

Научная статья

Численное моделирование двумерного течения микрополярной жидкости в замкнутой полости с учётом полной функции диссипации

*К.В. Губарева¹, Е.Ю. Просвираков^{2,3}*¹ Самарский государственный технический университет, Самара, Российская Федерация² Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация³ Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация

Представлены результаты численного исследования установившегося двумерного течения несжимаемой микрополярной жидкости в квадратной полости с движущейся верхней стенкой. Стационарное решение получено методом установления – интегрированием по времени полной системы нестационарных уравнений Эрингена. Отличительной чертой работы является детальный расчёт и анализ полной функции диссипации, включающей три механизма: классическую вязкую диссипацию, диссипацию от градиентов микровращений и диссипацию, обусловленную взаимодействием макроскопической завихренности с полем микровращения. Разработан численный алгоритм на основе проекционного метода Чорина–Темама; его корректность подтверждена сравнением с классическим ньютоновским пределом. Проведено параметрическое исследование в широких диапазонах определяющих безразмерных параметров – числа Рейнольдса, параметра микрополярности и параметра микромасштаба. Показано, что интегральная диссипация возрастает с ростом числа Рейнольдса и параметра микрополярности, однако наблюдаются локальные немонотонности, вызванные нелинейным взаимодействием диссипативных механизмов. Влияние параметра микромасштаба оказалось значительно слабее по сравнению с влиянием двух других параметров. Установлено, что с увеличением числа Рейнольдса толщина пограничного слоя у движущейся стенки полости уменьшается, а максимум микрополярной скорости снижается и локализуется в пристеночных слоях. Анализ распределений скорости и микровращения подтвердил формирование тонких пограничных слоёв вблизи твёрдых границ, где диссипация максимальна. Микрополярные эффекты приводят к заметному росту диссипации относительно её уровня в классической ньютоновской жидкости, что указывает на важность учёта в энергетическом балансе внутренних вращательных степеней свободы. Полученные результаты могут найти применение в микрофлюидике и моделировании течений сложных сред.

Ключевые слова: микрополярная жидкость, уравнения Эрингена, диссипация энергии, численное моделирование, полость с движущейся крышкой, проекционный метод

Получение: 02.12.2025 / Публикация онлайн: 05.08.2026

УДК 532.5; 536.24; 519.63

1. Введение

Развитие микро- и нанотехнологий актуализирует задачи моделирования течений жидкостей со сложной внутренней структурой [1]. Основы континуальной теории, учитывающей вращательные степени свободы материальных точек, заложены братьями Коссера [2] в начале XX века. Эринген [3, 4] развил и систематизировал эту теорию применительно к жидкостям, предложив модель микрополярной жидкости, которая расширяет классическую гидродинамику, вводя представление о континууме, материальные точки которого обладают собственными вращательными степенями свободы. Модель находит применение при описании суспензий, полимерных растворов, жидкостей с микрочастицами и некоторых биологических сред [5, 6]. Математическая формулировка модели микрополярной жидкости включает дополнительные параметры и уравнение для поля микровращений, что приводит к появлению качественно новых эффектов, таких как зависимость локального вращения частиц от градиентов скорости и возникновение связанных с микровращением напряжений [7, 8].

Классическая задача течения в полости с движущейся крышкой служит базовым тестом для численных методов в гидродинамике и позволяет исследовать отрывные течения, формирование вихрей и процессы диссипации в ограниченной области [9, 10]. В ряде исследований [11–14] подобное течение рассматривалось для микрополярных жидкостей, однако вопросы, связанные с детальным анализом полной функции диссипации и количественной оценкой вклада различных микрополярных механизмов в рассеяние энергии, остаются недостаточно изученными.

Диссипация механической энергии в вязкой среде является фундаментальным процессом, определяющим динамику течения, тепловыделение и эффективность множества технических устройств [15, 16]. В случае микрополярной жидкости выражение для функции диссипации существенно усложняется, поскольку включает слагаемые, обусловленные градиентами микровращений и их взаимодействием с полем макроскопической завихренности [17, 18]. В работах [19, 20] показано, что вращение даже в классических (ньютоновских) средах оказывает решающее влияние на устойчивость и вихревую структуру адвективных течений в ограниченных областях с твёрдыми границами. Полный учёт этих механизмов необходим для корректного моделирования тепломассопереноса в микрофлюидных системах, при проектировании микромиксеров и теплообменников [21], а также для понимания поведения неньютоновских сред [22, 23].

Цель настоящей работы заключается в проведении численного моделирования двумерного течения микрополярной жидкости в квадратной полости с движущейся крышкой (в стационарной постановке, реализуемой методом установления) и оценке влияния параметров микрополярности на структуру течения и энергетические потери. Для достижения поставленной цели решается полная система уравнений Эрингена,

разрабатывается устойчивый численный алгоритм, вычисляются поля всех искомым функций, включая функцию диссипации, и проводится сравнительный анализ с классическим случаем. Актуальность исследования определяется потребностями современной микрофлюидики и технологий, связанных с управлением течениями на микроуровне [24].

2. Математическая постановка задачи

Рассматривается двумерное стационарное течение несжимаемой микрополярной жидкости внутри ограниченной прямоугольной области, имеющей форму единичного квадрата. Геометрия расчётной области задаётся как $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, где оси координат x и y лежат в плоскости течения. Такая постановка позволяет сосредоточить внимание на основных физических особенностях микрополярного течения, не усложняя анализ дополнительными эффектами, связанными с трёхмерной геометрией или изменением свойств жидкости в направлении, перпендикулярном плоскости течения.

Микрополярная жидкость отличается от классической ньютоновской тем, что каждая материальная точка континуума обладает не только поступательной скоростью, но и собственным микровращением, что требует введения дополнительного векторного поля микрополярной скорости (микровращения). В двумерной постановке поле скорости макроскопического движения жидкости описывается двумерным вектором $\mathbf{v}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, где u и v — компоненты скорости вдоль осей x и y соответственно. Поле микровращений, в свою очередь, обладает единственной ненулевой компонентой, направленной перпендикулярно плоскости течения, и представляется скалярной функцией, интерпретируемой как проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ на ось z : $\boldsymbol{\omega}(x, y) = (0, 0, \omega(x, y))$.

В рамках линейной теории микрополярной жидкости определяющие соотношения для тензора силовых напряжений $\hat{t}$ и тензора моментных напряжений $\hat{m}$ имеют вид [3, 4, 6, 17]:

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \kappa \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \varepsilon_{ijk}\omega_k \right),$$

$$m_{ij} = \alpha \frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \beta \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \gamma \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}.$$

Здесь p — гидродинамическое давление; μ — классическая сдвиговая вязкость; κ — вихревая (вращательная) вязкость; α, β, γ — коэффициенты угловой вязкости; ε_{ijk} — символ Леви–Чивиты; δ_{ij} — символ Кронекера. Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности выражает закон сохранения массы:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Подстановка определяющих соотношений в законы сохранения импульса и момента импульса (уравнения Эйлера для сплошной среды) и их последующее обезразмеривание с масштабами длины L (ширина полости) и скорости U (характерная скорость, в качестве которой выбрана скорость движения крышки U_{lid}), приводят к системе уравнений движения в безразмерной форме. Число Рейнольдса вычисляется по формуле: $\text{Re} = \rho U L / \mu$. Уравнение сохранения импульса, обобщающее классическое уравнение Навье–Стокса на случай микрополярных сред, в двумерной постановке записывается как

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1+N}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{N}{\text{Re}} (\nabla \times \boldsymbol{\omega}). \quad (2)$$

Здесь $N = \kappa / \mu$ — безразмерный параметр микрополярности, определяющий относительный вклад в движение жидкости вихревой вязкости κ по сравнению с классической динамической вязкостью μ . Оператор $\nabla \times \boldsymbol{\omega}$ в двумерной постановке даёт двумерный вектор:

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}, -\frac{\partial \omega}{\partial x} \right),$$

что отражает связь между пространственным изменением микровращения и дополнительными объёмными моментами, действующими на жидкость.

Уравнение для поля микровращений (моментная составляющая) в скалярной форме, эквивалентной исходной векторной записи, имеет вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{\text{Re } m^2} \nabla^2 \omega + \frac{2N}{\text{Re } m^2} (\zeta - 2\omega). \quad (3)$$

В (3) безразмерный параметр m связан с характерной для микрополярной жидкости внутренней длиной l (например, с размером микрочастиц) соотношением: $m = l/L$, где L — размер полости. Характерная длина l обуславливает величину коэффициентов угловых вязкостей [25]. При $l/L = 0.3$ внутренний масштаб составляет 30% от размера полости (это типично для микрофлюидных систем, в которых размер канала, как правило, составляет ~ 100 мкм,

а размер частицы ~ 30 мкм). Параметр ζ означает скалярную завихренность макроскопического поля скорости:

$$\zeta = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор, направленный вдоль оси z . Разность $(\zeta - 2\omega)$ интерпретируется как мера несоответствия между локальной завихренностью макроскопического потока и удвоенным значением микровращения; именно эта величина ответственна за возникновение внутренних моментов, стремящихся уравновесить поступательное и вращательное движения частиц жидкости. При $N = 0$ ($\kappa = 0$) система (2), (3) тождественно переходит в классические уравнения Навье–Стокса (уравнение (3) становится несвязанным и при нулевых начальных и граничных условиях даёт $\omega \equiv 0$). Таким образом, предельный переход к ньютоновской жидкости осуществляется корректно.

Решение стационарной задачи ищется методом установления — интегрированием нестационарных уравнений (1)–(3) по времени до достижения установившегося состояния. В начальный момент времени $t = 0$ предполагается, что в области Ω вся жидкость находится в состоянии покоя, а давление и микровращение отсутствуют:

$$\mathbf{v}(x, y, 0) = (0, 0), \quad p(x, y, 0) = 0, \quad \omega(x, y, 0) = 0. \quad (4)$$

Особое внимание уделяется рассмотрению диссипативных процессов, связанных с вязким трением как на макро-, так и на микроуровне. Полная функция диссипации энергии для микрополярной жидкости в двумерной постановке записывается в виде [3, 4]:

$$\Phi = (1 + N)(\nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}) + \frac{N}{m^2}(\nabla \boldsymbol{\omega} : \nabla \boldsymbol{\omega}) + N(\zeta - 2\omega)^2. \quad (5)$$

Первое слагаемое описывает классическую вязкую диссипацию, обусловленную градиентами макроскопической скорости, второе — диссипацию, связанную с пространственными градиентами микровращений, третье — диссипацию, обусловленную несоответствием между макроскопической завихренностью и микровращением. Все три механизма в совокупности определяют полную скорость рассеяния механической энергии в микрополярной среде. Анализ функции диссипации Φ проводится путём оценки локальной скорости рассеяния механической энергии, что в гидродинамике является общепринятым подходом [15, 16] и не требует решения уравнения энергии.

На верхней стенке ($y = 1$), движущейся с постоянной скоростью U_0 вдоль оси x , задаются условия прилипания для макроскопической скорости и условие $\omega = 0$ (hyper stick, также известное как no spin), соответствующее полному подавлению собственного вращения микрочастиц на подвижной границе:

$$\mathbf{v} = (U_0, 0), \quad \omega = 0. \quad (6)$$

Безразмерные переменные вводятся с использованием размера полости L в качестве масштаба длины и вспомогательной скорости $U_{\text{ref}} = 2U_{\text{lid}}$ как масштаба скорости и времени, которое при таком обезразмеривании есть L/U_{ref} . Число Рейнольдса определяется реальной скоростью крышки: $\text{Re} = \rho U_{\text{lid}} L / \mu$. Физика решения полностью sõчтается с учётом использования параметров Re , N , m и не зависит от конкретного выбора масштаба скорости.

Стенки — нижняя ($y = 0$) и боковые ($x = 0$ и $x = 1$) — полагаются неподвижными:

$$\mathbf{v} = (0, 0). \quad (7)$$

Для микровращений на этих неподвижных границах задаются условия Неймана:

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad (y = 0), \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, 1). \quad (8)$$

Выбор граничных условий для микровращения обусловлен фундаментальными физическими процессами взаимодействия жидкости со стенками. Так, на движущейся стенке условие $\omega = 0$ соответствует полному подавлению собственного вращения микрочастиц относительно поверхности крышки. На неподвижных стенках условия Неймана $\partial \omega / \partial n = 0$ физически означают отсутствие внешних микромоментов и свободную адаптацию микровращения к локальной структуре течения. Такая комбинация граничных условий согласуется с рекомендациями в работе [25].

Таким образом, полная математическая постановка задачи включает систему уравнений (1)–(3), начальные условия (4), граничные условия (6)–(8), определение функции диссипации (5) и фиксированные значения безразмерных параметров, что обеспечивает однозначное и физически обоснованное описание стационарного микрополярного течения в полости с движущейся крышкой.

3. Численное моделирование

Для решения задачи стационарного течения микрополярной жидкости в квадратной полости с движущейся крышкой разработан проекционный алгоритм Чорина–Темама [26, 27] с явной временной дискретизацией. Расчётная область Ω покрывается равномерной сеткой. Размер сетки выбран на основе анализа сеточной

сходимости: выполнены расчёты на сетках с числом узлов 31×31 , 51×51 , 71×71 и 101×101 для базового набора параметров $Re = 10$, $N = 0.3$, $m = 0.3$. Интегральная диссипация на сетках 51×51 и 71×71 различается менее чем на 15%, что признаётся приемлемым для качественного анализа. Дальнейшее увеличение сетки до 101×101 узлов требует уменьшения шага по времени для получения устойчивого решения и значительно увеличивает время счёта. Таким образом, выбрана сетка 51×51 ($\Delta x = \Delta y = 1/50$). Все переменные — компоненты скорости u , v , давление p , микрополярная скорость ω — определяются в центрах ячеек (совмещённая сетка). Временной шаг зафиксирован: $\Delta t = 10^{-4}$, что обеспечивает устойчивость явной схемы при умеренных значениях числа Рейнольдса. Выбранный временной шаг удовлетворяет необходимому условию устойчивости явной схемы с диффузионными членами.

Уравнение импульса (2) дискретизируется следующим образом: конвективные слагаемые аппроксимируются согласно противопоточной схеме, диффузионные — центральными разностями, производная по времени — явной схемой Эйлера; порядок аппроксимации: первый по времени ($O(\Delta t)$, явная схема Эйлера); второй по пространству для диффузионных членов ($O(\Delta x^2)$, центральные разности); первый для конвективных членов ($O(\Delta x)$, схема против потока). Граничные условия Дирихле реализуются точно; условия Неймана для функции ω , описывающей поле микровращения, и давления p получают путём зеркального отражения значений из приграничных узлов, что обеспечивает второй порядок аппроксимации на равномерной сетке.

На каждом временном шаге сначала вычисляется новое поле микровращений ω^{n+1} ; решается уравнение (3), записанное в дискретном виде:

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} + (\mathbf{v}^n \cdot \nabla_h) \omega^n = \frac{1}{Re m^2} \nabla_h^2 \omega^n + \frac{2N}{Re m^2} (\zeta_h^n - 2\omega^n),$$

где ∇_h означает дискретный градиент, а $\zeta_h^n = (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)_h$ есть дискретная скалярная завихрённость. Затем определяются промежуточные компоненты скорости (u^* , v^*) без учёта градиента давления. Для восстановления несжимаемости итерационно, методом Якоби с 100 внутренними итерациями, решается уравнение Пуассона для давления:

$$\nabla_h^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla_h \cdot \mathbf{v}^*.$$

После этого поле скорости корректируется:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \Delta t \nabla_h p^{n+1}.$$

На всех границах задаются условия Неймана $\partial p / \partial n = 0$. Данное условие возникает естественным образом в проекционном методе при выполнении условия прилипания на твёрдых стенках [26, 27] и является стандартной практикой в расчётах несжимаемых вязких течений.

Граничные условия применяются на каждом подэтапе. На движущейся верхней стенке полагается: $u = U_0$, $v = 0$, $\omega = 0$; на неподвижных стенках $u = v = 0$ за счёт зеркального отражения значений из приграничных узлов (например, $\omega_{1,j} = \omega_{2,j}$) для ω реализуются условия нулевого нормального градиента.

Для повышения устойчивости вводится подрелаксация поля микровращений

$$\omega^{n+1} \leftarrow \alpha \omega_{\text{comp}}^{n+1} + (1 - \alpha) \omega^n$$

с коэффициентом $\alpha = 0.3$. Здесь $\omega_{\text{comp}}^{n+1}$ — значение, полученное непосредственно из разностного уравнения. Итерационный процесс останавливается при достижении максимального изменения всех полей менее $\varepsilon = 10^{-6}$ или после 1000 шагов по времени.

Дополнительно сделана оценка устойчивости решения по параметру m . Расчёты показали, что при $m = 0.15$ и $m = 0.16$ численная схема теряет устойчивость (возникает неограниченный рост невязок, а вычисления становятся некорректными — NaN), тогда как при $m = 0.18$ и выше решение устойчиво. Таким образом, нижняя граница применимости метода составляет $m \geq 0.18$. В параметрическом исследовании использовались значения $m = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

Проведена проверка корректности реализации алгоритма: подтверждено точное выполнение граничных условий; сохранение несжимаемости ($\|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_\infty < 10^{-6}$); монотонное убывание невязок до уровня 10^{-5} (Рис. 1); качественное совпадение структуры течения с классическим решением при $N \rightarrow 0$.

4. Результаты и обсуждение

Численное моделирование показало устойчивую сходимость решения к физически корректному стационарному состоянию. Невязки всех полей монотонно убывали на протяжении 1000 итераций (Рис. 1), демонстрируя стабильность использованной схемы даже при наличии сильной нелинейности и дополнительной степени свободы — микровращения. Несмотря на то, что расчёт не достиг полной сходимости по критерию $\varepsilon = 10^{-6}$, достоверность анализа стационарной структуры течения подтверждают малые остаточные невязки (7.6×10^{-5} для u), физическая согласованность распределений всех вычисленных полей и положительная определённая функция диссипации.

Для количественного анализа асимметрии течения с использованием разработанного численного алгоритма выполнены расчёты при трёх значениях числа Рейнольдса $Re = \{10, 500, 2000\}$ с фиксированными $N = 0.3$, $m = 0.3$

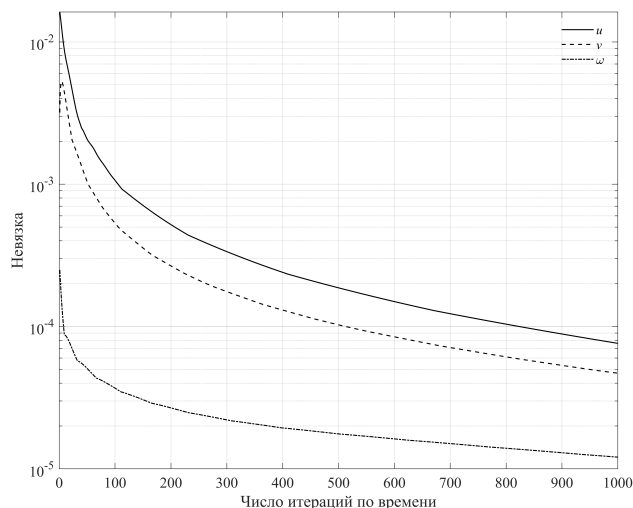


Рис. 1. Зависимость максимальной невязки компонент скорости u , v и микрополярной скорости ω от номера итерации (базовый случай $Re = 10$, $N = 0.3$, $m = 0.3$)

(см. Рис. 2). Центр основного вихря, определяемый по минимуму функции тока, при $Re = 10$ находится в точке $(0.50; 0.82)$. С ростом Re до 500 центр смещается до $(0.52; 0.88)$, а при $Re = 2000$ достигает точки $(0.52; 0.92)$. Таким образом, увеличение числа Рейнольдса приводит к смещению вихря вверх и вправо, что свидетельствует об усилении асимметрии течения, обусловленной движением верхней стенки. Изолинии функции тока выявляют основной вихрь, смещённый вверх; вторичные вихри в верхних углах не обнаружены. Аналогичные эффекты, связанные с влиянием вращения на структуру течения, обсуждаются в работах [28, 29].

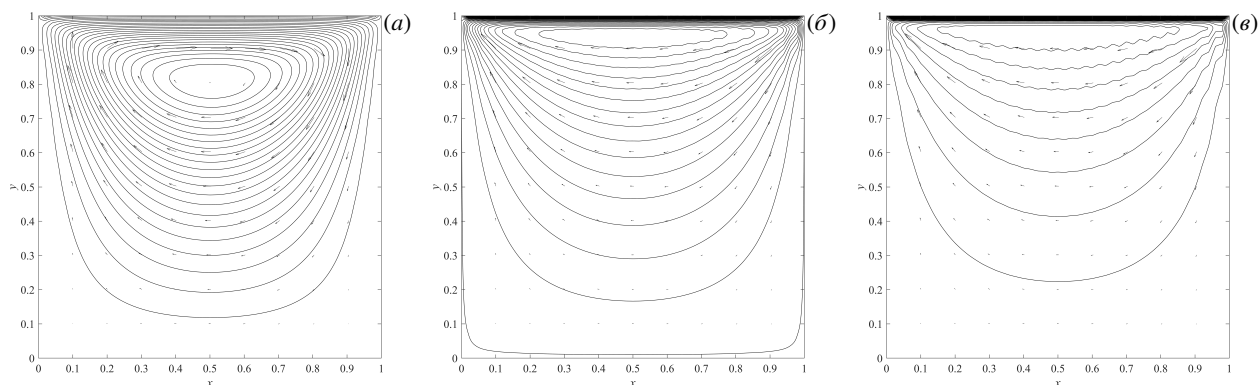


Рис. 2. Линии тока при $N = 0.3$, $m = 0.3$ и разном числе Рейнольдса: 10 (а); 500 (б); 2000 (в)

Профили горизонтальной скорости $u(y)$ при $x = 0.5$ для шести значений $Re = \{10, 100, 500, 1000, 1500, 2000\}$ приведены на рисунке 3. Как видно, с увеличением числа Рейнольдса градиент скорости у движущейся верхней стенки возрастает, а профиль в ядре течения становится более пологим. Это соответствует классической картине формирования тонкого пограничного слоя при высоких Re и подтверждает физическую корректность выполненных расчётов.

Профили микровращения $\omega(y)$ при $x = 0.9$ (область, где ω достигает максимума) показаны на рисунке 4. Микровращение локализовано вблизи твёрдых стенок и быстро затухает в ядре течения. С увеличением Re максимальное значение ω уменьшается, что объясняется подавлением микровращений возрастающими инерционными силами.

Профили диссипации $\Phi(y)$ при $x = 0.5$ и $x = 0.9$ представлены на рисунке 5. Диссипация сосредоточена в узких пристеночных слоях, особенно вблизи верхней стенки, где градиенты скорости максимальны. С ростом Re максимальное значение диссипации увеличивается, а область её локализации становится более узкой. Интегральная диссипация для базового случая составляет 2.133 Вт/м. Для количественной оценки влияния микрополярных эффектов проведён расчёт для классической ньютоновской жидкости ($N = 0$); в этом случае интегральная диссипация равняется 1.812 Вт/м. Таким образом, учёт микровращений при выбранных значениях параметров ($N = 0.3$, $m = 0.3$) выявляет заметное увеличение диссипации.

С целью анализа влияния параметров на диссипацию энергии для течения микрополярной жидкости проведена серия расчётов при следующих значениях параметров:

- число Рейнольдса $Re = \{10, 100, 500, 1000, 1500, 2000\}$;
- параметр микрополярности $N = \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$;

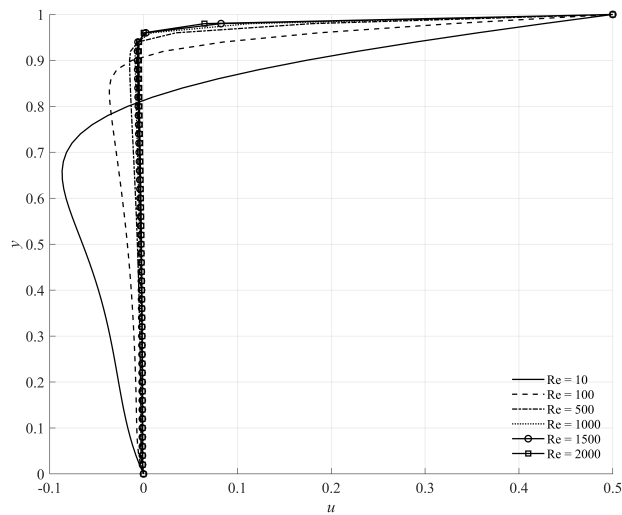


Рис. 3. Профили горизонтальной скорости $u(y)$ при $x=0.5$

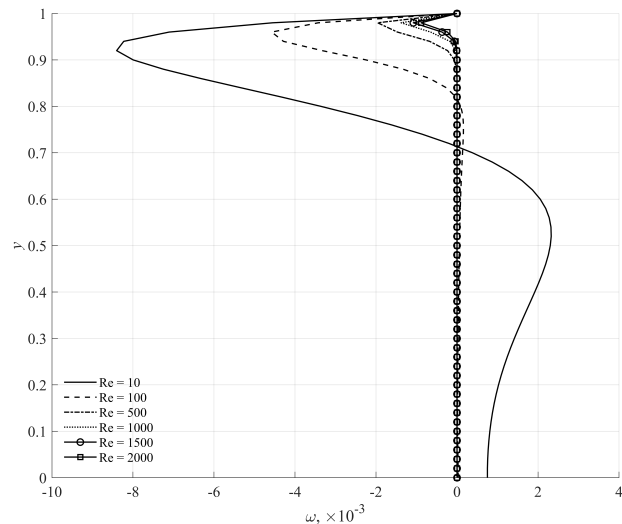


Рис. 4. Профили микровращения $\omega(y)$ при $x=0.9$

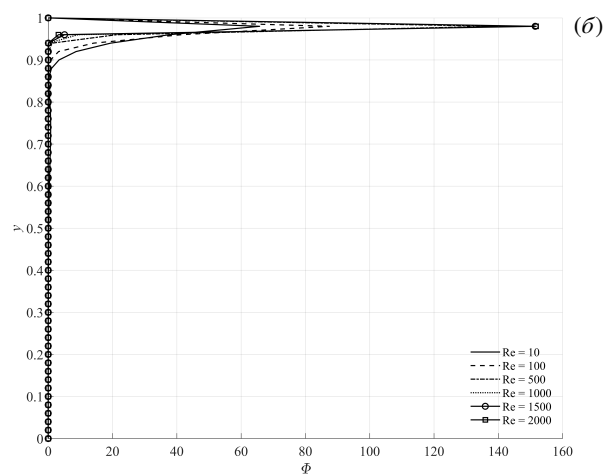
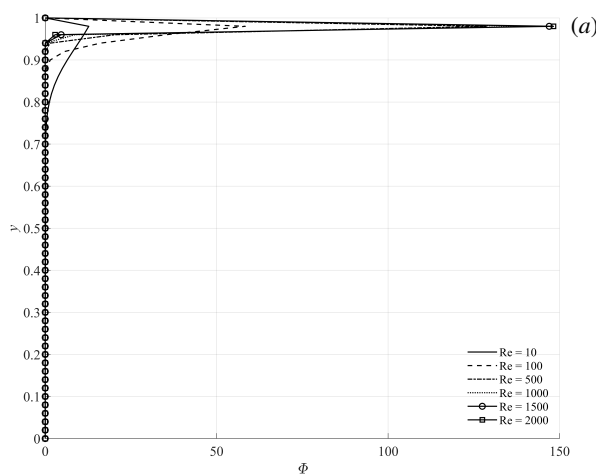


Рис. 5. Профили диссипации $\Phi(y)$ при разных значениях координаты x : 0.5 (а); 0.9 (б)

— параметр микромасштаба $m = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

На рисунке 6 показана зависимость интегральной диссипации от числа Рейнольдса для различных комбинаций (N, m) . Диссипация возрастает с увеличением Re при всех исследованных значениях N и m . Наибольший рост наблюдается в диапазоне $Re = 10, \dots, 500$, а при дальнейшем увеличении Re до значения 2000 диссипация выходит на плато или слегка снижается, что объясняется насыщением диссипативных механизмов.

Рисунок 7 демонстрирует связь диссипации с параметром микрополярности N . Зависимости, в отличие от свойственных для классических ньютоновских жидкостей, не являются строго монотонными. На большинстве кривых видны локальные максимумы и минимумы (зигзагообразный характер). Например, при $Re = 2000$ и $m = 0.2$ диссипация возрастает при увеличении N от 0 до 0.1, достигает максимума, а затем снижается. Такое поведение объясняется нелинейной обратной связью между макроскопической завихренностью ζ и полем микровращения ω в выражении (5). При увеличении N усиливаются первый $(1 + N)(\nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v})$ и третий $N(\zeta - 2\omega)^2$ члены, но одновременно перестраивается поле ω , что приводит к локальному уменьшению разности $(\zeta - 2\omega)$ и, как следствие, к снижению вклада третьего слагаемого, поскольку его квадратичная часть при этом падает и частично компенсирует рост множителя N . Несмотря на локальные немонотонности, общий диапазон изменения диссипации при увеличении N от 0 до 0.7 составляет от 1.12 до 4.94 Вт/м (меняется более чем в 4 раза), что подтверждает ключевую роль параметра N .

На рисунке 8 представлена зависимость диссипации от параметра m . Как и на рисунке 7, здесь наблюдаются немонотонные колебания (зигзаги). Причина та же: изменение m влияет на коэффициент N/m^2 во втором слагаемом функции диссипации, что через перестройку поля ω вызывает нелинейную реакцию всей системы. Однако абсолютное изменение диссипации во всём диапазоне $m = 0.2, \dots, 0.8$ не превышает 10–15%, тогда как при варьировании Re и N оно достигает сотен процентов. Таким образом, влияние m на интегральные энергетические характеристики является вторичным по сравнению с влиянием Re и N .

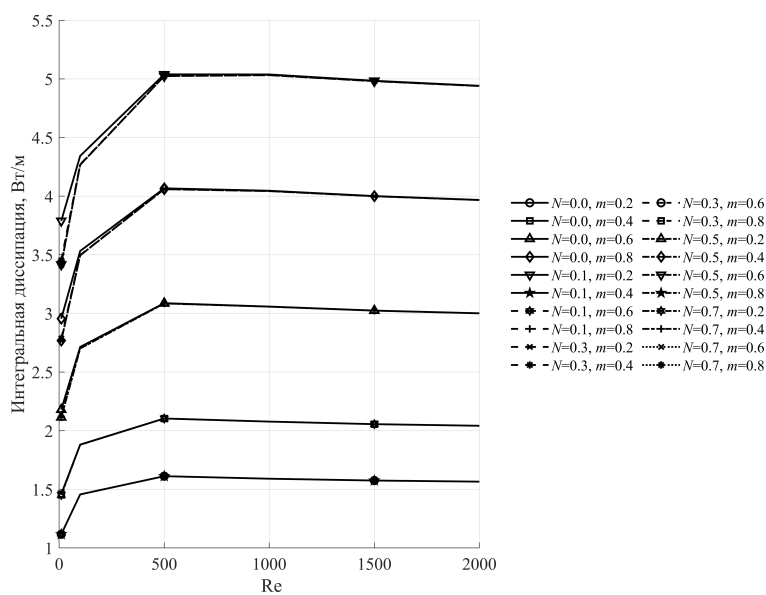


Рис. 6. Зависимость интегральной диссипации от числа Рейнольдса для различных комбинаций (N, m)

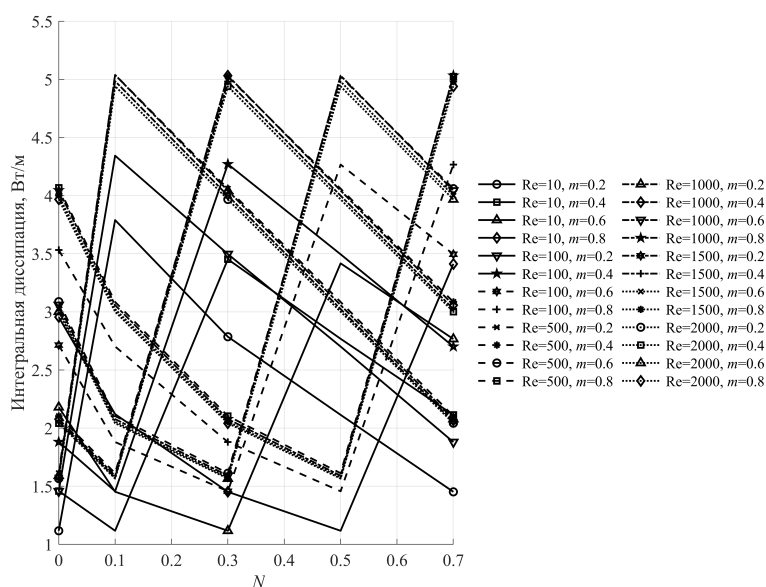


Рис. 7. Зависимость интегральной диссипации от параметра N для различных комбинаций (Re, m)

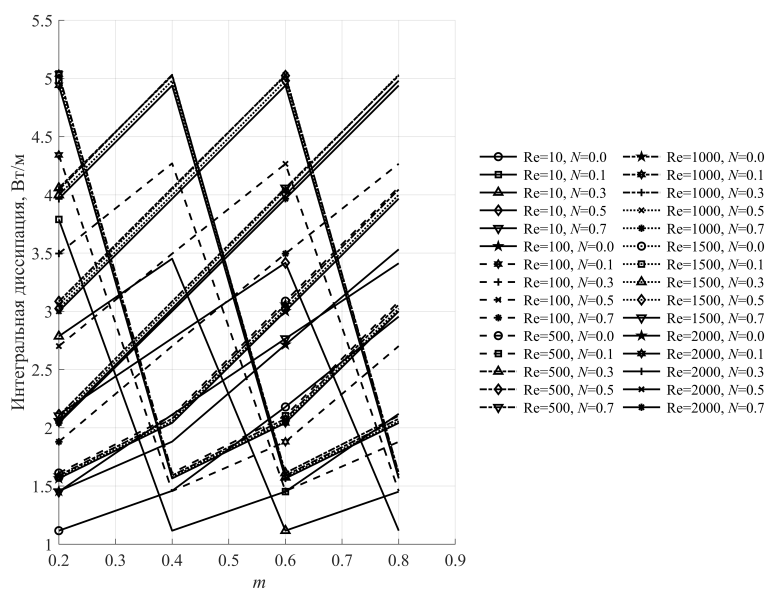


Рис. 8. Зависимость интегральной диссипации от параметра m для различных комбинаций (Re, N)

5. Выводы

Проведено численное исследование установившегося двумерного течения микрополярной жидкости в квадратной полости с движущейся крышкой. Разработанный алгоритм на основе проекционного метода показал свою эффективность. Выполнено параметрическое исследование (осуществлено 120 расчётов при разных комбинациях параметров). Обнаружено, что зависимости диссипации от N и m имеют немонотонный (зигзагообразный) характер, что связано с нелинейной обратной связью между макроскопической завихренностью и микровращением. При этом влияние параметра m на диссипацию существенно слабее, чем влияние Re и N . Максимумы диссипации локализованы в пристеночных слоях; распределение микрополярной скорости коррелирует с областями высоких градиентов макроскопической скорости. Полученные авторами данные подтверждают, что микрополярные эффекты существенно влияют на диссипацию энергии; их вклад должен учитываться при анализе вязких течений в замкнутых областях.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-00339), <https://rscf.ru/project/25-29-00339/>.

Литература

1. Squires T.M., Quake S.R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale // *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, no. 3. P. 977–1026. DOI: 10.1103/REVMODPHYS.77.977
2. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
3. Eringen A.C. Simple microfluids // *International Journal of Engineering Science*. 1964. Vol. 2, no. 2. P. 205–217. DOI: 10.1016/0020-7225(64)90005-9
4. Eringen A.C. Theory of Micropolar Fluids // *Indiana University Mathematics Journal*. 1966. Vol. 16. P. 1–18. DOI: 10.1512/iumj.1967.16.16001
5. Ariman T., Turk M.A., Sylvester N.D. Microcontinuum fluid mechanics—A review // *International Journal of Engineering Science*. 1973. Vol. 11, no. 8. P. 905–930. DOI: 10.1016/0020-7225(73)90038-4
6. Lukaszewicz G. *Micropolar Fluids: Theory and Applications*. Basel: Birkhäuser Boston, 1999. 320 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0641-5
7. Cowin S.C. The Theory of Polar Fluids // Vol. 14. 1974. P. 279–347. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70034-6
8. Rees D.A.S., Bassom A.P. The Blasius boundary-layer flow of a micropolar fluid // *International Journal of Engineering Science*. 1996. Vol. 34, no. 1. P. 113–124. DOI: 10.1016/0020-7225(95)00058-5
9. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // *Journal of Computational Physics*. 1982. Vol. 48, no. 3. P. 387–411. DOI: 10.1016/0021-9991(82)90058-4
10. Shankar P.N., Deshpande M.D. Fluid Mechanics in the Driven Cavity // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2000. Vol. 32, no. 1. P. 93–136. DOI: 10.1146/annurev.fluid.32.1.93
11. Ahmadi G. Self-similar solution of incompressible micropolar boundary layer flow over a semi-infinite plate // *International Journal of Engineering Science*. 1976. Vol. 14, no. 7. P. 639–646. DOI: 10.1016/0020-7225(76)90006-9
12. Jena S.K., Mathur M.N. Similarity solutions for laminar free convection flow of a thermomicropolar fluid past a non-isothermal vertical flat plate // *International Journal of Engineering Science*. 1981. Vol. 19, no. 11. P. 1431–1439. DOI: 10.1016/0020-7225(81)90040-9
13. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. Polynomial exact solutions for describing unidirectional flows of micropolar incompressible media // *Procedia Structural Integrity*. 2024. Vol. 65. P. 39–43. DOI: 10.1016/j.prostr.2024.11.007
14. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. Exact solutions to the NAVIER–STOKES equations for unidirectional flows of micropolar fluids in a mass force field // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2024. Vol. 3. P. 41–63. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063
15. Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1967. 615 p.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика*. М.: Наука, 1989. 736 с.
17. Stokes V.K. *Theories of Fluids with Microstructure: An Introduction*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1984. 205 p. DOI: 10.1007/978-3-642-82351-0
18. Peddieson J., McNitt R.P. Boundary Layer Theory for a Micropolar Fluid // *Recent Advances in Engineering Science*. 1970. Vol. 5. P. 405–426.
19. Чикунлаев Д.Г., Шварц К.Г. Влияние вращения на монотонную моду неустойчивости адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами для случая спиральных нормальных возмущений // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. Т. 9, № 1. С. 27–37. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.1.3

20. Чикулаев Д.Г., Шварц К.Г. Численное исследование влияния быстрого вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами при малых числах Прандтля // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 2. С. 135–141. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.14
21. Алексеев М.С., Пономарёв Р.Р., Шелистов В.С., Попов В.А., Моринева И.В., Демёхин Е.А. Моделирование наноканалов в синтезированных мембранах // Вычислительная механика сплошных сред. 2024. Т. 17, № 1. С. 5–14. DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.1.1
22. Gad-el-Hak M. The Fluid Mechanics of Microdevices—The Freeman Scholar Lecture // Journal of Fluids Engineering. 1999. Vol. 121. P. 5–33. DOI: 10.1115/1.2822013
23. Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E.A. Nanoscale Electrokinetics and Microvortices: How Microhydrodynamics Affects Nanofluidic Ion Flux // Annual Review of Fluid Mechanics. 2012. Vol. 44, no. 1. P. 401–426. DOI: 10.1146/annurev-fluid-120710-101046
24. Stone H.A., Stroock A.D., Ajdari A. Engineering Flows in Small Devices: Microfluidics Toward a Lab-on-a-Chip // Annual Review of Fluid Mechanics. 2004. Vol. 36, no. 1. P. 381–411. DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124
25. Ханукаева Д.Ю., Филиппов А.Н. Изотермические течения микрополярных жидкостей: постановка задач и аналитические решения // Коллоидный журнал. 2018. Т. 80, № 1. С. 17–40. DOI: 10.7868/S0023291218010020
26. Chorin A.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // Mathematics of Computation. 1968. Vol. 22, no. 104. P. 745–762.
27. Témam R. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I) // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1969. Vol. 32. P. 135–153. DOI: 10.1007/BF00247678
28. Кочин А.Ю., Шварц К.Г. Конечно-амплитудные возмущения адвективных течений в горизонтальном слое несжимаемой жидкости со свободной верхней границей при слабом вращении // Вычислительная механика сплошных сред. 2015. Т. 8, № 2. С. 174–187. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.2.15
29. Крутова Н.С., Шварц К.Г. Численное моделирование конечно-амплитудных пространственных возмущений адвективного термокапиллярного течения в слабо вращающемся слое жидкости в условиях микрогравитации // Вычислительная механика сплошных сред. 2018. Т. 11, № 3. С. 263–274. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.3.20

Сведения об авторах:

Губарева Кристина Владимировна (корр.), ктн, снс, Самарский государственный технический университет (СамГТУ), 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244; e-mail: r.kristina2017@mail.ru; ORCID: 0000-0002-9845-8372

Просвирыков Евгений Юрьевич, дфмн, проф., Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (УрФУ), 620062, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19; e-mail: evgen_pros@mail.ru; ORCID: 0000-0002-2349-7801

Research article

Numerical simulation of two-dimensional flow of a micropolar fluid in an enclosed cavity with the full dissipation function

K.V. Gubareva¹, E.Yu. Prosviryakov^{2,3}

¹ Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

² Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

³ Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation

The paper studies numerically a steady two-dimensional flow of incompressible micropolar fluid in a square cavity with a moving top wall. The steady solution is obtained by the time-marching method – time integration of the full system of unsteady Eringen equations. A distinctive feature of this work is a detailed calculation and analysis of the total dissipation function, which includes three mechanisms: classical viscous dissipation, dissipation due to microrotation gradients, and dissipation resulting from the interaction between macroscopic vorticity and the microrotation field. A numerical algorithm is developed based on the Chorin–Temam projection method; its correctness is verified by comparison with the classical Newtonian limit. A parametric study is carried out over wide ranges of the governing dimensionless parameters – the Reynolds number, the micropolarity parameter, and the microscale parameter. It is shown that the integral dissipation increases with the Reynolds number and the micropolarity parameter, although there are local non-monotonocities due to a nonlinear interaction of dissipative mechanisms. The influence of the microscale parameter is found to be considerably weaker than that of the other two parameters. It is shown that as the Reynolds number increases, the thickness of the

boundary layer at the moving wall decreases, and the microrotation velocity maximum diminishes and is localized in the near-wall layers. Analysis of the velocity and microrotation distributions confirms the formation of thin boundary layers near solid walls, where dissipation is maximal. Micropolar effects lead to a marked increase in dissipation compared with a classical Newtonian fluid, which demonstrates the importance of considering the internal rotational degrees of freedom in the energy balance. The results may find application in microfluidics and modeling of complex fluid flows.

Keywords: micropolar fluid, Eringen equations, energy dissipation, numerical simulation, lid-driven cavity flow, projection method

Received: 02.12.2025 / *Published online:* 05.08.2026

Acknowledgements

This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-29-00339).

References

1. Squires T.M., Quake S.R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale. *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, no. 3. P. 977–1026. DOI: 10.1103/REVMODPHYS.77.977
2. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p.
3. Eringen A.C. Simple microfluids. *International Journal of Engineering Science*. 1964. Vol. 2, no. 2. P. 205–217. DOI: 10.1016/0020-7225(64)90005-9
4. Eringen A.C. Theory of Micropolar Fluids. *Indiana University Mathematics Journal*. 1966. Vol. 16. P. 1–18. DOI: 10.1512/iumj.1967.16.16001
5. Ariman T., Turk M.A., Sylvester N.D. Microcontinuum fluid mechanics—A review. *International Journal of Engineering Science*. 1973. Vol. 11, no. 8. P. 905–930. DOI: 10.1016/0020-7225(73)90038-4
6. Lukaszewicz G. *Micropolar Fluids: Theory and Applications*. Birkhäuser Boston, 1999. 320 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0641-5
7. Cowin S.C. The Theory of Polar Fluids. Vol. 14. 1974. P. 279–347. DOI: 10.1016/S0065-2156(08)70034-6
8. Rees D.A.S., Bassom A.P. The Blasius boundary-layer flow of a micropolar fluid. *International Journal of Engineering Science*. 1996. Vol. 34, no. 1. P. 113–124. DOI: 10.1016/0020-7225(95)00058-5
9. Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*. 1982. Vol. 48, no. 3. P. 387–411. DOI: 10.1016/0021-9991(82)90058-4
10. Shankar P.N., Deshpande M.D. Fluid Mechanics in the Driven Cavity. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2000. Vol. 32, no. 1. P. 93–136. DOI: 10.1146/annurev.fluid.32.1.93
11. Ahmadi G. Self-similar solution of incompressible micropolar boundary layer flow over a semi-infinite plate. *International Journal of Engineering Science*. 1976. Vol. 14, no. 7. P. 639–646. DOI: 10.1016/0020-7225(76)90006-9
12. Jena S.K., Mathur M.N. Similarity solutions for laminar free convection flow of a thermomicropolar fluid past a non-isothermal vertical flat plate. *International Journal of Engineering Science*. 1981. Vol. 19, no. 11. P. 1431–1439. DOI: 10.1016/0020-7225(81)90040-9
13. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. Polynomial exact solutions for describing unidirectional flows of micropolar incompressible media. *Procedia Structural Integrity*. 2024. Vol. 65. P. 39–43. DOI: 10.1016/j.prostr.2024.11.007
14. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Y. Exact solutions to the NAVIER–STOKES equations for unidirectional flows of micropolar fluids in a mass force field. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2024. Vol. 3. P. 41–63. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063
15. Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967. 615 p.
16. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics*. 2nd. Oxford: Pergamon Press, 1987. 539 p.
17. Stokes V.K. *Theories of Fluids with Microstructure: An Introduction*. Springer Berlin Heidelberg, 1984. 205 p. DOI: 10.1007/978-3-642-82351-0
18. Peddieson J., McNitt R.P. Boundary Layer Theory for a Micropolar Fluid. *Recent Advances in Engineering Science*. 1970. Vol. 5. P. 405–426.
19. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Effect of rotation on the monotonic instability mode of advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries in the case of normal spiral perturbation. *Computational Continuum Mechanics*. 2016. Vol. 9, no. 1. P. 27–37. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.1.3
20. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Numerical study of the fast rotation effect on the stability of advective flow in a horizontal fluid layer with rigid boundaries at small Prandtl numbers. *Computational Continuum Mechanics*. 2014. Vol. 7, no. 2. P. 135–141. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.2.14

21. *Alekseev M.S., Ponomarev R.R., Shelistov V.S., Popov V.A., Morshneva I.V., Demekhin E.A.* Modeling of nanochannels in synthetic membranes. *Computational Continuum Mechanics*. 2024. Vol. 17, no. 1. P. 5–14. DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.1.1
22. *Gad-el-Hak M.* The Fluid Mechanics of Microdevices—The Freeman Scholar Lecture. *Journal of Fluids Engineering*. 1999. Vol. 121. P. 5–33. DOI: 10.1115/1.2822013
23. *Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E.A.* Nanoscale Electrokinetics and Microvortices: How Microhydrodynamics Affects Nanofluidic Ion Flux. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2012. Vol. 44, no. 1. P. 401–426. DOI: 10.1146/annurev-fluid-120710-101046
24. *Stone H.A., Stroock A.D., Ajdari A.* Engineering Flows in Small Devices: Microfluidics Toward a Lab-on-a-Chip. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 36, no. 1. P. 381–411. DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122124
25. *Khanukaeva D.Y., Filippov A.N.* Isothermal Flows of Micropolar Liquids: Formulation of Problems and Analytical Solutions. *Colloid Journal*. 2018. Vol. 80, no. 1. P. 14–36. DOI: 10.1134/S1061933X18010040
26. *Chorin A.J.* Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*. 1968. Vol. 22, no. 104. P. 745–762.
27. *Témam R.* Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I). *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1969. Vol. 32. P. 135–153. DOI: 10.1007/BF00247678
28. *Kochinov A.Y., Shvarts K.G.* Finite-amplitude perturbations of the advective flows in a horizontal layer of incompressible liquid with a free upper boundary at low rotation. *Computational Continuum Mechanics*. 2015. Vol. 8, no. 2. P. 174–187. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.2.15
29. *Knutova N.S., Shvarts K.G.* Numerical simulation of finite-amplitude spatial perturbations of advective thermocapillary flow in a weakly rotating liquid layer under microgravity conditions. *Computational Continuum Mechanics*. 2018. Vol. 11, no. 3. P. 263–274. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.3.20