либо в виде суммы решений вспомогательных задач (8) для точек, принадлежащих области D^F .

3. Численная верификация гибридной схемы

Численная верификация предлагаемой гибридной схемы осуществляется на решении краевой задачи (1), (2) и (5), описывающей гармонические колебания алюминиевой пластины под действием поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, являющейся системой трех разнонаправленных точечных сил (Рис. 2):

$$\mathbf{q}(x_1, x_2) = P_0 \begin{pmatrix} \delta_1(x_1, x_2) + \delta_2(x_1, x_2) \\ -\delta_1(x_1, x_2) + \delta_2(x_1, x_2) \\ 3\delta_1(x_1, x_2) - \delta_3(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \delta_1(x_1, x_2) &= \delta(x_1^{(1)} - x_1) \delta(x_2^{(1)} - x_2), \\ \delta_2(x_1, x_2) &= \delta(x_1^{(2)} - x_1) \delta(x_2^{(2)} - x_2), \\ \delta_3(x_1, x_2) &= \delta(x_1^{(3)} - x_1) \delta(x_2^{(3)} - x_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = (1, 1)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = (-2, 0.5)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) = (0.5, -1.5)$ — точки приложения компонент нагрузки на верхней поверхности волновода ($x_3 = z = 0$). Размерный коэффициент в соотношении (15) принимается равным $P_0 = 10^{-3}$ ГПа.

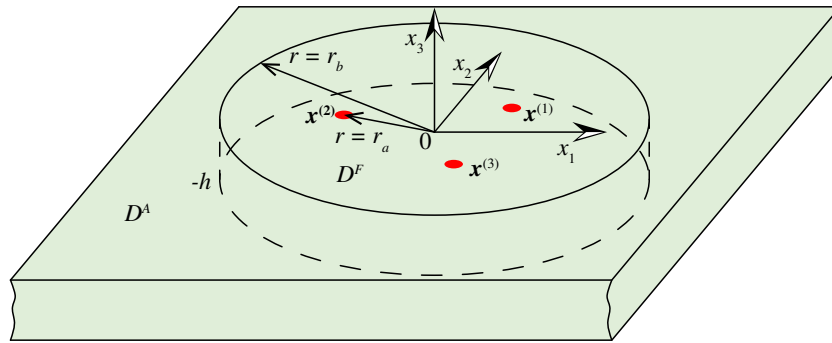


Рис. 2. Схематическое изображение геометрии модельной задачи для верификации

В данном и последующих тестовых примерах упругий алюминиевый слой характеризуется следующими параметрами: модуль Юнга $E = 72$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.32$, плотность $\rho = 2.7$ г/см³, толщина $h = 2$ мм. Дисперсионные кривые для рассматриваемого волновода приведены на рисунке 3. Сплошными линиями показаны либо вещественные волновые числа ζ , либо чисто мнимые значения ζ , тогда как пунктирные линии соответствуют волновым числам, имеющим и вещественную, и мнимую части.

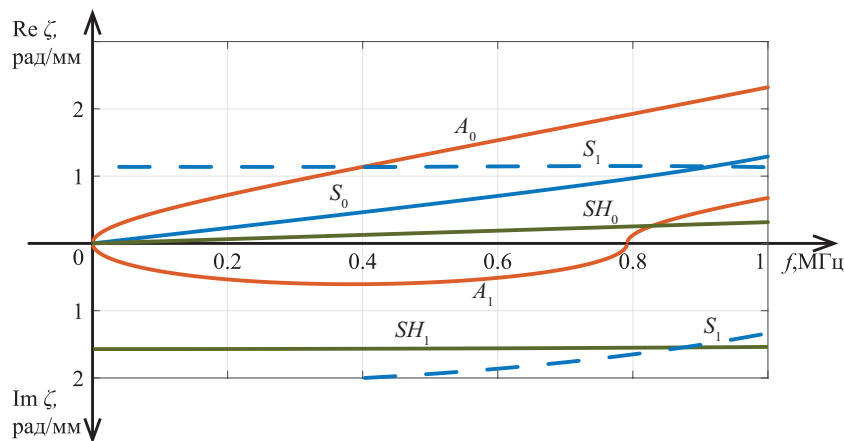


Рис. 3. Зависимость вещественных и ближайших комплексных волновых чисел ζ от частоты $f = \omega/2\pi$ для рассматриваемой алюминиевой пластины

Решение задачи (1)–(5) может быть построено разными способами. В настоящем разделе для сопоставления приводятся численные результаты, полученные на основе трех подходов: по предлагаемой гибридной численно-аналитической схеме, МКЭ с идеально согласованными слоями (МКЭ-ИСС) [10, 11], на основе интегрального подхода [33–35].

В рамках интегрального подхода решение представляется в виде:

$$\mathbf{u}^{Int}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (16)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -i(\alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N) & -i\alpha_1 \alpha_2 (M - N) & -i\alpha_1 P \\ -i\alpha_1 \alpha_2 (M - N) & -i(\alpha_2^2 M + \alpha_1^2 N) & -i\alpha_2 P \\ \alpha_1 S & \alpha_2 S & R \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = P_0 \begin{pmatrix} e^{i(\alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(1)})} + e^{i(\alpha_1 x_1^{(2)} + \alpha_2 x_2^{(2)})} \\ -e^{i(\alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(1)})} + e^{i(\alpha_1 x_1^{(2)} + \alpha_2 x_2^{(2)})} \\ 3e^{i(\alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(1)})} - e^{i(\alpha_1 x_1^{(3)} + \alpha_2 x_2^{(3)})} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, z)$ — Фурье-символ матрицы Грина для задачи о гармонических колебаниях изотропного слоя; $\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ — Фурье-трансформанта вектора поверхностной нагрузки $\mathbf{q}(x_1, x_2)$ из граничных условий (5). Явные выражения для функций M , N , P , S и R , используемых при построении элементов матрицы Грина $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, z)$, а также решений вида (6) и (8) приведены в работе [35].

Решение (16) при заданной относительной погрешности интегрирования (10^{-4}) принимается в качестве эталонного. Для количественного сопоставления результатов удобно использовать относительную разность значений модуля вектора смещений, представленную в логарифмическом масштабе:

$$\eta = \log_{10} \left(\frac{|u - u^{Int}|}{|u^{Int}|} \right), \quad u = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2}.$$

Под $u(x_1, x_2, x_3)$ здесь и далее понимается модуль вектора смещений, вычисленного либо по гибридной численно-аналитической схеме, либо с использованием МКЭ-ИСС. При этом оба решения получаются при одинаковых параметрах КЭ-дискретизации и аппроксимации. В качестве КЭ используются прямые треугольные призмы. Их размеры выбираются таким образом, чтобы на длину волны фундаментальной антисимметричной моды A_0 на рассматриваемой частоте колебаний приходилось не менее 16 степеней свободы, а по толщине волновода — не менее трех КЭ. Степень аппроксимационных полиномов принимается равной 3 (Cubic serendipity в обозначениях COMSOL Multiphysics). Ширина идеально согласованного слоя при построении решения МКЭ-ИСС имеет следующее значение: $r_{PML} = 5$ мм.

Для построения решения с помощью гибридной схемы необходимо знать три группы параметров:

- число M удерживаемых слагаемых в рядах Фурье для функций интенсивности (7);
- радиус границы раздела области с неоднородностью D^F и однородной частью волновода $r_b = r_a + r_\lambda \lambda_{A0}$, где $r_a = |\mathbf{x}^{(2)}|$ — длина радиус-вектора наиболее удаленной точки приложения нагрузки $\mathbf{x}^{(2)}$, r_λ — варьируемый коэффициент, а λ_{A0} — длина волны моды A_0 ;
- число удерживаемых нормальных мод $N^P = N_r^P + N_c^P$ и $N^{SH} = N_r^{SH} + N_c^{SH}$, в представлениях в виде сумм числа волн с вещественными (N_r^P и N_r^{SH}) и комплексными (N_c^P и N_c^{SH}) волновыми числами. При этом учитываются моды с наименьшими значениями мнимой части волнового числа, удовлетворяющие условию: $|\text{Im}\zeta| < I_\zeta$.

Для определения значений указанных параметров анализируется распределение относительной погрешности η (Рис. 4) вдоль прямой, расположенной внутри волновода и соединяющей точки $(0,0,0)$ и $(50,0,-2)$. Погрешность рассматривается как функция длины отрезка l , отсчитываемой от начала координат. Графиком слева (Рис. 4а, в, д) соответствует частота $f = \omega/2\pi = 300$ кГц, графиком справа (Рис. 4б, г, е) — частота $f = 900$ кГц.

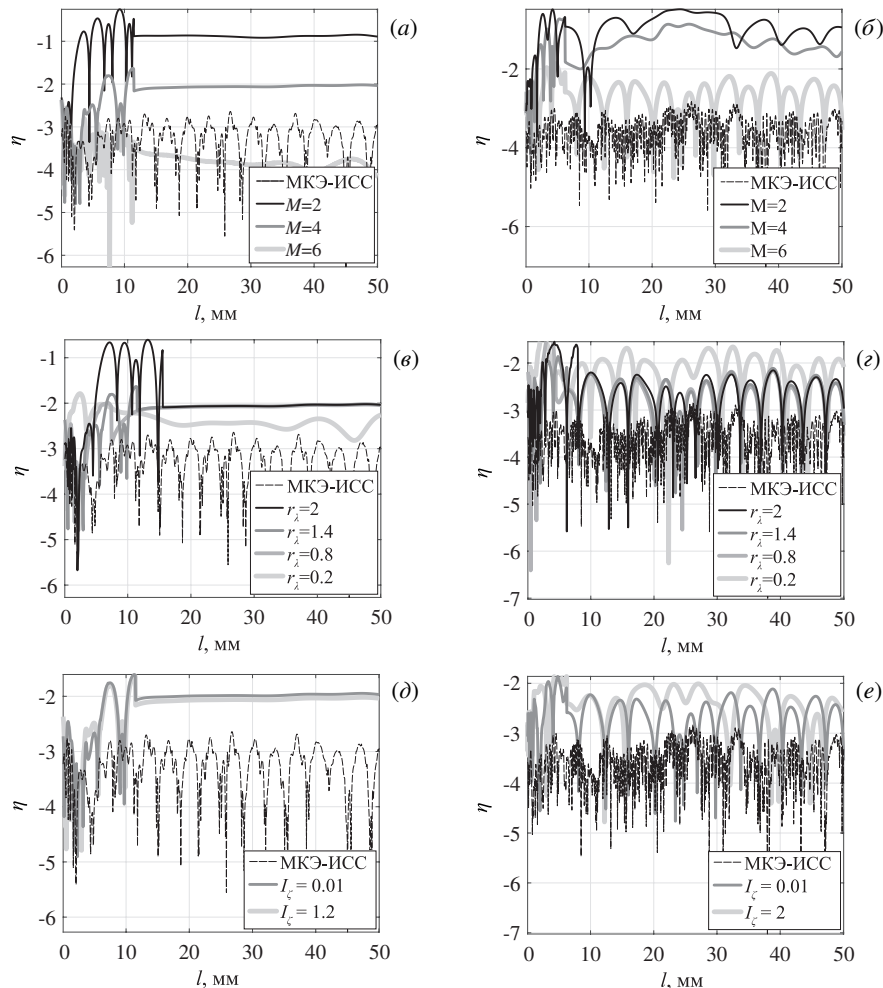


Рис. 4. Относительная погрешность η для гибридной схемы и МКЭ-ИСС на частоте $f = 300$ кГц (а, в, д) и на частоте $f = 900$ кГц (б, г, е), вычисленная вдоль прямой, начинающейся в точке $(0,0,0)$ и заканчивающейся в точке $(50,0,-2)$, в зависимости от длины отрезка l

Верхняя пара графиков (Рис. 4а, б) построена при фиксированных значениях параметров $r_\lambda = 1.4$, $I_\zeta = 1.2$ рад/мм и варьируемом числе M членов ряда Фурье. С увеличением M точность решения заметно возрастает как в области D^F , $l < r_b$, так и в оставшейся однородной части волновода. Важно, что для рисунка 4а граница раздела соответствует $r_b \approx 11.5$ мм. Начиная с некоторого значения M , точность гибридной

численно-аналитической схемы в среднем становится выше, чем точность решения МКЭ-ИСС (например, см. график при $M = 6$, Рис. 4а). В полученных численных результатах заметна граница раздела r_b между областями численного и аналитического решений, на которой наблюдается скачок η . В однородной части волновода ($l > r_b$) на рисунке 4а значение η практически не изменяется и в среднем оказывается меньше 10^{-2} при $M \geq 4$. Следует отметить, что увеличение M приводит к росту числа численных решений $\mathbf{v}_{n,m}^F$ в представлении (8), что существенно увеличивает вычислительные, в первую очередь временные, затраты при определении неизвестных коэффициентов c , а также при вычислении искомых величин внутри области D^F . В дальнейшем при использовании гибридной численно-аналитической схемы значения параметров M , r_λ и I_ζ выбираются таким образом, чтобы средние значения относительной погрешности η не превышали 10^{-2} . При этом на частоте $f = 900$ кГц (Рис. 4б) приемлемый уровень погрешности достигается при $M \geq 6$.

Средняя пара графиков (Рис. 4в, г) построена при варьировании параметра r_λ и фиксированных значениях $M = 4$ (Рис. 4в), $M = 6$ (Рис. 4г), а также постоянном $I_\zeta = 1.2$ рад/мм. Параметры I_ζ и r_λ взаимосвязаны, поскольку амплитуды волн Лэмба и SH-волн (7) зависят от функций Ханкеля вида $H_m^{(1)}(\zeta r)$. При увеличении значения r_b моды с комплексными ζ экспоненциально затухают, что позволяет пренебречь ими и уменьшить число учитываемых членов разложения (6) до чисто вещественных нормальных мод. Однако при дальнейшем возрастании r_b точность решения, начиная с некоторого порогового значения, ухудшается. Это наблюдается на рисунке 4в при $l < 15$ мм и на рисунке 4г при $l < 9$ мм в области D^F . Кроме того, при сравнительно малых значениях r_λ точность решения также снижается (Рис. 4з), поскольку в этом случае требуется больше членов ряда Фурье (M) и мод с комплексными волновыми числами. При этом просматривается сходство поведения погрешности для значений $r_\lambda = 1.4$ и $r_\lambda = 0.8$, особенно вне цилиндрической области D^F .

Последняя пара графиков (Рис. 4д, е) получена при варьировании параметра I_ζ и фиксированных значениях $M = 4$ (Рис. 4д) и $M = 6$ (Рис. 4е); при этом $r_\lambda = 1.4$ для обоих случаев. При $I_\zeta = 0.01$ рад/мм волны с комплексными волновыми числами на рассматриваемых частотах не учитываются, то есть $N_c^P = 0$ и $N_c^{SH} = 0$. В соответствии с дисперсионными кривыми (Рис. 3), при $I_\zeta = 1.2$ рад/мм на частоте $f = 300$ кГц дополнительно принимается во внимание антисимметричная волна A_1 с чисто мнимым волновым числом, а на частоте $f = 900$ кГц — моды SH_1 и S_1 . При $r_\lambda = 1.4$ и $M = 4$ (Рис. 4д) относительная погрешность незначительно уменьшается при учете дополнительной моды, тогда как на рисунке 4е среднее значение погрешности, напротив, несколько возрастает при учете дополнительных мод.

Таким образом, согласно принятому в настоящей работе требованию к величине относительной погрешности (10^{-2}), оптимальным является сочетание параметров $r_\lambda = 1.4$ или $r_\lambda = 1$ с $I_\zeta = 0.01$. Параметр M при этом изменяется в зависимости от частоты. В рассматриваемых численных экспериментах используются следующие значения: при $f \in [0, 500]$ кГц принимается $M = 4$, при $f \in (500, 750]$ кГц — $M = 5$, а при $f \in (750, 1000]$ кГц — $M = 6$.

Для дополнительной иллюстрации корректности работы предлагаемой гибридной схемы приведены результаты расчета полей модуля вектора смещений u и относительной погрешности η вдоль горизонтального (Рис. 5) и

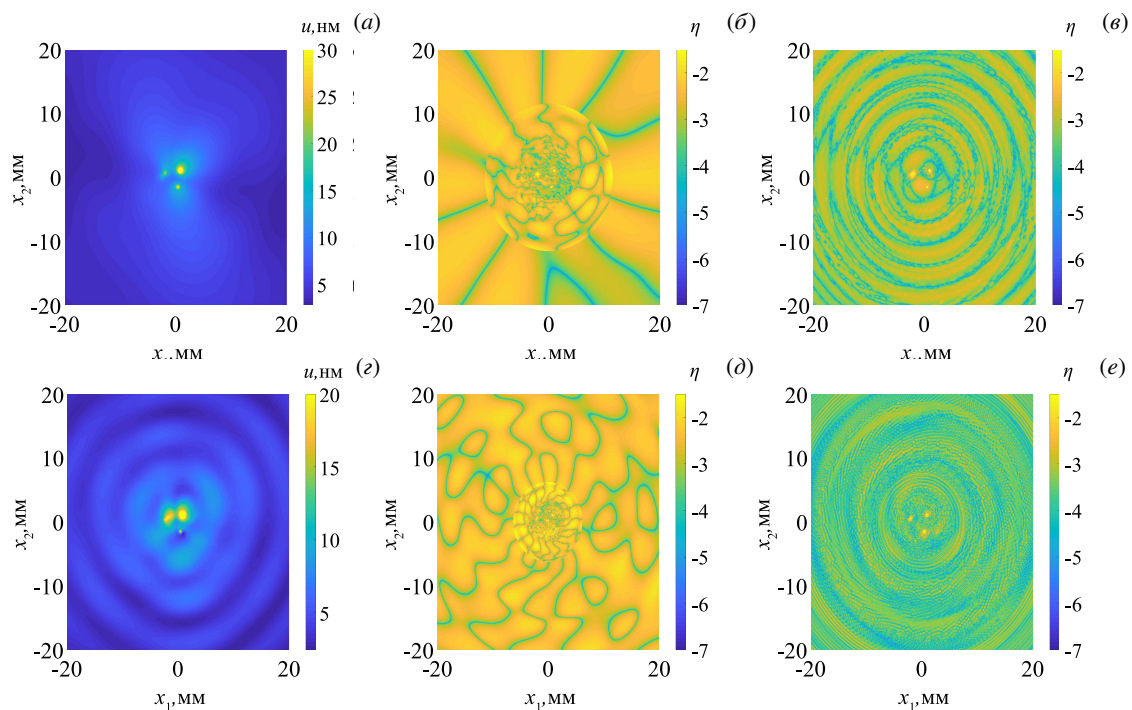


Рис. 5. Поля модуля вектора смещений u (а, г) и относительной погрешности η (б, в, д, е) в горизонтальном сечении волновода плоскостью $x_3 + 0.3 = 0$ мм на частоте 300 кГц (а–в) и частоте 900 кГц (г–е); результаты (а, б, г, д) получены с использованием гибридной схемы, (в, е) — МКЭ-ИСС

вертикального (Рис. 6) сечений волновода, соответственно, плоскостями $x_3 + 0.3 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$. В показанных сечениях отчетливо выделяется область численной аппроксимации D^F : в горизонтальном сечении она имеет форму круга радиуса r_b (Рис. 5б, д), а в вертикальном — прямоугольника шириной r_b (Рис. 6б, д); наличие области проявляется в скачкообразном изменении значений η . При этом на распределениях модуля вектора смещений u соответствующие границы практически не видны (Рис. 5а, з).

В целом результаты расчета МКЭ-ИСС оказываются более точными по сравнению с гибридной численно-аналитической схемой. Отмеченный недостаток гибридной схемы компенсируется существенным уменьшением размера расчетной области D^F и, следовательно, значительным сокращением требований к оперативной памяти при компьютерном моделировании. Например, для рассматриваемой в данном разделе задачи об установившихся

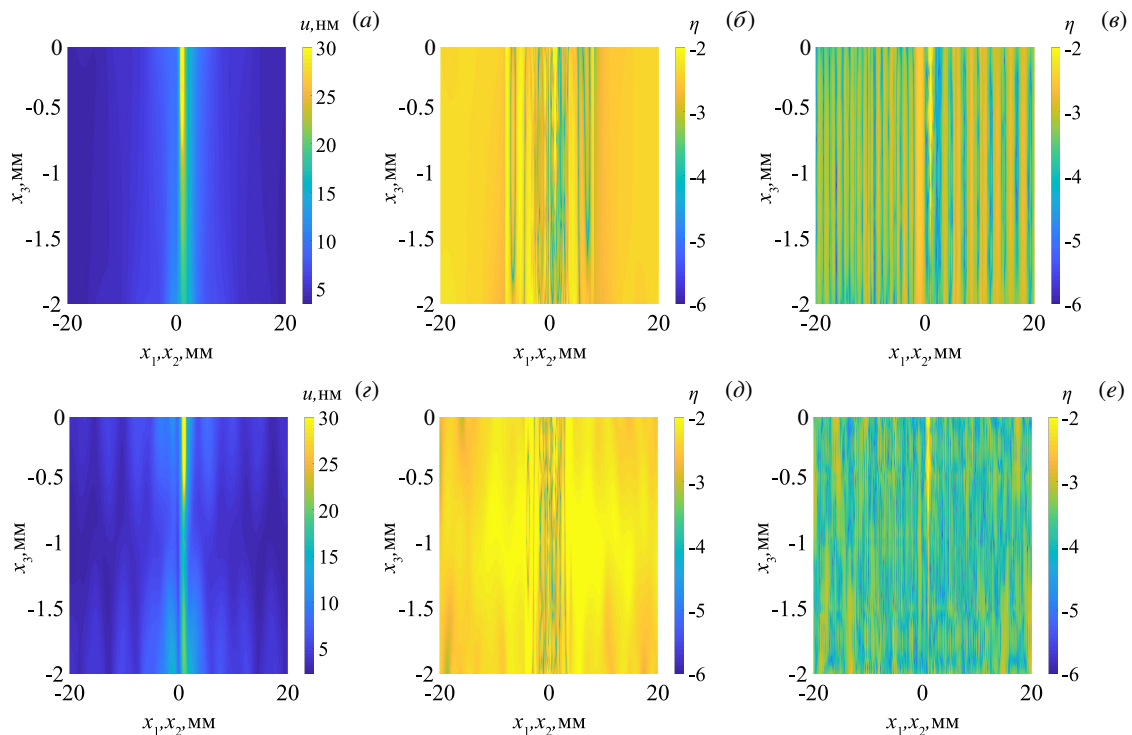


Рис. 6. Поля модуля вектора смещений u (а, з) и относительной погрешности η (б, в, д, е) в вертикальном сечении волновода плоскостью $x_1 - x_2 = 0$ на частотах 300 кГц (а–в) и 900 кГц (з–е); результаты (а, б, з, д) получены с использованием гибридной схемы, (в, е) – МКЭ-ИСС

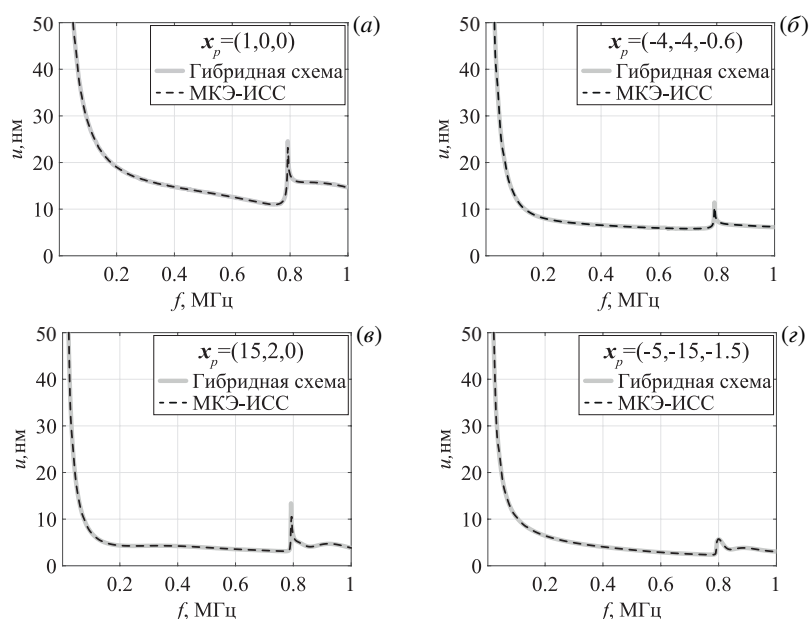


Рис. 7. Спектр модуля вектора смещений u для гибридной численно-аналитической схемы (сплошная линия) и МКЭ-ИСС (пунктирная линия) в разных точках волновода x_p

гармонических колебаниях изотропного упругого слоя при расширении расчетной области до 50 мм (Рис. 4б), частоте $f = 900$ кГц и сохранении ранее введенных параметров КЭ-сетки требуется более десяти миллионов степеней свободы для построения численного решения посредством МКЭ-ИСС. В этом случае выделяется цилиндрическая область радиуса 56 мм, внутри которой обособливается кольцо шириной $r_{PML} = 5$ мм для идеально согласованного слоя. Соответствующая модель, реализованная в среде COMSOL Multiphysics, в оперативную память объемом 64 Гб не помещается. В то же время при использовании гибридной схемы требуется получить набор решений вида (8) лишь в цилиндрической области D^F радиуса $r_b \approx 6.2$ мм для рассматриваемой частоты. Тогда число степеней свободы составляет около 134000 для вспомогательного решения $\mathbf{v}_0^F$ и около 94000 для решений $\mathbf{v}_{n,m}^F$, что позволяет запускать соответствующие МКЭ-модели даже на персональных компьютерах потребительского уровня. При этом вне области D^F применяется аналитическое разложение (6), которое сохраняет высокую точность на сколь угодно больших расстояниях от ее границ (Рис. 4). Кроме того, вычислительные затраты на расчет значений смещений, напряжений и другого с использованием аналитического решения в отдельной точке оказываются значительно ниже, чем при решении МКЭ-ИСС.

Помимо результатов на фиксированных частотах для сопоставления получены данные численного моделирования посредством МКЭ-ИСС и по гибридной схеме в широком диапазоне частот (Рис. 7). На рисунке показана зависимость модуля вектора смещений u от частоты f для разных точек $\mathbf{x}_p$. Точки располагаются как на поверхности волновода, так и внутри него. Кроме того, некоторые точки находятся в области D^F , а при увеличении частоты попадают в область D^A , так как $r_b = r_a + r_\lambda \lambda_{A0}$. Результаты, установленные на основе двух подходов, практически полностью совпадают. В области около 800 кГц наблюдается резкий рост значений u , связанный с частотой отсечки моды A_1 (Рис. 3).

4. Возбуждение бегущих упругих волн пьезоактуатором

Рассматривается задача о возбуждении бегущих упругих волн в изотропном слое пьезокерамическим актуатором Ω , имеющим форму прямоугольного параллелепипеда (Рис. 1) или цилиндра. Прямоугольный параллелепипед может располагаться внутри волновода ($\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leq w_x/2, |x_2| \leq w_y/2, z_{pzt} - w_z \leq x_3 \leq z_{pzt}\}$) (Рис. 8а) или на его внешней верхней горизонтальной поверхности ($\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : |x_1| \leq w_x/2, |x_2| \leq w_y/2, 0 \leq x_3 \leq z_{pzt} = w_z\}$) (Рис. 8б). В случае, если актуатор имеет форму цилиндра, его расположение описывается в следующем виде: $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq r_a^2, z_{pzt} - w_z \leq x_3 \leq z_{pzt}\}$.

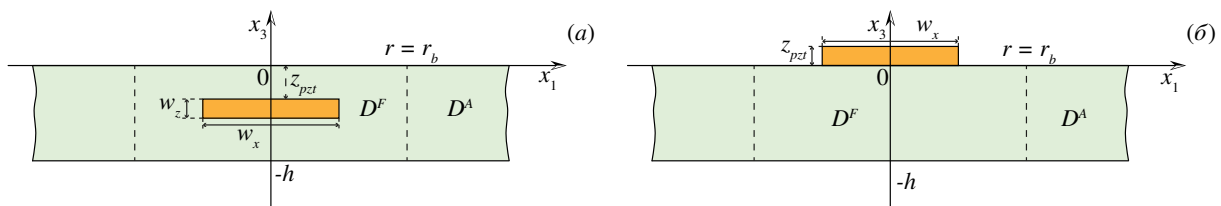


Рис. 8. Схематичное изображение вертикального сечения волновода с нормалью, параллельной оси Ox_2 , с погруженным (а) и поверхностным (б) актуаторами

Формулировка краевой задачи состоит из уравнений Ламе для точек упругого слоя (1), уравнений линейной электроупругости (3) для области Ω , механических граничных условий на свободных поверхностях волновода (2) и электрических граничных условий (4). Для погруженного актуатора дополнительно накладываются условия непрерывности векторов перемещений и напряжений на всех границах раздела между актуатором и волноводом. В случае поверхностного актуатора на его грани $\partial\Omega^W$ задаются условия непрерывности векторов перемещений и напряжений, а остальные грани считаются свободными от механических напряжений.

В качестве материала источника колебаний рассматривается пьезокерамика PZT-5Н [40], имеющая вертикальное направление поляризации (вдоль оси Ox_3). Во всех обсуждаемых далее случаях на верхнюю поверхность актуатора $\partial\Omega^V$ подается электрическое напряжение $V_{pzt} = 70$ В, а нижняя грань $\partial\Omega^G$, совпадающая с $\partial\Omega^W$, заземлена. На боковых сторонах как круглого, так и квадратного пьезоэлементов электрические смещения отсутствуют. Геометрические параметры актуатора в форме прямоугольного параллелепипеда имеют следующие значения: ширина $w_x = 10$ мм, длина $w_y = 10$ мм, высота $w_z = 0.5$ мм. Для цилиндрического источника колебаний радиус составляет $r_a = 5$ мм, высота — $w_z = 0.5$ мм. Встроенные актуаторы располагаются в середине слоя: $z_{pzt} = (w_z - h)/2 = -0.75$ мм.

Выбор численно анализируемой величины и области наблюдения обусловлен возможностью последующей верификации результатов в экспериментальных исследованиях. На рисунках 9–11 представлены картины полей модуля вектора перемещений $u(\mathbf{x})$ в координатах частоты f и полярного угла φ . Отдельные нормальные моды A_0 , S_0 и SH_0 выделены из суммарного поля в соответствии с соотношениями (6).

Приведенные на рисунке 9а амплитуды полного модуля перемещений для поверхностного пьезоактуатора прямоугольной формы сопоставимы с амплитудами отдельных мод (Рис. 9б–г), что свидетельствует о возбуждении всех фундаментальных волн в рассматриваемом частотном диапазоне $f \in [2, 500]$ кГц. В диапазоне до 250 кГц амплитуда u слабо зависит от угла φ и для фиксированной частоты практически постоянна. При увеличении

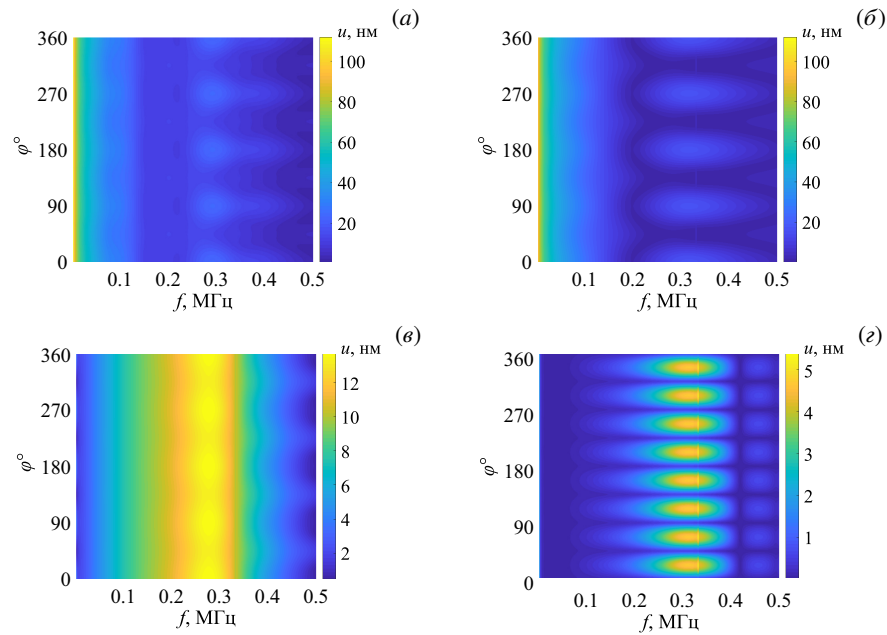


Рис. 9. Поля модуля вектора смещений $u(\mathbf{x})$, рассчитанные вдоль окружности радиуса $r = 50$ мм с центром в начале координат на верхней поверхности волновода в зависимости от частоты колебаний f и полярного угла φ : поле общего модуля вектора смещений (а); поле модуля вектора смещений, порождаемое модами A_0 (б), S_0 (в), SH_0 (г); источник колебаний – поверхностный прямоугольный пьезоактуатор

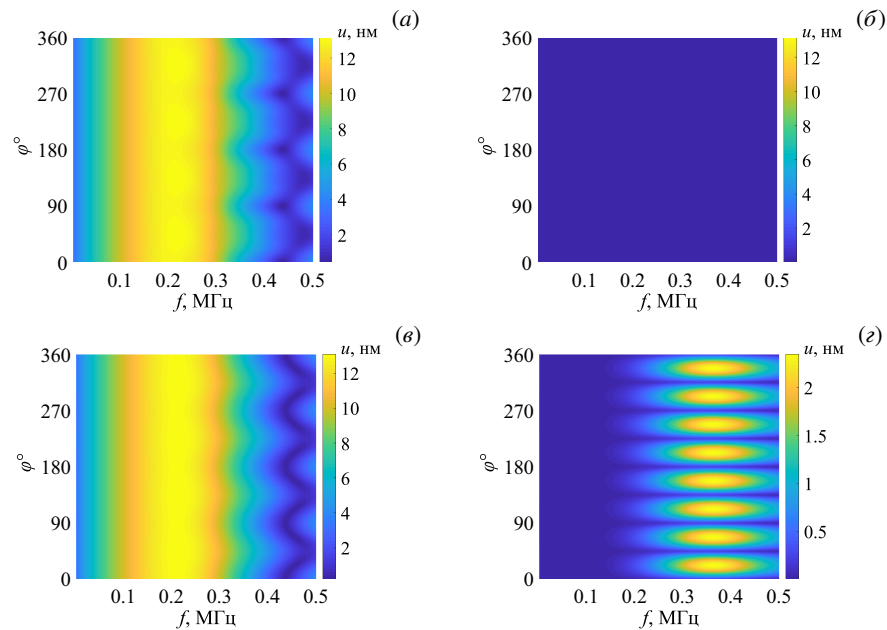


Рис. 10. Поля модуля вектора смещений $u(\mathbf{x})$ при встроенном прямоугольном пьезоактуаторе

частоты (свыше 250 кГц) в распределении появляются локализованные максимумы: сначала в виде отдельных областей (до 330 кГц), затем как полос выраженного направления. Максимальные значения амплитуды достигаются при $\varphi = \{0, 90, 180, 270\}^\circ$, что соответствует направлениям, совпадающим с серединами сторон прямоугольного актуатора.

Форма распределения полного модуля (Рис. 9а) качественно соответствует картине для антисимметричной моды A_0 (Рис. 9б), что указывает на ее доминирующий вклад в рассматриваемом диапазоне частот. Мода S_0 (Рис. 9в) излучается более равномерно; ее локальные максимумы либо совпадают с максимумами A_0 (например, в области около 280 кГц), либо смещены на 45° ($\varphi = \{45, 135, 225, 315\}^\circ$). Существенный вклад моды S_0 наблюдается в диапазонах 150–250 кГц и выше 350 кГц.

Антиплоская мода SH_0 начинает вносить заметный вклад при частотах свыше 350 кГц. При этом число максимумов амплитуды для данной моды вдвое превышает соответствующее число для волн Лэмба, а их угловое распределение характеризуется шагом 45° . Минимумы амплитуды располагаются в направлениях, соответствующих углам и серединам сторон актуатора, что, вероятно, связано с геометрическими особенностями

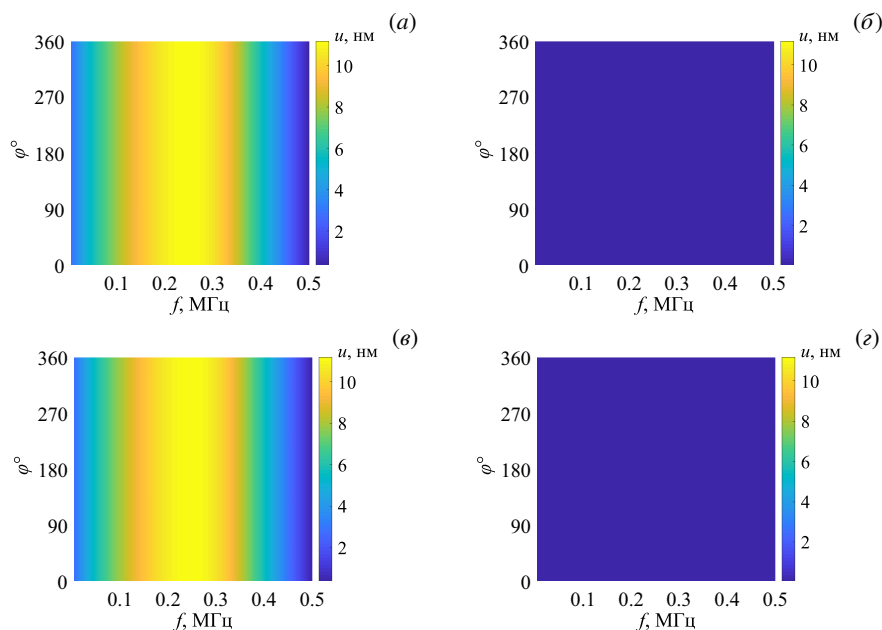


Рис. 11. Поля модуля вектора смещений $u(x)$ при встроенном пьезоактуаторе в форме цилиндра

источника колебаний. В случае погруженного кругового пьезоактуатора угловые точки отсутствуют: мода SH_0 не возбуждается, что подтверждается результатами, представленными на рисунке 11г.

Численные результаты для погруженных пьезокерамических актуаторов (Рис. 10 и 11) в целом качественно согласуются между собой, за исключением ряда особенностей. В обоих случаях наблюдается отсутствие возбуждения фундаментальной антисимметричной моды A_0 во всем рассматриваемом частотном диапазоне (Рис. 10б, Рис. 11б). Такое поведение обусловлено симметричным расположением пьезоактуатора относительно средней плоскости волновода, а также его вертикальной поляризацией. Нарушение указанной симметрии (например, при смещении актуатора по толщине) приводит к порождению антисимметричных мод. Дополнительный интерес представляет сопоставление порядков величин возникающих волн при более детальном учете геометрии электродированных поверхностей актуатора, а также при моделировании подводящих проводов, но проведение подобных исследований не входит в цели данной работы. Следует также отметить, что антиплоская мода SH_0 не возбуждается цилиндрическим актуатором (Рис. 11г). В этом случае в рассматриваемом частотном диапазоне зарождаются исключительно симметричные волны — моды S_0 . При этом амплитуда модуля вектора перемещений практически не зависит от угла φ . Указанные селективные свойства встроенного цилиндрического источника колебаний могут быть полезными при поиске дефектов, чувствительных к симметричным модам.

При встроенном прямоугольном актуаторе (Рис. 10) зависимость $u(x)$ от угла φ становится заметной при частотах выше 180 кГц. До указанной границы актуатор выбранных размеров генерирует волны практически аналогично цилиндрическому источнику колебаний сопоставимых размеров. При частотах свыше 180 кГц размеры актуатора становятся соизмеримыми с длиной волны S_0 , что с дальнейшим ростом частоты приводит к чередованию максимумов амплитуды: в одних диапазонах они совпадают с направлениями, соответствующими серединам сторон актуатора (например, в диапазоне 450–500 кГц), тогда как в других — с направлениями, соответствующими его углам (например, в диапазоне 250–450 кГц). Кроме того, на более высоких частотах становится заметным вклад моды SH_0 в суммарный отклик. Пространственное распределение максимумов и минимумов для данной моды качественно согласуется с результатами, полученными для поверхностного актуатора (Рис. 9).

Следует отметить, что подобный анализ численных результатов в рамках МКЭ-решений возможен лишь частично. Для корректного выделения вкладов отдельных мод требуется их дополнительная постобработка с использованием разложения вида (6), но при протяженной области D^F [13].

5. Заключение

В работе предложена адаптация гибридной численно-аналитической схемы [30–32] к моделированию колебаний упругого изотропного слоя, поверхностным или встроенным источником. Основное преимущество предлагаемой схемы заключается в том, что она позволяет использование стандартных программ для МКЭ-анализа. Указанная особенность делает данную схему эффективным инструментом для исследования характеристик излучения бегущих упругих волн как встроенными, так и поверхностными пьезоактивными элементами.

Предлагаемая схема верифицирована путем сопоставления численных результатов решения модельной задачи с результатами, полученными с помощью других подходов: полуаналитическим интегральным подходом и МКЭ-ИСС. Определены оптимальные соотношения между параметрами гибридной схемы, используемыми при решении задачи в однородной части волновода. Проведен анализ особенностей генерирования бегущих волн

встроенным и поверхностным пьезокерамическими источниками колебаний, имеющими форму прямоугольного параллелепипеда и цилиндра. Показано, что в зависимости от формы и расположения источника реализуется селективное возбуждение различных мод: исключительно симметричных волн Лэмба (для цилиндрического погруженного актуатора), симметричных S-волн и антиплоских SH-волн (для встроенного прямоугольного актуатора), либо полного набора фундаментальных мод (для поверхностного прямоугольного актуатора). В отличие от классического МКЭ, предлагаемая гибридная схема обеспечивает естественную возможность выделения вкладов отдельных волн из суммарного поля без дополнительной постобработки. Это позволяет проводить детальный анализ волновых процессов и может применяться при оптимизации сенсорно-актуаторных сетей в рамках систем мониторинга состояния конструкций.

Предлагаемая схема может быть адаптирована к решению задач рассеяния, а также расширена на многослойные структуры. Структура построенного решения допускает рассмотрение вязкоупругих материалов, что представляет особый интерес при моделировании распространения бегущих волн в композитных средах. Кроме того, предлагаемый подход также может быть интегрирован в существующее конечно-элементное инженерное программное обеспечение.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-71-00105), (<https://rscf.ru/project/24-71-00105/>).

Литература

1. *Raghavan A., Cesnik C.E.S.* Review of Guided-wave Structural Health Monitoring // *The Shock and Vibration Digest*. 2007. Vol. 39. P. 91–114. DOI: 10.1177/0583102406075428
2. *Giurgiutiu V.* Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors, 2nd Edition. New-York: Elsevier, 2014. 1032 p. DOI: 10.1016/c2013-0-00155-7
3. *Шардаков И.Н., Шестаков А.П., Глот И.О., Гусев Г.Н., Епин В.В., Цветков Р.В.* Сравнение динамических характеристик пьезокерамических актуаторов, применяемых в вибродиагностике крупномасштабных конструкций // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2024. Т. 17, № 3. С. 376–386. DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.3.31
4. *Feng T., Aliabadi M.H.F.* Influence of placing positions of PZT transducers in thick composites on ultrasonic guided waves // *Procedia Structural Integrity*. 2024. Vol. 52. P. 785–794. DOI: 10.1016/j.prostr.2023.12.077
5. *Qi R., Wang L., Jin J., Yuan L., Shen Z., Ge Y.* An embedded piezoelectric actuator for active vibration control: Concept, modeling, simulation, and investigation // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2025. Vol. 38, no. 4. 103345. DOI: 10.1016/j.cja.2024.103345
6. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kvasha O.V., Lammering R.* Selective Lamb mode excitation by piezoelectric coaxial ring actuators // *Smart Materials and Structures*. 2010. Vol. 19, no. 3. 035018. DOI: 10.1088/0964-1726/19/3/035018
7. *Schmidt D., Sinapius M., Wierach P.* Design of mode selective actuators for Lamb wave excitation in composite plates // *CEAS Aeronautical Journal*. 2013. Vol. 4. P. 105–112. DOI: 10.1007/s13272-012-0059-3
8. *Mohammadgholiha M., Moll J., Tschöke K., Kruska C., Gebhardt S., De Marchi L.* Unidirectional Frequency-Steerable Acoustic Transducer for guided ultrasonic wave damage imaging // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2025. Vol. 229. 112505. DOI: 10.1016/j.ymssp.2025.112505
9. *Soman R., Kudela P., Balasubramaniam K., Singh S.K., Malinowski P.* A Study of Sensor Placement Optimization Problem for Guided Wave-Based Damage Detection // *Sensors*. 2019. Vol. 19, no. 8. 1856. DOI: 10.3390/s19081856
10. *Skelton E., Adams S., Craster R.* Guided elastic waves and perfectly matched layers // *Wave Motion*. 2007. Vol. 44. P. 573–592. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.03.001
11. *Berenger J.-P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *Journal of Computational Physics*. 1994. Vol. 114, no. 2. P. 185–200. DOI: 10.1006/jcph.1994.1159
12. *Moreau L., Castaings M., Hosten B., Predoi M.V.* An orthogonality relation-based technique for post-processing finite element predictions of waves scattering in solid waveguides // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2006. Vol. 120, no. 2. P. 611–620. DOI: 10.1121/1.2216563
13. *Moreau L., Castaings M.* The use of an orthogonality relation for reducing the size of finite element models for 3D guided waves scattering problems // *Ultrasonics*. 2008. Vol. 48, no. 5. P. 357–366. DOI: 10.1016/j.ultras.2008.01.005
14. *Predoi M., Castaings M., Moreau L.* Influence of material viscoelasticity on the scattering of guided waves by defects // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2008. Vol. 124, no. 5. P. 2883–2894. DOI: 10.1121/1.2977604
15. *Raghavan A., Cesnik E.S.* Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring // *Smart Materials and Structures*. 2005. Vol. 14, no. 6. P. 1448–1461. DOI: 10.1088/0964-1726/14/6/037
16. *Еремин А.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Применение пленочных пьезопреобразователей для возбуждения и регистрации бегущих упругих волн в системах активного мониторинга протяженных конструкций // *Дефектоскопия*. 2020. № 10. С. 24–38. DOI: 10.31857/s0130308220100036
17. *Lin X., Yuan F.G.* Diagnostic Lamb waves in an integrated piezoelectric sensor/actuator plate: analytical and experimental studies // *Smart Materials and Structures*. 2001. Vol. 10, no. 5. P. 907–913. DOI: 10.1088/0964-1726/10/5/307

18. *Glushkov E. V., Glushkova N. V., Kvasha O. V., Seemann W.* Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate // *Smart Materials and Structures*. 2007. Vol. 16, no. 3. P. 650–664. DOI: 10.1088/0964-1726/16/3/012
19. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А.* Распределение энергии пьезоактуатора между бегущими волнами, возбуждаемыми в упругом слое // *Прикладная механика и техническая физика*. 2015. № 6. С. 84–93. DOI: 10.15372/pmtf20150610
20. *Moulin E., Assaad J., Delebarre C., Osmont D.* Modeling of Lamb waves generated by integrated transducers in composite plates using a coupled finite element–normal modes expansion method // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2000. Vol. 107, no. 1. P. 87–94. DOI: 10.1121/1.428294
21. *Quaegebeur N., Ostiguy P.-C., Masson P.* Hybrid empirical/analytical modeling of guided wave generation by circular piezoceramics // *Smart Materials and Structures*. 2015. Vol. 24, no. 3. 035003. DOI: 10.1088/0964-1726/24/3/035003
22. *Golub M., Fomenko S., Shpak A., Gu Y., Wang Y., Zhang C.* Semi-analytical hybrid approach for modelling smart structures and guided wave-based SHM systems for a laminate with multiple delaminations and surface-mounted inhomogeneities // *Applied Mathematical Modelling*. 2023. Vol. 120. P. 812–832. DOI: 10.1016/j.apm.2023.04.017
23. *Yang C., Nakaoka J., Hirose S.* Semi-analytical FEM for modelling 3D guided waves scattering in an infinite plate // *Applied Mathematical Modelling*. 2025. Vol. 148. 116236. DOI: 10.1016/j.apm.2025.116236
24. *Benmeddour F., Treysède F., Laguerre L.* Numerical modeling of guided wave interaction with non-axisymmetric cracks in elastic cylinders // *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48, no. 5. P. 764–774. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.11.013
25. *Ханазарян А.Д., Голуб М.В.* Гибридный метод для моделирования антиплоских колебаний слоистых волноводов с присоединенными элементами // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16, № 1. С. 101–114. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.8
26. *Vivar-Perez J.M., Duczek S., Gabbert U.* Analytical and higher order finite element hybrid approach for an efficient simulation of ultrasonic guided waves I: 2D-analysis // *Smart Structures and Systems*. 2014. Vol. 13, no. 4. P. 587–614. DOI: <https://doi.org/10.12989/SSS.2014.13.4.587>
27. *Golub M.V., Shpak A.N.* Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure // *Applied Mathematical Modelling*. 2019. Vol. 65. P. 234–255. DOI: 10.1016/j.apm.2018.08.019
28. *Варелджан М.В.* Двухэтапная вычислительная схема для моделирования возбуждения упругих колебаний в изотропном слое поверхностным пьезопреобразователем // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2024. Т. 21, № 1. С. 57–69. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-57-69
29. *Raorane S., Stepinski T., Packo P.* A semi-analytical framework for predicting far-field responses of complex elastic waves emitters // *Ultrasonics*. 2025. Vol. 145. 107483. DOI: 10.1016/j.ultras.2024.107483
30. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А.* Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // *Акустический журнал*. 2018. Т. 64, № 1. С. 3–12. DOI: 10.7868/s0320791918010082
31. *Evdokimov A.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V.* Hybrid numerical-analytical scheme for 3D scattering problems // *2021 Days on Diffraction (DD)*. 2021. P. 42–47. DOI: 10.1109/dd52349.2021.9598757
32. *Евдокимов А.А., Нец П.А., Лесин Б.М., Еремин А.А.* Гибридный численно-аналитический подход для моделирования антиплоских колебаний многослойных упругих волноводов с множественными неоднородностями // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2025. Т. 18, № 2. С. 140–154. DOI: 10.7242/1999-6691/2025.18.2.11
33. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
34. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Интегральные преобразования и волновые процессы. Краснодар: Кубанский государственный университет, 2017. 201 с.
35. *Глушкова Н.В.* Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук: 01.04.02 / Глушкова Наталья Вилениновна. Краснодар: Кубанский государственный университет, 2000. 220 с.
36. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
37. *Tiersten H.F.* Electromechanical coupling factors and fundamental material constants of thickness vibrating piezoelectric plates // *Ultrasonics*. 1970. Vol. 8, no. 1. P. 19–23. DOI: 10.1016/0041-624x(70)90793-6
38. *Свешников А.Г.* Принцип предельного поглощения для волновода // *Доклады Академии наук СССР*. 1951. Т. 80, № 3. С. 345–347.
39. *Умов Н.А.* Избранные сочинения. М.: Гостехтеоретиздат, 1950. 575 с.
40. *Sheeraz M.A., Butt Z., Khan A.M., Mehmood S., Ali A., Azeem M., Nasir A., Imtiaz T.* Design and Optimization of Piezoelectric Transducer (PZT-5H Stack) // *Journal of Electronic Materials*. 2019. Vol. 48. P. 6487–6502. DOI: 10.1007/s11664-019-07453-7

Сведения об авторах:

Евдокимов Александр Александрович (корр.), кфмн, нс, Институт математики, механики и информатики Кубанского государственного университета (ИММИ КубГУ), 350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149; e-mail: evdokimovmail27@gmail.com; ORCID: 0009-0008-0071-3066

Нец Полина Алексеевна, б/с, преп., ИММИ КубГУ; e-mail: polina.nec@mail.ru; ORCID: 0009-0003-7414-6395

Еремин Артем Александрович, кфмн, внс, ИММИ КубГУ; e-mail: eremin_a_87@mail.ru; ORCID: 0000-0002-3168-2214

Михаил Владимирович Варелдзжан, б/с, мнс, ИММИ КубГУ; e-mail: michael.vareldzhan.777@mail.ru; ORCID: 0009-0009-5325-3232

Research article

Hybrid computational scheme for modeling the excitation of elastic waves in an isotropic layer by a piezoceramic actuator of various configurations

A.A. Evdokimov, P.A. Nets, A.A. Eremin, M.V. Vareldzhan

Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation

Modeling of elastic guided wave excitation by surface-mounted or embedded ultrasonic transducers is one of the key problems in the development and verification of nondestructive testing and structural health monitoring methods. To address this challenge, the dynamics of three-dimensional waveguides is analyzed by applying a hybrid numerical-analytical scheme. The problem reduces to studying the dynamic behavior of an isotropic elastic layer subjected to a localized vibration source positioned at an arbitrary distance from the layer boundaries. Within the proposed scheme, the construction of a solution involves two stages. In the first stage, a set of auxiliary numerical solutions is constructed in the vicinity of the transducer. In the second stage, these solutions are coupled with the wave field in the remaining homogeneous part of the waveguide, which is represented as a sum of cylindrical guided waves. Each wave is expressed as the product of the modal waveform along the vertical coordinate by the function, characterizing the intensity of radiation in a given direction. The latter can be represented as a Fourier series expansion in a polar angle, whose coefficients are determined from the condition of continuity of the displacement and stress vectors at the interface between the region containing the vibration source and the remaining part of the waveguide. The proposed scheme is capable of modeling the interaction between the elastic layer and arbitrarily shaped transducer with consideration for physical fields coupling and does not require an independent software implementation of finite element calculations. Moreover, it can be used to evaluate the excitation efficiency of normal modes in a selected frequency range as a function of the propagation direction. Verification of the scheme is performed by comparing its results with the numerical solutions obtained by use of other approaches. The specific features of elastic guided wave excitation by piezoceramic transducers of various geometries, either surface-mounted or embedded in an elastic layer, are analyzed to demonstrate the applicability of the developed scheme to ultrasonic monitoring of thin-walled structures.

Keywords: hybrid computing scheme, elastic guided waves, finite element method, piezoceramic actuator

Received: 17.04.2026 / *Published online:* 05.08.2026

Acknowledgements

This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 24-71-00105).

References

1. *Raghavan A., Cesnik C.E.S.* Review of Guided-wave Structural Health Monitoring. The Shock and Vibration Digest. 2007. Vol. 39. P. 91–114. DOI: 10.1177/0583102406075428
2. *Giurgiutiu V.* Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors, 2nd Edition. Elsevier, 2014. 1032 p. DOI: 10.1016/c2013-0-00155-7
3. *Shardakov I.N., Shestakov A.P., Glot I.O., Gusev G.N., Epin V.V., Tsvetkov R.V.* Comparison of the dynamic characteristics of piezoceramic actuators used in vibration diagnostics of large-scale structures. Computational Continuum Mechanics. 2024. Vol. 17, no. 3. P. 376–386. DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.3.31
4. *Feng T., Aliabadi M.H.F.* Influence of placing positions of PZT transducers in thick composites on ultrasonic guided waves. Procedia Structural Integrity. 2024. Vol. 52. P. 785–794. DOI: 10.1016/j.prostr.2023.12.077

5. Qi R., Wang L., Jin J., Yuan L., Shen Z., Ge Y. An embedded piezoelectric actuator for active vibration control: Concept, modeling, simulation, and investigation. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2025. Vol. 38, no. 4. 103345. DOI: 10.1016/j.cja.2024.103345
6. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kvasha O.V., Lammering R. Selective Lamb mode excitation by piezoelectric coaxial ring actuators. *Smart Materials and Structures*. 2010. Vol. 19, no. 3. 035018. DOI: 10.1088/0964-1726/19/3/035018
7. Schmidt D., Sinapius M., Wierach P. Design of mode selective actuators for Lamb wave excitation in composite plates. *CEAS Aeronautical Journal*. 2013. Vol. 4. P. 105–112. DOI: 10.1007/s13272-012-0059-3
8. Mohammadgholihi M., Moll J., Tschöke K., Kruska C., Gebhardt S., De Marchi L. Unidirectional Frequency-Steerable Acoustic Transducer for guided ultrasonic wave damage imaging. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2025. Vol. 229. 112505. DOI: 10.1016/j.ymssp.2025.112505
9. Soman R., Kudela P., Balasubramaniam K., Singh S.K., Malinowski P. A Study of Sensor Placement Optimization Problem for Guided Wave-Based Damage Detection. *Sensors*. 2019. Vol. 19, no. 8. 1856. DOI: 10.3390/s19081856
10. Skelton E., Adams S., Craster R. Guided elastic waves and perfectly matched layers. *Wave Motion*. 2007. Vol. 44. P. 573–592. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.03.001
11. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*. 1994. Vol. 114, no. 2. P. 185–200. DOI: 10.1006/jcph.1994.1159
12. Moreau L., Castaings M., Hosten B., Predoi M.V. An orthogonality relation-based technique for post-processing finite element predictions of waves scattering in solid waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2006. Vol. 120, no. 2. P. 611–620. DOI: 10.1121/1.2216563
13. Moreau L., Castaings M. The use of an orthogonality relation for reducing the size of finite element models for 3D guided waves scattering problems. *Ultrasonics*. 2008. Vol. 48, no. 5. P. 357–366. DOI: 10.1016/j.ultras.2008.01.005
14. Predoi M., Castaings M., Moreau L. Influence of material viscoelasticity on the scattering of guided waves by defects. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2008. Vol. 124, no. 5. P. 2883–2894. DOI: 10.1121/1.2977604
15. Raghavan A., Cesnik E.S. Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring. *Smart Materials and Structures*. 2005. Vol. 14, no. 6. P. 1448–1461. DOI: 10.1088/0964-1726/14/6/037
16. Eremin A.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V. Application of Piezoelectric Wafer Active Sensors for Elastic Guided Wave Excitation and Detection in Structural Health Monitoring Systems for Elongated Constructions. *Russian Journal of Nondestructive Testing*. 2020. Vol. 56. P. 795–809. DOI: 10.1134/s1061830920100034
17. Lin X., Yuan F.G. Diagnostic Lamb waves in an integrated piezoelectric sensor/actuator plate: analytical and experimental studies. *Smart Materials and Structures*. 2001. Vol. 10, no. 5. P. 907–913. DOI: 10.1088/0964-1726/10/5/307
18. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kvasha O.V., Seemann W. Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate. *Smart Materials and Structures*. 2007. Vol. 16, no. 3. P. 650–664. DOI: 10.1088/0964-1726/16/3/012
19. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Distribution of the energy of a piezoelectric actuator between traveling waves excited in an elastic layer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. Vol. 56. P. 1007–1014. DOI: 10.1134/s0021894415060103
20. Moulin E., Assaad J., Delebarre C., Osmont D. Modeling of Lamb waves generated by integrated transducers in composite plates using a coupled finite element–normal modes expansion method. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2000. Vol. 107, no. 1. P. 87–94. DOI: 10.1121/1.428294
21. Quaegebeur N., Ostiguy P.-C., Masson P. Hybrid empirical/analytical modeling of guided wave generation by circular piezoceramics. *Smart Materials and Structures*. 2015. Vol. 24, no. 3. 035003. DOI: 10.1088/0964-1726/24/3/035003
22. Golub M., Fomenko S., Shpak A., Gu Y., Wang Y., Zhang C. Semi-analytical hybrid approach for modelling smart structures and guided wave-based SHM systems for a laminate with multiple delaminations and surface-mounted inhomogeneities. *Applied Mathematical Modelling*. 2023. Vol. 120. P. 812–832. DOI: 10.1016/j.apm.2023.04.017
23. Yang C., Nakaoka J., Hirose S. Semi-analytical FEM for modelling 3D guided waves scattering in an infinite plate. *Applied Mathematical Modelling*. 2025. Vol. 148. 116236. DOI: 10.1016/j.apm.2025.116236
24. Benmeddour F., Treysède F., Laguerre L. Numerical modeling of guided wave interaction with non-axisymmetric cracks in elastic cylinders. *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48, no. 5. P. 764–774. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2010.11.013
25. Khanazaryan A.D., Golub M.V. Hybrid method for modelling anti-plane vibrations of layered waveguides with bonded composite joints. *Computational Continuum Mechanics*. 2023. Vol. 16, no. 1. P. 101–114. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.8
26. Vivar-Perez J.M., Duczek S., Gabbert U. Analytical and higher order finite element hybrid approach for an efficient simulation of ultrasonic guided waves I: 2D-analysis. *Smart Structures and Systems*. 2014. Vol. 13, no. 4. P. 587–614. DOI: <https://doi.org/10.12989/SSS.2014.13.4.587>
27. Golub M.V., Shpak A.N. Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure. *Applied Mathematical Modelling*. 2019. Vol. 65. P. 234–255. DOI: 10.1016/j.apm.2018.08.019
28. Varelidzhan M.V. Two-step computational scheme for modeling the excitation of elastic waves by an ultrasonic piezoelectric transducer. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2024. Vol. 21, no. 1. P. 57–69. DOI: 10.31429/vestnik-21-1-57-69

29. Raorane S., Stepinski T., Packo P. A semi-analytical framework for predicting far-field responses of complex elastic waves emitters. *Ultrasonics*. 2025. Vol. 145. 107483. DOI: 10.1016/j.ultras.2024.107483
30. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Hybrid Numerical-Analytical Scheme for Calculating Elastic Wave Diffraction in Locally Inhomogeneous Waveguides. *Acoustical Physics*. 2018. Vol. 64. P. 1–9. DOI: 10.1134/s1063771018010086
31. Evdokimov A.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V. Hybrid numerical-analytical scheme for 3D scattering problems. 2021 Days on Diffraction (DD). 2021. P. 42–47. DOI: 10.1109/dd52349.2021.9598757
32. Evdokimov A.A., Nets P.A., Lesin B.M., Eremin A.A. A hybrid numerical-analytical approach for the simulation of antiplane vibrations of multilayered elastic waveguides with multiple inhomogeneities. *Computational Continuum Mechanics*. 2025. Vol. 18, no. 2. P. 140–154. DOI: 10.7242/1999-6691/2025.18.2.11
33. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Z.F. *Dinamika neodnorodnykh lineynoy-uprugikh sred*. Moscow: Nauka, 1989. 344 p.
34. Glushkov E.V., Glushkova N.V. *Integral'nyye preobrazovaniya i volnovyye protsessy*. Krasnodar: Kuban State University, 2017. 201 p.
35. Glushkova N.V. *Definition and Accounting of Singular Components in Elasticity Theory Problems: dissertation for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences / Glushkova N. V.* Krasnodar: Kuban State University, 2000. 220 p.
36. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Elektromagnitoupругost' p'yezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel*. Moscow: Nauka, 1988. 472 p.
37. Tiersten H.F. Electromechanical coupling factors and fundamental material constants of thickness vibrating piezoelectric plates. *Ultrasonics*. 1970. Vol. 8, no. 1. P. 19–23. DOI: 10.1016/0041-624x(70)90793-6
38. Sveshnikov A.G. Printsip predel'nogo pogloshcheniya dlya volnovoda. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1951. Vol. 80, no. 3. P. 345–347.
39. Umov N.A. *Izbrannyye sochineniya*. Moscow: Gostekhteorizdat, 1950. 575 p.
40. Sheeraz M.A., Butt Z., Khan A.M., Mehmood S., Ali A., Azeem M., Nasir A., Imtiaz T. Design and Optimization of Piezoelectric Transducer (PZT-5H Stack). *Journal of Electronic Materials*. 2019. Vol. 48. P. 6487–6502. DOI: 10.1007/s11664-019-07453-7