

Научная статья

Осесимметричное выпучивание оболочек из функционально-градиентных материалов при внезапном нагреве

*С.В. Левяков**Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация*

Рассматривается задача о колебаниях и динамической потере устойчивости оболочек вращения из функционально-градиентных материалов при тепловом ударе. Для ее решения разработан конечно-элементный алгоритм, позволяющий исследовать осесимметричные нелинейные колебания оболочек при условии нестационарной теплопроводности по толщине стенки. Приведена формулировка двухузлового конечного элемента, учитывающая деформации поперечного сдвига на основе гипотезы Тимошенко. С целью исключить эффект сдвигового запирания применены аппроксимационные выражения для деформаций элемента, базирующиеся на точном решении задачи об изгибе балки Тимошенко. В качестве отсчетной выбрана поверхность, проходящая через центры масс поперечных волокон, вследствие этого удается разделить инерционные члены, соответствующие поступательному движению и вращению. Уравнения движения конечно-элементной модели оболочки интегрируются пошаговым методом с использованием неявной схемы Ньюмарка. На каждом временном шаге температурные нагрузки и жесткостные характеристики оболочки определяются по результатам численного решения нестационарной задачи теплопроводности, при остановке которой учитывается зависимость свойств материала от температуры. Деформированные состояния оболочки на каждом шаге по времени отыскиваются с помощью итерационной процедуры Ньютона–Рафсона. Представлены результаты численной верификации предлагаемого алгоритма путем сопоставления решений тестовых задач с данными, полученными другими методами. Исследовано прощелкивание пологих сферических и конических оболочек при внезапном нагреве внутренней поверхности. Изучено влияние свойств материала оболочки, геометрических параметров и скорости нагрева ее внутренней поверхности на динамическую потерю устойчивости.

Ключевые слова: оболочка вращения, функционально-градиентный материал, тепловой удар, нестационарная теплопроводность, геометрическая нелинейность, прощелкивание, конечный элемент

Получение: 04.03.2026 / *Публикация онлайн:* 05.08.2026

УДК 539.3

1. Введение

Тепловое воздействие является важным фактором, влияющим на напряженно-деформированное состояние конструкций. Если нагрев происходит настолько быстро, что тепловое расширение упругого материала вследствие инерции отстает от роста температуры, то возбуждаются механические колебания. В тонкостенных упругих конструкциях амплитуда колебаний, наведенных резким изменением температуры, может достигать значительных величин. Первые работы, посвященные исследованию колебаний простейших конструктивных элементов при внезапном нагреве, выполнены в линейной постановке. С использованием классических моделей деформируемых тел получены решения задач при малых колебаниях изотропных балок [1–4], пластин [5–9] и оболочек [10, 11] при тепловом ударе.

Задачи динамики деформируемых упругих систем при внезапном тепловом воздействии приобрели особую актуальность в связи с внедрением в практику функционально-градиентных материалов (ФГМ), представляющих собой особый класс термостойких композитов. Тонкостенные конструктивные элементы изготавливаются из ФГМ путем сплава частиц металла и керамики и так, что их объемные доли плавно изменяются по заданному координатному направлению. Благодаря высоким показателям прочности, трещиностойкости и термостойкости, ФГМ находят применение в энергетике, горном деле, аэрокосмической технике и других областях, где конструкции подвергаются воздействию экстремальных температур. Уточненные подходы к расчету таких конструкций, учитывающие геометрическую и физическую нелинейности, приводят к весьма сложным разрешающим дифференциальным уравнениям, для решения которых требуются численные методы.

В работе [12] исследована динамическая устойчивость балок из ФГМ при тепловом ударе. Изучено влияние граничных условий, свойств материала и начальных несовершенств на критическую температурную нагрузку. Задачи о нелинейных колебаниях пологих круговых арок, вызванных температурным воздействием, рассмотрены в [13, 14]. Показано, что при определенных условиях теплового нагружения возможна потеря устойчивости шарнирно опертых арок путем скачкообразного перехода в новое состояние равновесия. В [15] проанализировано осесимметричное динамическое выпучивание тонких кольцевых пластин на основе упрощенных уравнений движения, не учитывающих силы инерции в срединной плоскости пластины и зависимость свойств материала от температуры. В [16] применен уточненный подход к исследованию динамической потери устойчивости нагретых пластин, где приняты во внимание деформации поперечного сдвига, силы инерции по двум координатным направлениям, а также силы инерции вращательного движения. Задача о выпучивании защемленной по контуру квадратной пластины при импульсном нагреве рассмотрена в [17] в трехмерной постановке. Оценка динамической реакции пластины проведена методом конечных элементов (МКЭ) с использованием 20-узловых гексаэдральных элементов сплошной среды.

В работах [18, 19] подробно изучены нелинейные осесимметричные колебания цилиндрических и конических оболочек при внезапном нагреве их внешней поверхности. В работах [20–22] обсуждается возможность прощелкивания пологих сферических куполов при тепловом ударе.

Динамическая реакция оболочек из ФГМ при совместном действии температурных и механических нагрузок — предмет исследования в [23–26].

Следует отметить, что авторы большинства названных выше работ для вывода разрешающих дифференциальных уравнений использовали простейшие варианты нелинейной теории пластин и пологих оболочек, в которых нелинейная часть мембранных деформаций выражается через квадраты углов поворота элемента поверхности, а изменения кривизн линейны. Однако известно, что такие деформационные соотношения применимы в случае, когда прогибы незначительно превышают толщину оболочки.

В настоящей работе предлагается конечно-элементный (КЭ) алгоритм для исследования геометрически нелинейной динамики оболочек с нестационарной теплопроводностью по толщине стенки. Алгоритм может быть полезным для анализа оболочек вращения неканонического очертания при условии, что меридиан оболочки представляет собой кривую, отвечающую условию C^1 -гладкости. В отличие от большинства упомянутых в обзоре подходов, в предлагаемой автором данной работы КЭ-модели оболочки ограничение на величину поворотов не налагается.

2. Кинематические соотношения

Рассмотрим оболочку вращения толщиной h . Введем материальную координату z , отмеряемую от срединной поверхности оболочки в направлении нормали. Предположив, что плотность ФГМ, из которого она изготовлена, изменяется по толщине: $\rho = \rho(z)$, определим координату центра масс материальных отрезков, нормальных к срединной поверхности:

«Пусть плотность функционально градиентного материала (ФГМ) зависит от координаты по толщине: $\rho = \rho(z)$. Определим положение центра масс материальных отрезков, нормальных к срединной поверхности».

$$z_R = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \rho dz}. \quad (1)$$

В качестве отсчетной выберем поверхность, проходящую через центры масс материальных отрезков, и введем на ней криволинейные координаты s и θ , соответствующие меридиональному и окружному направлениям (Рис. 1). В частном случае изотропного материала поверхность отсчета (1) совпадает со срединной поверхностью.

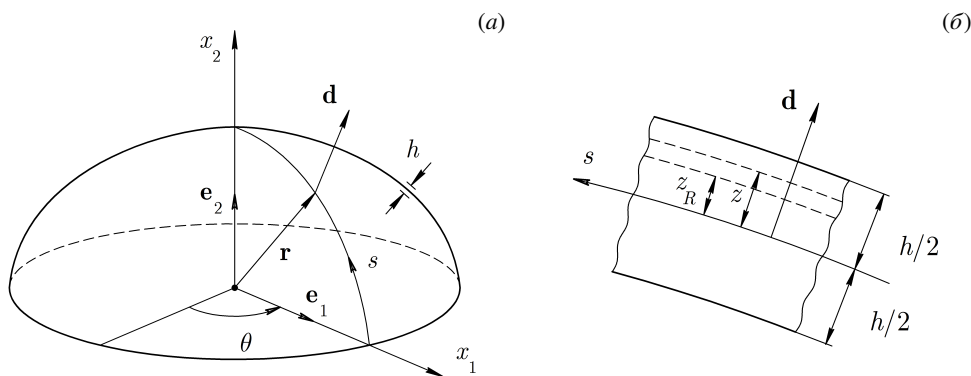


Рис. 1. Оболочка вращения (а), положение поверхности отсчета (б)

Зададим уравнения, описывающие отсчетную поверхность, в параметрическом виде:

$$x_i = x_i(s) \quad (i = 1, 2),$$

где x_1, x_2 — радиальная и осевая координаты соответственно.

Приняв гипотезу Тимошенко для учета деформации поперечного сдвига, запишем в точке, находящейся на расстоянии z от срединной поверхности, выражения ее радиуса-вектора:

$$\mathbf{r}^z = \mathbf{r} + (z - z_R)\mathbf{d}, \quad \mathbf{r}^{z*} = \mathbf{r}^* + (z - z_R)\mathbf{d}^*. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки на отсчетной поверхности; $\mathbf{d}$ — единичный вектор, совпадающий с нормалью к недеформированной поверхности; звездочкой отмечены величины, относящиеся к деформированному состоянию. Необязательно, чтобы вектор $\mathbf{d}^*$ всегда был нормальным к поверхности оболочки, но он должен сохранять единичную длину.

Запишем векторы, входящие в (2), как

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i(s), \quad \mathbf{d} = \mathbf{e}_i \lambda_i(s), \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{e}_i x_i^*(s), \quad \mathbf{d}^* = \mathbf{e}_i \lambda_i^*(s) \quad (i=1,2), \quad (3)$$

где $\mathbf{e}_i$ — единичные базисные векторы, $\lambda_i(s)$ — направляющие косинусы вектора $\mathbf{d}$. В (3) и далее используется правило суммирования по дважды повторяющимся индексам, если не оговорено иное.

3. Свойства материала

Считаем, что все физико-механические свойства ФГМ (плотность, модуль упругости и другие) изменяются по толщине оболочки по степенному закону [27]:

$$P(z, T) = P_m(T) + [P_c(T) - P_m(T)](0.5 + z/h)^\zeta \quad (-h/2 \leq z \leq h/2). \quad (4)$$

Здесь P_i ($i=c, m$) — характеристики компонентов ФГМ; индексы m и c относятся, соответственно, к металлической и керамической составляющим; T — температура; ζ — показатель изменения свойств ФГМ ($\zeta > 0$).

Для учета зависимости характеристик материала оболочки от температуры используем аппроксимацию в виде [27]:

$$P_i = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (i=c, m), \quad (5)$$

где $P_{-1}, P_0, \dots, P_3$ — коэффициенты, определяемые экспериментально для каждого компонента, входящего в состав ФГМ.

В качестве примера рассмотрим ФГМ, который изготовлен из частиц нержавеющей стали SUS304 и нитрида кремния Si_3N_4 . Значения коэффициентов, входящих в (5), для указанных материалов приведены в таблице 1. Как в таблице 1, так и далее используются следующие обозначения физико-механических характеристик: α — коэффициент линейного расширения, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, κ — коэффициент теплопроводности, c_p — удельная теплоемкость.

Таблица 1. Коэффициенты, входящие в зависимости от температуры свойств компонентов ФГМ [27]

Компонент ФГМ	Обозначение характеристики	Размерность	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
			Значения коэффициентов в (5)				
Si_3N_4	E_c	Па	0	$348.43 \cdot 10^9$	$-3.07 \cdot 10^{-4}$	$2.16 \cdot 10^{-7}$	$-8.946 \cdot 10^{-11}$
	ν_c	-	0	0.24	0	0	0
	α_c	K^{-1}	0	$5.8723 \cdot 10^{-6}$	$9.095 \cdot 10^{-4}$	0	0
	κ_c	$\text{Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$	0	13.723	$-1.032 \cdot 10^{-3}$	$5.466 \cdot 10^{-7}$	$-7.876 \cdot 10^{-11}$
	c_{pc}	$\text{Дж} \cdot (\text{кг} \cdot \text{К})^{-1}$	0	555.11	$1.016 \cdot 10^{-3}$	$2.92 \cdot 10^{-7}$	$-1.67 \cdot 10^{-10}$
	ρ_c	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$	0	2370	-	-	-
SUS304	E_m	Па	0	$201.04 \cdot 10^9$	$3.079 \cdot 10^{-4}$	$-6.534 \cdot 10^{-7}$	0
	ν_m	-	0	0.3262	$-2.002 \cdot 10^{-4}$	$3.797 \cdot 10^{-7}$	0
	α_m	K^{-1}	0	$12.33 \cdot 10^{-6}$	$8.086 \cdot 10^{-4}$	0	0
	κ_m	$\text{Вт} \cdot (\text{м} \cdot \text{К})^{-1}$	0	15.379	$-1.264 \cdot 10^{-3}$	$2.092 \cdot 10^{-6}$	$-7.223 \cdot 10^{-10}$
	c_{pm}	$\text{Дж} \cdot (\text{кг} \cdot \text{К})^{-1}$	0	496.56	$-1.151 \cdot 10^{-3}$	$1.636 \cdot 10^{-6}$	$-5.863 \cdot 10^{-10}$
	ρ_m	$\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$	0	8166	-	-	-

З а м е ч а н и е. Как известно, в условиях нестационарной теплопроводности свойства материала, зависящие от температуры, являются функциями времени.

4. Потенциальная и кинетическая энергия оболочки

В соответствии с принятой гипотезой (2) определим деформации в точке с координатой z :

$$\varepsilon_s^z = \varepsilon_s + (z - z_R)\kappa_s - \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_\theta^z = \varepsilon_\theta + (z - z_R)\kappa_\theta - \alpha(T - T_0), \quad \varepsilon_{sz}^z = \gamma, \quad (6)$$

где $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \kappa_s, \kappa_\theta$ — деформации и искривления отсчетной поверхности; γ — деформация поперечного сдвига; $T_0 = 300 \text{ K}$ — начальная температура, при которой оболочка находится в ненапряженном состоянии.

Напряжения $\sigma_s^z, \sigma_\theta^z, \tau_{sz}^z$ связаны с деформациями соотношениями упругости:

$$\sigma_s^z = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_s^z + \nu \varepsilon_\theta^z), \quad \sigma_\theta^z = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_\theta^z + \nu \varepsilon_s^z), \quad \tau_{sz}^z = G\gamma, \quad (7)$$

где $G = 0.5E/(1 + \nu)$ — модуль сдвига; модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν вычисляются в точке с координатой z по формуле (4) с учетом температурной зависимости (5).

Запишем плотность энергии деформации оболочки:

$$\Pi_V = \frac{1}{2}(\sigma_s^z \varepsilon_s^z + \sigma_\theta^z \varepsilon_\theta^z + \tau_{sz}^z \gamma). \quad (8)$$

Преобразуем (8), принимая во внимание соотношения (7):

$$\Pi_V = \frac{1}{2} \left\{ \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_s^z + \varepsilon_\theta^z)^2 - \frac{2E}{1+\nu} \varepsilon_s^z \varepsilon_\theta^z + \tau_{sz}^z \gamma \right\}. \quad (9)$$

Подставляя (6) в (9) и выполняя интегрирование по объему оболочки, после несложных преобразований получаем полную потенциальную энергию, которая после деления на 2π принимает вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int (B_1 I_\varepsilon^2 - 2B_2 I_{\varepsilon\varepsilon} + D_1 I_\kappa^2 - 2D_2 I_{\kappa\kappa} + 2G_1 I_\varepsilon I_\kappa - 4G_2 I_{\varepsilon\kappa} + S I_\gamma - 2N_T I_\varepsilon - 2M_T I_\kappa) x_1 ds. \quad (10)$$

Здесь $I_\varepsilon, I_{\varepsilon\varepsilon}, I_\kappa, I_{\kappa\kappa}, I_{\varepsilon\kappa}, I_\gamma$ — инварианты тензора деформаций, определяемые формулами:

$$I_\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_\theta, \quad I_\kappa = \kappa_s + \kappa_\theta, \quad I_{\varepsilon\varepsilon} = \varepsilon_s \varepsilon_\theta, \quad I_{\kappa\kappa} = \kappa_s \kappa_\theta, \quad I_{\varepsilon\kappa} = \frac{1}{2}(\varepsilon_s \kappa_\theta + \varepsilon_\theta \kappa_s), \quad I_\gamma = \gamma^2, \quad (11)$$

B_i, G_i, D_i ($i = 1, 2$) и S — коэффициенты упругости, вычисляемые по формулам:

$$(B_1, G_1, D_1) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z - z_R, (z - z_R)^2) \frac{E}{1-\nu^2} dz, \quad (B_2, G_2, D_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z - z_R, (z - z_R)^2) \frac{E}{1+\nu} dz, \quad (12)$$

$$S = k_s \int_{-h/2}^{h/2} G dz;$$

N_T, M_T — результирующие температурных напряжений, выражающиеся так:

$$(N_T, M_T) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z - z_R) \frac{E}{1-\nu} \alpha (T - T_0) dz; \quad (13)$$

k_s — коэффициент неравномерности касательных напряжений, при нахождении которого учитывается изменение свойств ФГМ по толщине оболочки [14].

Если известно поле температур $T = T(z, t)$, то коэффициенты упругости B_i, G_i, D_i, S и результирующие температурных напряжений N_T, M_T определяются по формулам (12), (13) методом численного интегрирования. При этом каждая характеристика ФГМ, например, модуль упругости E , вычисляется из выражения (4), в котором модули E_m и E_c , соответственно, металлической и керамической составляющих рассчитываются согласно (5).

Используя (1) и (2), получаем выражение для кинетической энергии оболочки, отнесенной к 2π :

$$K = \frac{1}{2} \int (I_0 \dot{\mathbf{r}}^{*2} + I_2 \dot{\mathbf{d}}^{*2}) x_1 ds, \quad (I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, (z - z_R)^2) \rho dz, \quad (14)$$

где I_0, I_2 — коэффициенты инерции, точкой обозначена производная по времени t . Напомним, что величины со звездочкой отвечают деформированному состоянию.

5. Решение задачи теплопроводности

Для вычисления коэффициентов жесткости и результирующих температурных напряжений по формулам (12) и (13) прежде необходимо определить распределение температуры по объему оболочки в каждый момент времени. Примем допущение о том, что температурное поле не зависит от вызываемых им деформаций (то есть будем рассматривать несвязанную задачу термоупругости), и предположим, что нестационарное температурное поле в оболочке зависит только от поперечной координаты z . Пренебрегая влиянием кривизны оболочки на закон распределения температуры по ее толщине, используем одномерное уравнение нестационарной теплопроводности [28]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

При отыскании решения уравнения (15) ограничиваемся следующими условиями:

$$T(z, 0) = T_0, \quad T(-h/2, t) = T_0, \quad T(h/2, t) = T_0 + \Delta T f(t), \quad (16)$$

где $f(t)$ — функция, описывающая изменение температуры во времени, ΔT — изменение температуры. Такие условия соответствуют случаю, когда внешняя термостойкая поверхность, насыщенная частицами керамики, подвергается нагреву.

Так как уравнение (15) является существенно нелинейным в силу зависимости свойств материала от температуры, его интегрирование в аналитическом виде не представляется возможным. Поэтому для решения начально-краевой задачи (15), (16) прибегаем к численному методу. Разбиваем оболочку в направлении нормали к срединной поверхности на n_z слоев равной толщины: $\Delta z = h/n_z$. Вычисляем значения температуры в узлах равномерной сетки $z_i = -h/2 + (i-1)\Delta z$ ($i = 1, \dots, n_z + 1$). Характеристики ФГМ в каждом i -м слое считаем постоянными: $P_i = P(z_i + \Delta z/2, T_i)$. Аппроксимацию поля температур по пространственной переменной принимаем кусочно-линейной:

$$T(z, t) = \sum_{i=1}^{n_z+1} T_i(t) \phi_i(z), \quad (17)$$

где $T_i(t)$ — значение температуры в i -м узле сетки, $\phi_i(z)$ — кусочно-линейная функция, равная 1 в i -м узле и обращающаяся в нуль во всех остальных узлах. Подставляя (17) в (15) и применяя метод взвешенных невязок [29], приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{K}(\mathbf{T})\mathbf{T} + \mathbf{R}(\mathbf{T})\dot{\mathbf{T}} = 0, \quad (18)$$

где $\mathbf{T}$ — вектор температуры в узлах, $\mathbf{K}$, $\mathbf{R}$ — трехдиагональные симметричные матрицы, компоненты которых зависят от узловых значений температуры.

Для интегрирования (18) воспользуемся конечно-элементной сеткой по временной координате: $t_n = n\Delta t$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где Δt — шаг по времени. В пределах n -го элемента производим линейную аппроксимацию:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^n L_1 + \mathbf{T}^{n+1} L_2, \quad L_1 = (t^{n+1} - t)/\Delta t, \quad L_2 = (t - t^n)/\Delta t, \quad t^n < t < t^{n+1},$$

и требуем, чтобы уравнение (18) выполнялось в точке коллокации $t = t^n + \Delta t/2$. Согласно методу взвешенных невязок, получаем:

$$\left((\Delta t/2) \mathbf{K}^{n+1/2} + \mathbf{R}^{n+1/2} \right) \mathbf{T}^{n+1} + \left((\Delta t/2) \mathbf{K}^{n+1/2} - \mathbf{R}^{n+1/2} \right) \mathbf{T}^n = 0. \quad (19)$$

Здесь индекс $(n+1/2)$ означает, что величина вычисляется в момент $t = t^n + \Delta t/2$; матрицы $\mathbf{K}^{n+1/2}$ и $\mathbf{R}^{n+1/2}$ формируются из элементарных матриц для i -го слоя, имеющих вид:

$$\mathbf{K}_i^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta z} \kappa_i^{n+1/2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_i^{n+1/2} = \frac{1}{6\Delta z} (\rho c_p)_i^{n+1/2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

при этом характеристики ФГМ вычисляем в средней точке слоя с координатой $z = (z_i + z_{i+1})/2$ при температуре $T_i^{n+1/2} = (T_i^n + T_{i+1}^n + T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1})/4$.

Вектор $\mathbf{T}^n$ в (19), определяющий распределение температуры в момент t^n , предполагается известным. Для отыскания вектора $\mathbf{T}^{n+1}$ в следующий момент $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ воспользуемся итерационным методом Ньютона-Рафсона, который приводит к уравнению:

$$\left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_{(j)}^{n+1/2} + \mathbf{R}_{(j)}^{n+1/2} \right) \delta \mathbf{T}_{(j)}^{n+1} + \left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_{(j)}^{n+1/2} + \mathbf{R}_{(j)}^{n+1/2} \right) \mathbf{T}_{(j)}^{n+1} + \left(\frac{\Delta t}{2} \mathbf{K}_{(j)}^{n+1/2} - \mathbf{R}_{(j)}^{n+1/2} \right) \mathbf{T}^n = 0, \quad (20)$$

где j — номер итерации на текущем временном шаге.

Решая (20) относительно $\delta \mathbf{T}_{(j)}^{n+1}$, уточняем вектор $\mathbf{T}^{n+1}$ по формуле

$$\mathbf{T}_{(j+1)}^{n+1} = \mathbf{T}_{(j)}^{n+1} + \delta \mathbf{T}_{(j)}^{n+1}$$

и переходим к $(j+1)$ -й итерации. Процесс продолжается до достижения заданной точности определения вектора узловых температур на каждом временном шаге.

6. Конечно-элементная модель оболочки

Разобьем меридиональную кривую на двухузловые конечные элементы (КЭ). В каждом узле вычислим радиус-вектор $\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_k x_{ki}$ и единичный вектор нормали $\mathbf{d}_i = \mathbf{e}_k \lambda_{ki}$ ($i, k = 1, 2$), которые будем использовать для описания конфигурации элемента в исходном состоянии. Аналогично деформированное состояние определим узловыми векторами $\mathbf{r}_i^* = \mathbf{e}_k x_{ki}^*$ и $\mathbf{d}_i^* = \mathbf{e}_k \lambda_{ki}^*$ ($i, k = 1, 2$), где x_{ki}^* и λ_{ki}^* — неизвестные узловые параметры.

Деформацию и искривление конечного элемента в окружном направлении выразим через средние значения узловых параметров:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{x_1}(x_1^* - x_1), \quad \kappa_\theta = \frac{1}{x_1}(\lambda_1^* - \lambda_1), \quad (21)$$

где $x_1 = (x_{11} + x_{12})/2$, $\lambda_1 = (\lambda_{11} + \lambda_{12})/2$, $x_1^* = (x_{11}^* + x_{12}^*)/2$, $\lambda_1^* = (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*)/2$.

Для аппроксимации деформаций и искривлений в меридиональном направлении применим следующие соотношения:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}(x_{ik}^* x_{ij}^* b_k b_j - 1), \quad (22)$$

$$\kappa_s = N_i \vartheta_i \quad (i, j, k = 1, 2), \quad \gamma = \eta_2(\vartheta_1 + \vartheta_2), \quad (23)$$

где $b_1 = -1/l$, $b_2 = 1/l$, $\vartheta_i = b_j(x_{kj}^* \lambda_{ki}^* - x_{kj} \lambda_{ki})$, $N_1 = (1/l)((2s/l - 1)\eta_1 - 1)$, $N_2 = (1/l)((2s/l - 1)\eta_1 + 1)$, $0 \leq s \leq l$, $\eta_1 = 3 \left(1 + 12 \frac{B_1 D_1 - G_1^2}{B_1 S l^2}\right)^{-1}$, $\eta_2 = \frac{3 - \eta_1}{6}$, l — длина элемента; N_i — функции формы; s — локальная меридиональная координата. Выражения для κ_s и γ в (23) получены при аналитическом решении задачи об изгибе балки Тимошенко с заданными углами поворота концевых сечений [30].

Подставляя (11) и (21)-(23) в (10) и интегрируя от $s = 0$ до $s = l$, приходим к выражению полной потенциальной энергии КЭ, которая в матричных обозначениях принимает вид:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F},$$

где $\mathbf{u} = (\varepsilon_s, \vartheta_1, \vartheta_2, \varepsilon_\theta, \kappa_\theta)^T$ — вектор, описывающий упругие деформации элемента, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{F}$ — симметричная матрица жесткости и вектор температурной нагрузки, ненулевые компоненты которых представляются как

$$K_{11} = B_1 x_1 l, \quad K_{12} = -\frac{1}{6} G_1 (x_{11}(3 + \eta_1) + x_{12}(3 - \eta_1)), \quad K_{13} = \frac{1}{6} G_1 (x_{12}(3 + \eta_1) + x_{11}(3 - \eta_1)),$$

$$K_{14} = (B_1 - B_2) x_1 l, \quad K_{15} = (G_1 - G_2) x_1 l,$$

$$K_{22} = \frac{1}{6l} D_1 (x_{11}(3 + 2\eta_1 + \eta_1^2) + x_{12}(3 - 2\eta_1 + \eta_1^2)) + S x_1 l \eta_2^2, \quad K_{23} = \frac{1}{3l} D_1 x_1 (\eta_1^2 - 3) + S x_1 l \eta_2^2,$$

$$K_{24} = \frac{1}{6} (G_2 - G_1) (x_{11}(3 + \eta_1) + x_{12}(3 - \eta_1)), \quad K_{25} = \frac{1}{6} (D_2 - D_1) (x_{11}(3 + \eta_1) + x_{12}(3 - \eta_1)),$$

$$K_{33} = \frac{1}{6l} D_1 (x_{12}(3 + 2\eta_1 + \eta_1^2) + x_{11}(3 - 2\eta_1 + \eta_1^2)) + S x_1 l \eta_2^2,$$

$$K_{34} = \frac{1}{6} (G_1 - G_2) (x_{12}(3 + \eta_1) + x_{11}(3 - \eta_1)), \quad K_{35} = \frac{1}{6} (D_1 - D_2) (x_{12}(3 + \eta_1) + x_{11}(3 - \eta_1)),$$

$$K_{44} = B_1 x_1 l, \quad K_{45} = G_1 x_1 l, \quad K_{55} = D_1 x_1 l,$$

$$F_1 = N_T x_1 l, \quad F_2 = -\frac{1}{6} M_T (x_{11}(3 + \eta_1) + x_{12}(3 - \eta_1)), \quad F_3 = \frac{1}{6} M_T (x_{12}(3 + \eta_1) + x_{11}(3 - \eta_1)),$$

$$F_4 = N_T x_1 l, \quad F_5 = M_T x_1 l.$$

Изменение конфигурации элемента определяется вариациями узловых векторов (не суммировать по i):

$$\delta \mathbf{r}_i^* = \mathbf{e}_k \delta x_{ki}^*, \quad \delta \mathbf{d}_i^* = \mathbf{e}_k \mu_{ki}^* \delta \varphi_i^* \quad (i, k = 1, 2), \quad (24)$$

где $\mu_{1i}^* = -\lambda_{2i}^*$, $\mu_{2i}^* = \lambda_{1i}^*$ — направляющие косинусы вектора, лежащего в меридиональной плоскости и составляющего прямой угол с вектором $\mathbf{d}_i^*$. Как следует из (24), существует шесть независимых вариаций узловых параметров, которые образуют вектор обобщенных координат:

$$\mathbf{q}_e^T = (x_{11}^*, x_{21}^*, \varphi_1^*, x_{12}^*, x_{22}^*, \varphi_2^*).$$

Для формулировки итерационного метода решения нелинейных уравнений движения оболочки необходимо иметь коэффициенты первой и второй вариаций полной потенциальной энергии КЭ:

$$\delta \Pi_e = \mathbf{g}_e^T \delta \mathbf{q}_e, \quad \delta^2 \Pi_e = \delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{H}_e \delta \mathbf{q}_e,$$

где $\mathbf{g}_e$, $\mathbf{H}_e$ — соответственно, градиент и матрица Гессе элемента, которые вычисляются по формулам:

$$\mathbf{g}_e = (\mathbf{u}')^T (\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F}), \quad \mathbf{H}_e = (\mathbf{u}')^T \mathbf{K} \mathbf{u}' + P_i \mathbf{u}_i'' \quad (i=1, \dots, 5).$$

Здесь $\mathbf{u}'$ — матрица размерностью 5×6 , состоящая из производных вида $\partial u_i / \partial q_k$; q_k — компоненты вектора $\mathbf{q}_e$; $\mathbf{u}_i''$ — симметричные матрицы размерностью 6×6 , образованные вторыми производными $\partial^2 u_i / (\partial q_k \partial q_m)$ ($i=1, \dots, 5$; $k, m=1, \dots, 6$); P_i — компоненты вектора $\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{F}$.

Приведем отличные от нуля компоненты матриц $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{u}_i''$ (по i не суммировать):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_{ij}^*} &= x_{ik}^* b_j b_k, & \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_{mj}^*} &= \lambda_{mi}^* b_j, & \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \varphi_i} &= x_{km}^* \mu_{ki}^* b_m, & \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_{1i}^*} &= \frac{1}{2x_1}, & \frac{\partial \kappa_\theta}{\partial \varphi_i} &= \frac{1}{2x_1} \mu_{1i}^*, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_s}{\partial x_{ij}^* \partial x_{ik}^*} &= b_j b_k, & \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x_{mj}^* \partial \varphi_i} &= \mu_{mi}^* b_j, & \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial \varphi_i^2} &= -x_{km}^* \lambda_{ki}^* b_m, & \frac{\partial^2 \kappa_\theta}{\partial \varphi_i^{*2}} &= -\frac{1}{2x_1} \lambda_{1i}^* \quad (i, j, k, m=1, 2). \end{aligned}$$

Принимая допущение о том, что массовые характеристики сосредоточены в узлах, из (14) получаем выражение для кинетической энергии отдельного КЭ:

$$T_e = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{q}}_e)^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{q}}_e, \quad \mathbf{M}_e = \frac{l}{2} \text{diag}(I_0 x_{11}, I_0 x_{11}, I_2 x_{11}, I_0 x_{12}, I_0 x_{12}, I_2 x_{12}),$$

где $\mathbf{M}_e$ — матрица масс элемента.

7. Интегрирование уравнений движения

Используя принцип Гамильтона, получим нелинейные уравнения движения КЭ-модели оболочки:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad (25)$$

где $\mathbf{M}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q})$ — матрица масс, вектор обобщенных координат и градиент полной потенциальной энергии ансамбля конечных элементов соответственно. Матрица масс $\mathbf{M}$ и градиент $\mathbf{g}$ ансамбля формируются из соответствующих матриц КЭ с помощью матриц индексов, устанавливающих соответствие между локальной и глобальной нумерациями узловых неизвестных [31].

Для учета сил вязкого демпфирования используем диссипативную функцию Рэлея $R = \dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} / 2$, где $\mathbf{C}$ — матрица демпфирования. Следуя [32], добавляем в уравнение (25) силы демпфирования, определяемые как взятые со знаком минус частные производные функции Рэлея по компонентам вектора $\dot{\mathbf{q}}$. В результате уравнения движения принимают вид:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Будем отыскивать решение уравнений (26) пошаговым методом Ньюмарка [31]. Считая, что в некоторый момент t_n деформированное состояние оболочки известно, в момент $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ определяем его итерационным методом Ньютона–Рафсона по схеме:

$$(\mathbf{H}_{(p)}^{n+1} + a_1 \mathbf{M} + a_4 \mathbf{C}) \delta \mathbf{q}_{(p+1)}^{n+1} = -\mathbf{g}_{(p)}^{n+1} - (a_1 \mathbf{M} + a_4 \mathbf{C}) (\mathbf{q}_{(p)}^{n+1} - \mathbf{q}^n) + (a_2 \mathbf{M} - a_5 \mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}}^n + (a_3 \mathbf{M} - a_6 \mathbf{C}) \ddot{\mathbf{q}}^n, \quad (27)$$

где $\mathbf{H}$ — матрица Гессе полной потенциальной энергии ансамбля конечных элементов, $\delta \mathbf{q}$ — приращение вектора обобщенных координат, индекс p обозначает номер итерации, $a_1 = 1/(\alpha \Delta t^2)$, $a_2 = 1/(\alpha \Delta t)$, $a_3 = (1 - 2\alpha)/(2\alpha)$, $a_4 = \delta/(\alpha \Delta t)$, $a_5 = 1 - \delta/\alpha$, $a_6 = (1 - \delta/(2\alpha)) \Delta t$. При этом Δt — шаг по времени; α , δ — параметры схемы Ньюмарка. В расчетах принимаем $\alpha = 1/4$, $\delta = 1/2$ [31].

После завершения каждой итерации на основе найденных компонент вектора $\delta \mathbf{q}_{(p+1)}^{n+1}$ корректируем решение с помощью формул:

$$x_{ij(p+1)}^{n+1} = (x_{ij}^* + \delta x_{ij}^*)_{(p)}^{n+1}, \quad \lambda_{1i(p+1)}^{n+1} = (\lambda_{1i}^* \cos \delta \varphi_i^* - \lambda_{2i}^* \sin \delta \varphi_i^*)_{(p)}^{n+1}, \quad \lambda_{2i(p+1)}^{n+1} = (\lambda_{1i}^* \sin \delta \varphi_i^* + \lambda_{2i}^* \cos \delta \varphi_i^*)_{(p)}^{n+1}.$$

Итерационный процесс на временном шаге $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ продолжаем до достижения заданной точности определения деформированного состояния. После вычисления узловых скоростей и ускорений по формулам:

$$\ddot{\mathbf{q}}^{n+1} = a_1 (\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n) - a_2 \dot{\mathbf{q}}^n - a_3 \ddot{\mathbf{q}}^n, \quad \dot{\mathbf{q}}^{n+1} = a_4 (\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n) + a_5 \dot{\mathbf{q}}^n + a_6 \ddot{\mathbf{q}}^n,$$

осуществляем переход к следующему шагу по времени.

Граничные условия зададим как ограничения, налагаемые на вариации обобщенных координат при нулевых начальных условиях $\mathbf{q}^0 = \dot{\mathbf{q}}^0 = 0$, где верхний индекс соответствует моменту $t=0$.

8. Верификация численного алгоритма

Для проверки предлагаемого алгоритма расчета выбраны следующие три тестовые задачи.

Тест 1. Проанализируем свободные колебания замкнутого сосуда, представляющего собой цилиндрическую оболочку с полусферическими днищами (Рис. 2) и имеющего размеры: $R = 0.1143$ м, $L = 0.343$ м, $h = 0.00202$ м. Сосуд изготовлен из ФГМ с характеристиками: $E_c = 322.27 \cdot 10^9$ Па, $\rho_c = 2370$ кг/м³, $\nu_c = 0.24$, $E_m = 207 \cdot 10^9$ Па, $\rho_m = 7800$ кг/м³, $\nu_m = 0.3$. Свойства ФГМ плавно изменяются по закону (4) от внутренней — металлической — поверхности к внешней — керамической. Из условия симметрии рассмотрим дугу меридиана ABC, при этом каждый из участков AB и BC разбиваем равномерно на N конечных элементов. Граничные условия для дуги меридиана имеют вид $\delta x_{1A}^* = \delta \varphi_A^* = \delta x_{2C}^* = \delta \varphi_C^* = 0$.

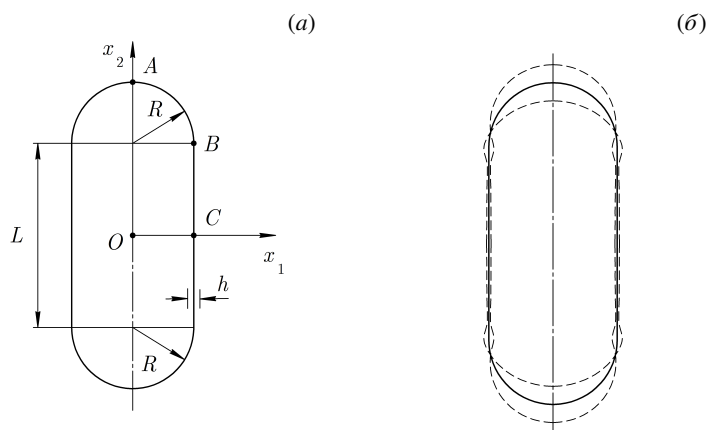


Рис. 2. Сосуд из ФГМ: геометрические параметры сосуда (а) и первая форма колебаний (б)

Уравнения свободных колебаний оболочки нетрудно получить из (25), если использовать ее геометрически линейную модель. В этом случае имеют место зависимости

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'(\mathbf{q} - \mathbf{q}^0), \quad \mathbf{g} = \mathbf{H}^0(\mathbf{q} - \mathbf{q}^0), \quad (28)$$

где $\mathbf{u}'$, $\mathbf{H}^0$ — постоянные матрицы, $\mathbf{q}^0$ — вектор обобщенных координат, определяющих исходную конфигурацию оболочки.

Полагая $\Delta T = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 + \varphi e^{i\omega t}$, где $i = \sqrt{-1}$, и учитывая (28), сводим решение (25) к обобщенной проблеме собственных значений:

$$\mathbf{H}^0 \boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi},$$

где $\boldsymbol{\varphi}$ — собственный вектор; ω — частота колебаний.

Таблица 2 содержит значения первой собственной частоты осесимметричных колебаний $f_n = \omega_n / 2\pi$ при различном числе конечных элементов N . Как видно, при увеличении числа КЭ наблюдается высокая скорость сходимости решения к значению первой частоты, которое хорошо согласуется с результатами работы [33].

Таблица 2. Первая собственная частота осесимметричных колебаний сосуда в зависимости от показателя изменения свойств ФГМ оболочки

Показатель изменения свойств ФГМ ζ	Предлагаемая геометрически линейная КЭ модель				Данные из [33]
	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	
	Значения f_n , Гц				
0.5	4899.4	6439.0	6445.4	6446.1	6451
1	4360.9	5628.3	5633.8	5634.4	5637
2	3875.3	4986.2	4990.9	4991.4	4993
∞	2941.4	3998.2	4002.0	4002.3	4002

Тест 2. Рассмотрим задачу о нестационарной теплопроводности в пластине из ФГМ, характеристики которого приведены в таблице 1.

Поверхность пластины $z = h/2$, насыщенная частицами керамики Si_3N_4 , подвергается внезапному нагреву $\Delta T = 400$ К, при этом на металлической поверхности $z = -h/2$ поддерживается постоянная температура $T_0 = 300$ К. В граничном условии (16) полагаем $f(t) = u(t)$, где $u(t)$ — функция Хевисайда. На рисунках 3, 4 представлены расчетные зависимости от времени результирующих температурных напряжений для пластины толщиной $h = 5$ мм.

Результаты тестового решения практически совпадают с решением [16]. Исключение составляет расчетный момент M_T в пластине из ФГМ с показателем $\zeta = 2$ (Рис. 4). Отличие объясняется тем, что в предлагаемом

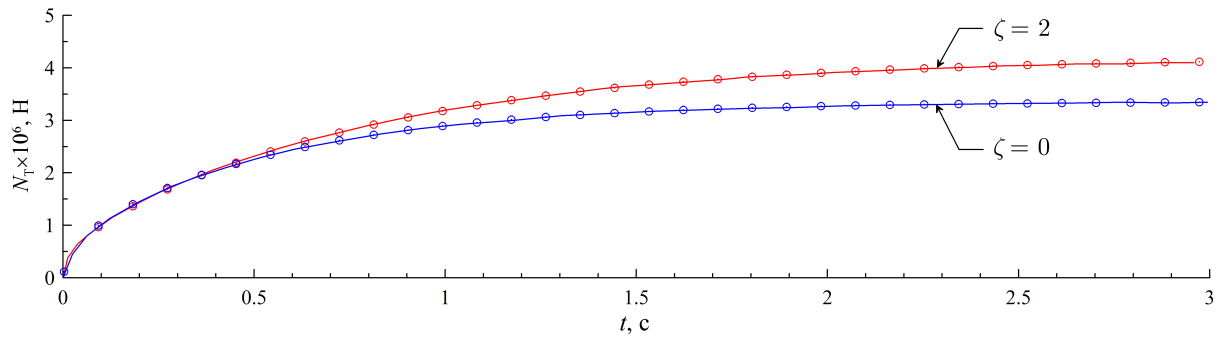


Рис. 3. Зависимость усилия N_T от времени при разных значениях показателя изменения свойств ФГМ: по предлагаемому алгоритму (кружки) и из [16] (сплошные линии)

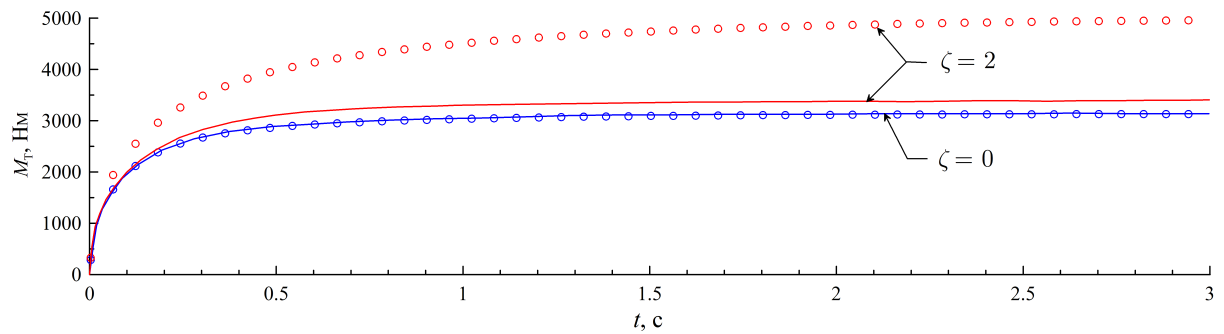


Рис. 4. Зависимость момента M_T от времени при разных ζ : по предлагаемому алгоритму (кружки) и из [16] (сплошные линии)

алгоритме момент M_T находится относительно отсчетной поверхности, определяемой координатой $z_R = -0.078 h$, а в работе [16] – относительно срединной поверхности $z = 0$. Как следует из формулы (13), сравниваемые значения M_T отличаются на величину $z_R N_T$.

Тест 3. Обратимся к задаче о тепловом прощелкивании сферического купола из изотропного материала. Рассмотрим пологую сферическую оболочку толщиной $h = 1$ мм (Рис. 5). Геометрию оболочки зададим двумя параметрами: $\lambda = 1.7$ и $\mu = 150$ [33], где $\lambda = \sqrt{12} R \beta^2 / h$, $\mu = 2 \sqrt{12} R \beta / h$, при этом R — радиус срединной поверхности, β — половина центрального угла купола. Край купола шарнирно оперт и неподвижен. В этом случае задаются следующие граничные условия: $\delta x_{1k}^* = \delta x_{2k}^* = 0$, где k — глобальный номер узла на краю купола. В вершине граничные условия имеют вид: $\delta x_{11}^* = \delta \varphi_1^* = 0$.

Примем следующие физико-механические характеристики изотропного материала, которые не изменяются при нагреве: $E = 2.0779 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3178$, $\rho = 8166$ кг/м³, $\alpha = 1.5321 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹, $\kappa = 12.1429$ Вт·(м·К)⁻¹, $c_p = 390.035$ Дж·(кг·К)⁻¹. Пусть внутренняя поверхность, обращенная к центру кривизны, подвергается мгновенному повышению температуры на величину ΔT , при этом на внешней поверхности поддерживается начальная температура $T_0 = 300$ К. В этом случае в условиях (16) полагаем $f(t) = u(t)$. Демпфирование не учитываем. В результате приложения температурной нагрузки возникает неравномерное по толщине купола поле температуры и развивается температурный изгибающий момент M_T , который может привести к прощелкиванию

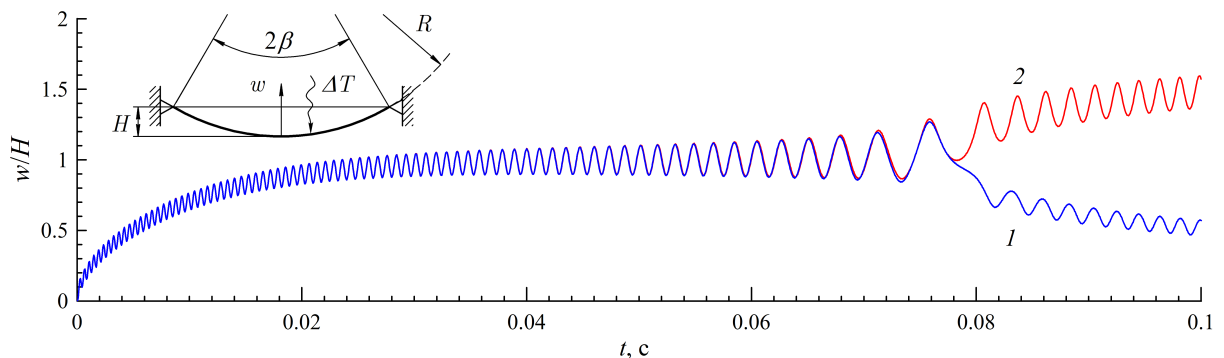


Рис. 5. Зависимости прогиба в вершине изотропной сферической оболочки от времени при различных значениях ΔT , К: 68.39 (кривая 1), 68.40 (2)

оболочки. В [34] получено, что прощелкивание имеет место при $68.25 < \Delta T_{cr} < 68.5$ К. В качестве характеристики деформированного состояния рассмотрим прогиб купола оболочки в вершине: $w = x_{21}^* - x_{21}$, где первый индекс соответствует осевой координате, а второй — номеру узла (нумерация начинается с вершины).

На рисунке 5 приведены временные зависимости прогиба w в вершине купола, отнесенные к его высоте $H = R(1 - \cos\beta)$. Прогиб, направленный к центру кривизны оболочки, считается положительным. Представленные результаты получены при разбиении меридиана купола на 40 элементов. Шаг интегрирования по времени составлял $0.5 \cdot 10^{-4}$ с. Расчетами установлено, что критическое значение температуры нагрева лежит в диапазоне $68.39 < \Delta T_{cr} < 68.40$ К. Удвоение числа КЭ приводит к аналогичному результату, что подтверждает сходимость численного решения. Полученная оценка критической температурной нагрузки хорошо согласуется с данными из [34].

По результатам на рисунке 5 можно заключить, что при заданной температурной нагрузке оболочка практически выпрямляется и совершает колебания около плоского состояния равновесия на фоне возрастающих силовых факторов N_T и M_T . Различие в поведении оболочки проявляется при $t > 0.08$ с. Если $\Delta T < \Delta T_{cr}$, хлопок не происходит, и, в силу того, что прогрессирующее деформирование совершается в условиях стесненного теплового расширения, оболочка возвращается в изогнутое состояние (кривая 1). При $\Delta T > \Delta T_{cr}$ имеет место перескок в новое состояние, где $w/H \approx 2$.

Таким образом, из анализа результатов тестирования предлагаемого алгоритма можно сделать вывод, что они хорошо согласуются с решениями других авторов.

9. Результаты вычислений и их обсуждение

Пусть край пологой сферической и конической оболочек (Рис. 6а, б), изготовленных из ФГМ, шарнирно оперт и неподвижен (формулировку граничных условий см. в Тесте 3). Изучим их динамическую реакцию на внезапный нагрев внутренней поверхности, насыщенной частицами керамики. При моделировании теплового удара в граничном условии (16) принимаем $f(t) = u(t)$. Расчеты выполняем с использованием равномерной сетки из 40 конечных элементов.

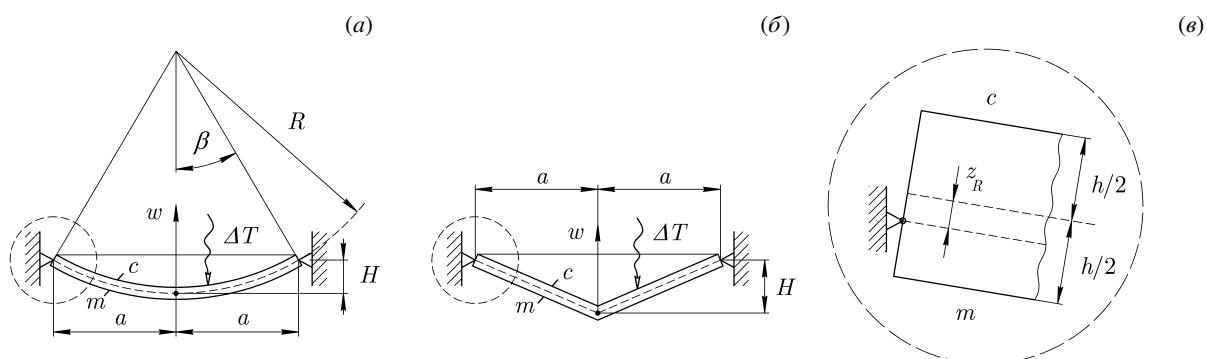


Рис. 6. Исследуемые пологие оболочки: сферическая (а), коническая (б); условия шарнирного опирания оболочек из ФГМ (в)

Обратим внимание на формулировку граничных условий шарнирного опирания при выбранной поверхности отсчета: она смещена в сторону поверхности, насыщенной частицами металла (Рис. 6в). Эксцентриситет опоры z_R может привести к результатам, заметно отличающимся от тех, которые получаются при классической постановке условий шарнирного опирания, когда ограничения налагаются на перемещения точек срединной поверхности [35].

Ниже представлены результаты исследования условий динамической потери устойчивости (прощелкивания) пологих сферических и конических оболочек, изготовленных из ФГМ с характеристиками, содержащимися в таблице 1.

9.1. Тепловое прощелкивание пологих сферических оболочек

Рассмотрим поведение пологой сферической оболочки из ФГМ при внезапном нагреве при следующих данных: $a = 0.1$ м — радиус граничного контура, $H = 0.03a$ — высота оболочки (Рис. 6а).

Для оценки динамической потери устойчивости обратимся к критерию Будянского–Рота [36]. В соответствии с ним выполним серию расчетов при различных значениях ΔT и проанализируем динамическую реакцию оболочки. Напомним, что критической называется такая температурная нагрузка ΔT_{cr} , при достижении которой в динамической реакции наблюдается качественное изменение. Считаем, что потеря устойчивости происходит в момент t_{cr} , когда кинетическая энергия оболочки достигает первого пикового значения. Заметим, что основным силовым фактором, приводящим к прощелкиванию, является момент M_T .

На рисунках 7, 8 показаны типичные временные зависимости прогибов сферических оболочек из ФГМ с показателем $\zeta = 1$. Из рисунков видно, что при тепловом ударе толщина оболочки существенно влияет на характер деформирования. Прогиб относительно тонких оболочек на начальном этапе распространения тепла развивается в сторону выпуклости оболочки (см. Рис. 7). В результате распространения тепла по толщине стенки момент

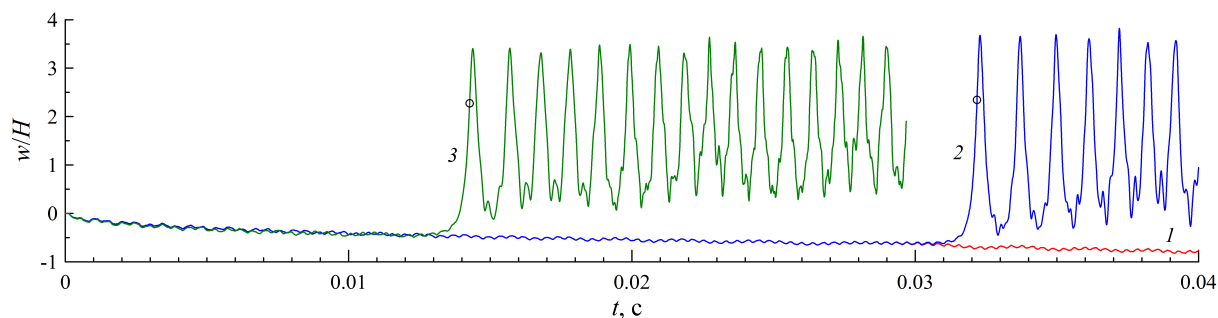


Рис. 7. Зависимости прогиба в вершине сферической оболочки от времени при $\zeta = 1$, $h/a = 1/50$ без учета демпфирования при различных значениях ΔT , К: 620.83 (кривая 1), 620.85 (2), 700.00 (3)

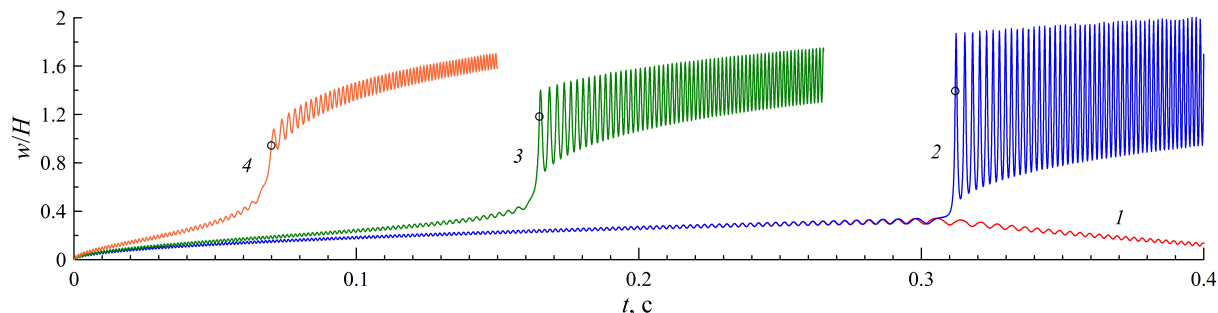


Рис. 8. Зависимости прогиба в вершине сферической оболочки от времени при $\zeta = 1$, $h/a = 1/20$ без учета демпфирования при различных значениях ΔT , К: 272.63 (кривая 1), 272.65 (2), 300 (3), 400 (4)

M_T возрастает, и в критический момент t_{cr} направление прогиба изменяется и происходит прощелкивание. При этом возбуждаются нелинейные колебания с конечной амплитудой, превышающей толщину оболочки.

Более толстым оболочкам свойственно качественно иное поведение. Заметим, что при постоянном отношении a/R увеличение относительной толщины h/a приводит к уменьшению геометрического параметра $\lambda = a/\sqrt{Rh}$, характеризующего степень пологости оболочки. Более пологая оболочка обладает меньшим сопротивлением к потере устойчивости: действительно сразу после приложения температурной нагрузки оболочка прогибается к центру кривизны (см. Рис. 8). Это значит, что на начальной стадии деформирования определяющую роль играет температурный изгибающий момент M_T . Если $\Delta T < \Delta T_{cr}$, то прогиб достигает максимума и затем монотонно уменьшается, то есть оболочка возвращается в состояние, близкое к исходному. При $\Delta T > \Delta T_{cr}$ происходит перескок в новое состояние равновесия. По сравнению с тонкими оболочками перескок совершается при меньшем изменении температуры внутренней поверхности, а критическое время при этом значительно больше.

Если $\Delta T > \Delta T_{cr}$, динамический характер потери устойчивости проявляется в меньшей степени, то есть амплитуды колебаний, которые возбуждаются в результате хлопка, уменьшаются при возрастании ΔT . Этот эффект хорошо виден у оболочек с относительной толщиной $h/a > 1/20$ (см. Рис. 8).

На рисунках 7, 8 и на последующих рисунках кружками отмечены критические моменты t_{cr} , когда кинетическая энергия оболочки становится пиковой. При достижении критического момента скорость возрастания прогиба максимальна. Следовательно, значение t_{cr} равно абсциссе точки перегиба кривой $w(t)$.

Обратимся к вопросу о влиянии демпфирования на потерю устойчивости оболочки при тепловом ударе. Результаты, представленные на рисунках 9 и 10, получены с учетом затухания колебаний, для описания которого использована модель пропорционального демпфирования (см., например, [31]):

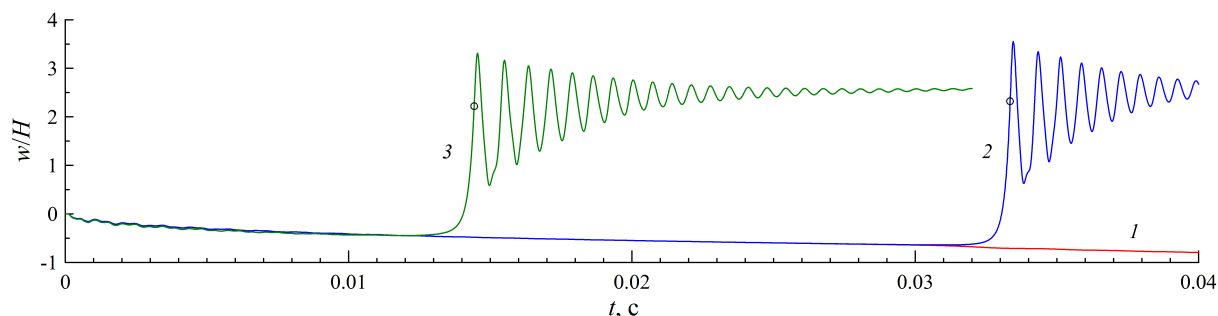


Рис. 9. Зависимости прогиба в вершине сферической оболочки от времени при $\zeta = 1$, $h/a = 1/50$ с учетом демпфирования ($\omega_n = 7138 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 142 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_2 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ с}$) при различных значениях ΔT , К: 623.2 (кривая 1), 623.3 (2), 700 (3)

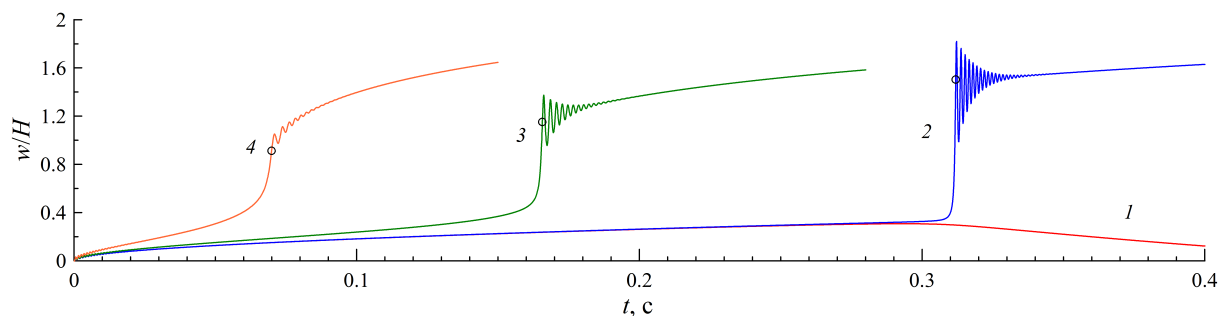


Рис. 10. Зависимости прогиба в вершине сферической оболочки от времени при $\zeta = 1$, $h/a = 1/20$ с учетом демпфирования ($\omega_n = 9572 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 191 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ с}$) при различных значениях ΔT , К: 272.7 (кривая 1), 272.8 (2), 300 (3), 400 (4)

$$\mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{M} + \alpha_2 \mathbf{H}^0.$$

Здесь $\mathbf{H}^0$ — матрица жесткости, определяемая как матрица Гессе для исходного — недеформированного — состояния оболочки; α_1, α_2 — коэффициенты, вычисляемые по формулам [37]:

$$\alpha_1 = \xi \omega_1, \quad \alpha_2 = \xi / \omega_1,$$

где ξ — относительное демпфирование (в расчетах принято $\xi = 0.02$), ω_1 — первая собственная частота колебаний оболочки.

Как следует из сравнения результатов, представленных на рисунках 7 и 9, для оболочки с отношением $h/a = 1/50$ учет сил демпфирования приводит к возрастанию критической температурной нагрузки ΔT_{cr} от 620.84 до 623.25 К. Сопоставление аналогичных результатов для оболочки с отношением $h/a = 1/20$ (см. Рис. 8 и 10) показывает, что ΔT_{cr} возрастает от 272.64 до 272.75 К. Таким образом, влияние сил демпфирования на динамическую потерю устойчивости у двух рассмотренных пологих оболочек незначительно.

Исследуем связь скорости нагрева внутренней поверхности оболочки с ее динамической устойчивостью. В граничном условии (16) примем:

$$f(t) = 1 - e^{-(\sigma t)^2}, \quad (29)$$

где σ — параметр, определяющий скорость нагрева. Предельный случай $\sigma \rightarrow \infty$ соответствует скачкообразному изменению температуры, то есть $f(t) = u(t)$. Силы демпфирования не учитываем.

В таблице 3 приведены значения времени t_{cr} и температурного скачка ΔT_{cr} , при которых происходит прощелкивание оболочек из ФГМ с показателем $\zeta = 1$. С увеличением параметра σ продолжительность нагрева до момента потери устойчивости t_{cr} уменьшается и достигает минимума при ступенчатом нагреве. Важно отметить, что скорость нагрева сказывается на величине ΔT_{cr} : чем меньше σ , тем больше значение ΔT , способное привести к прощелкиванию оболочки. Например, для оболочки с параметрами $H/a = 0.03$ и $a/h = 50$ переход в новое состояние возможен лишь при достаточно быстром нагреве. При $\sigma \leq 10 \text{ с}^{-1}$ деформированное состояние оболочки с геометрическими параметрами $H/a = 0.03$ и $a/h = 50$ остается устойчивым при любом ΔT .

Таблица 3. Параметры сферических оболочек из ФГМ с $\zeta = 1$ при разных скоростях нагрева

H/a	$\sigma, \text{с}^{-1}$	$a/h = 20$		$a/h = 50$	
		$t_{cr}, \text{с}$	$\Delta T_{cr}, \text{К}$	$t_{cr}, \text{с}$	$\Delta T_{cr}, \text{К}$
0.02	10	-	-	0.1260	572.77
	100	-	-	0.0371	273.63
	∞	-	-	0.0267	268.63
0.03	10	0.406	274.38	-	-
	100	0.324	274.79	0.0421	628.96
	∞	0.306	272.70	0.0337	620.84
0.04	10	0.279	691.52	0.1590	1378.83
	100	0.194	674.67	0.0484	956.77
	∞	0.178	674.26	0.0358	945.62

Исследуем влияние свойств материала на динамическую устойчивость сферических оболочек. Таблица 4 содержит значения критической температурной нагрузки в зависимости от относительной толщины оболочки и показателя ζ . Значения в скобках вычислены при характеристиках ФГМ, соответствующих $T_0 = 300 \text{ К}$ и не зависящих от изменения температуры. Приведенные результаты получены без учета сил демпфирования.

Таблица 4. Критическая температурная нагрузка в разнотолщинных сферических оболочках из ФГМ при $H/a = 0.03$, $\sigma = 10^3 \text{ c}^{-1}$

h/a	ζ				
	0.2	1	2	10	10^4
	$\Delta T_{cr}, \text{K}$				
1/100	614.8 (741.9)	523.8 (613.3)	523.6 (612.5)	477.5 (562.7)	355.6 (429.2)
1/50	779.1 (966.9)	623.2 (739.8)	643.2 (765.4)	660.4 (809.3)	516.9 (662.7)
1/20	396.7 (433.4)	272.8 (291.0)	282.7 (300.9)	385.2 (417.2)	439.4 (504.4)

Отметим, что допущение о независимости свойств материалов от температуры приводит к существенному завышению расчетной критической температурной нагрузки ΔT_{cr} .

При возрастании показателя ζ , то есть с увеличением объемной доли металлической составляющей, критическая температурная нагрузка в оболочках с отношением $h/a = 100$ монотонно снижается. Однако у более толстых оболочек указанная зависимость уже не является монотонной. Например, при $1/50 < h/a$ величина ΔT_{cr} имеет минимум при $\zeta \approx 1$, когда физико-механические характеристики ФГМ изменяются по толщине согласно закону, близкому к линейному. Этот эффект можно объяснить тем, что опора устанавливается на краю отсчетной поверхности, положение которой зависит от распределения плотности материала по толщине. У изотропных оболочек (случаи $\zeta \rightarrow 0$ и $\zeta \rightarrow \infty$) имеем $z_R = 0$. У оболочек из ФГМ, у которых эксцентриситет z_R максимален при $\zeta \approx 1$, опора смещена в сторону поверхности, насыщенной частицами металла (см. Рис. 6в). Такой эксцентриситет опоры относительно срединной поверхности снижает сопротивление оболочки из ФГМ к прощелкиванию.

9.2. Тепловое прощелкивание пологих конических оболочек

Рассмотрим пологую коническую оболочку с радиусом опорного контура $a = 0.1$ м и высотой H (Рис. 6б). Условия опирания и температурного нагружения аналогичны принятым выше для сферических оболочек.

На рисунках 11, 12 приведены результаты расчетов для конических оболочек высотой $H = 0.0424a$, которая определена при условии, что площадь срединной поверхности равна площади поверхности сферической оболочки размерами $a = 0.1$ м, $H = 0.03a$. Кривые отвечают случаю скачкообразного возрастания температуры, то есть $f(t) = u(t)$ в условии (16). При этом силы демпфирования не учитываются.

Таблица 5 содержит данные вычислений, иллюстрирующие влияние скорости нагрева (см. формулу (31)) на критическую температурную нагрузку. Выводы, сформулированные для сферических оболочек, справедливы и для оболочек конической формы. Сравнивая результаты для сферических и конических оболочек с равным

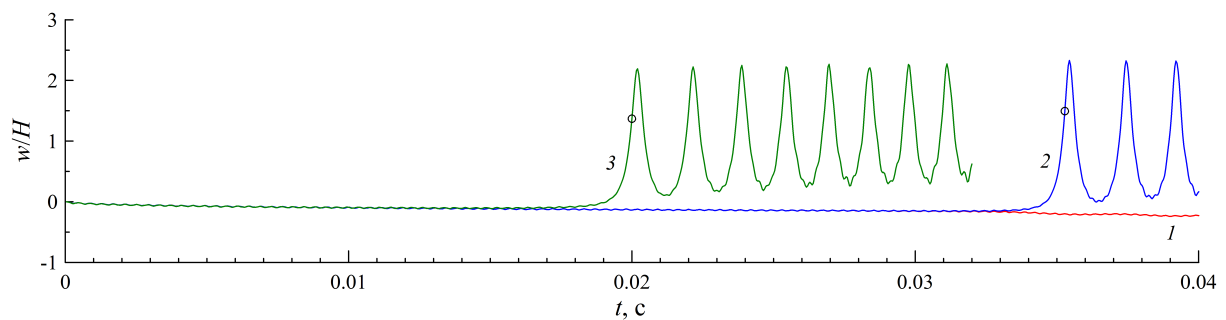


Рис. 11. Зависимости прогиба в вершине конической оболочки от времени при $\zeta = 1$, $h/a = 1/50$ без учета демпфирования при различных значениях ΔT , К: 338.3 (кривая 1), 338.4 (2), 360 (3)

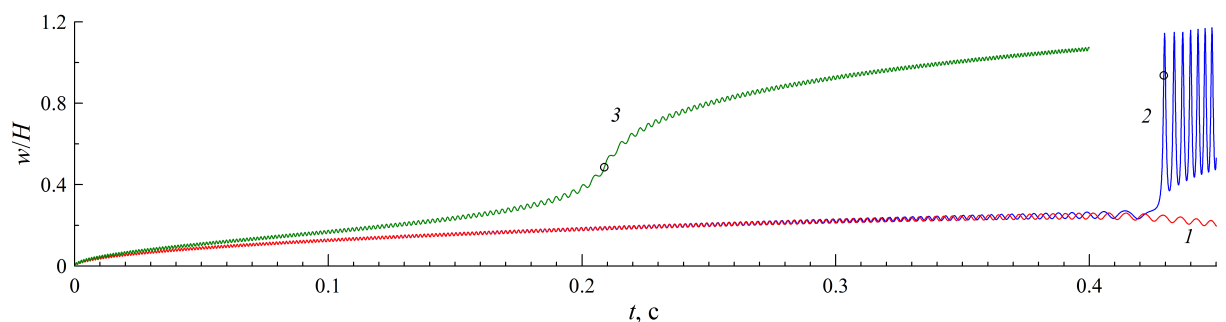


Рис. 12. Зависимости прогиба в вершине конической оболочки от времени при $\zeta = 1$, $h/a = 1/20$ без учета демпфирования при различных значениях ΔT , К: 249.5 (кривая 1), 249.6 (2), 280 (3)

Таблица 5. Параметры конических оболочек из ФГМ с показателем $\zeta = 1$ при разных скоростях нагрева

H/a	$\sigma, \text{с}^{-1}$	$a/h = 20$		$a/h = 50$	
		$t_{cr}, \text{с}$	$\Delta T_{cr}, \text{К}$	$t_{cr}, \text{с}$	$\Delta T_{cr}, \text{К}$
0.03	10	-	-	0,136	278.2
	100	-	-	0.0429	167.4
	∞	-	-	0.0352	165.8
0.04	10	0.569	224.0	0.136	501.4
	100	0.498	223.6	0.0443	305.5
	∞	0.476	223.6	0.0363	303.3
0.05	10	0.416	357.4	0.142	717.2
	100	0.327	355.5	0.0459	456.0
	∞	0.327	355.3	0.0359	452.8

отношением H/a , заключаем, что критическая температурная нагрузка, возникающая в конических оболочках, значительно ниже.

В таблице 6 приведены значения критической температурной нагрузки для конических оболочек из ФГМ при внезапном нагреве, который определяется условиями (16), (29). Значения, приведенные в скобках, получены для характеристик материалов, соответствующих $T_0 = 300 \text{ К}$ и не зависящих от изменения температуры.

Таблица 6. Критическая температурная нагрузка в разнотолщинных пологих конических оболочках из ФГМ при $H/a = 0.0424$, $\sigma = 10^3 \text{ с}^{-1}$

h/a	ζ				
	0.2	1	2	10	10^4
	$\Delta T_{cr}, \text{К}$				
1/100	370.5 (416.1)	304.9 (336.0)	306.6 (338.3)	291.9 (324.9)	226.8 (256.0)
1/50	441.8 (499.8)	338.4 (371.5)	349.4 (383.9)	381.8 (428.4)	320.5 (373.4)
1/20	343.0 (374.2)	249.7 (267.2)	253.1 (269.6)	306.2 (330.4)	319.6 (361.6)

Как и в случае сферических оболочек, допущение о независимости характеристик материалов от температуры приводит к завышенным значениям критической температурной нагрузки.

10. Выводы

Предложен численный алгоритм расчета нелинейных осесимметричных колебаний оболочек вращения из ФГМ при тепловом ударе. На примере пологих сферических и конических оболочек исследовано тепловое прощелкивание в условиях нестационарной теплопроводности по толщине оболочки при внезапном нагреве ее внутренней поверхности. Результаты проведенных расчетов позволяют сделать следующие выводы:

- 1) допущение о независимости физико-механических свойств материала от температуры существенно завышает расчетное значение критической температурной нагрузки;
- 2) скорость нагрева поверхности является важным фактором, влияющим на динамическое поведение оболочек: при определенных значениях их геометрических параметров тепловое прощелкивание возможно лишь при достаточно высокой скорости нагрева внутренней поверхности;
- 3) учет демпфирования приводит к незначительному увеличению критической температурной нагрузки.

Следует отметить ограничения и недостатки предложенного метода. Основное ограничение заключается в принятии допущения об осевой симметрии деформирования оболочек. Поэтому предложенный алгоритм применим только к круглым пластинам и пологим оболочкам вращения, потеря устойчивости которых под действием термомеханических нагрузок происходит, как известно, без нарушения осевой симметрии.

В качестве примеров в работе рассмотрены пологие оболочки канонического очертания. Однако предлагаемый алгоритм дает возможность оценивать нелинейную динамику оболочек с другой формой меридиана. Для построения КЭ-модели оболочки требуется задание не только координат узлов, но и направляющих косинусов узловых нормалей к поверхности оболочки. В силу этого меридиан оболочки должен быть гладким, не иметь точек излома, в которых нормаль не определена.

К недостаткам метода следует отнести большой объем вычислений, необходимых для определения критической температурной нагрузки.

Литература

1. Boley B.A. Thermally induced vibrations of beams // *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1956. Vol. 23, no. 2. P. 179–181.
2. Jones J.P. Thermoelastic Vibrations of a Beam // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1966. Vol. 39, no. 3. P. 542–548. DOI: 10.1121/1.1909926
3. Seibert A.G., Rice J.S. Coupled thermally induced vibrations of beams // *AIAA Journal*. 1973. Vol. 11, no. 7. P. 1033–1035. DOI: 10.2514/3.6866
4. Venkataramana J., Jana M.K. Thermally forced vibrations of beams // *Journal of Sound and Vibration*. 1974. Vol. 37, no. 2. P. 291–295. DOI: 10.1016/S0022-460X(74)80338-X
5. Гурьянов Н.Г. Круглая пластина, подверженная действию теплового удара // *Исследования по теории пластин и оболочек*. 1978. № 13. С. 160–166.
6. Stroud R.C., Mayers J. Dynamic response of rapidly heated plate elements // *AIAA Journal*. 1971. Vol. 9, no. 1. P. 76–83. DOI: 10.2514/3.6126
7. Irie T., Yamada G. Thermally Induced Vibration of Circular Plate // *Bulletin of JSME*. 1978. Vol. 21, no. 162. P. 1703–1709. DOI: 10.1299/jsme1958.21.1703
8. Das S. Vibrations of polygonal plates due to thermal shock // *Journal of Sound and Vibration*. 1983. Vol. 89. P. 471–476. DOI: 10.1016/0022-460X(83)90348-6
9. Nakajo Y., Hayashi K. Response of simply supported and clamped circular plates to thermal impact // *Journal of Sound and Vibration*. 1988. Vol. 122, no. 2. P. 347–356. DOI: 10.1016/S0022-460X(88)80359-6
10. Kraus H. Thermally induced vibrations of thin nonshallow spherical shells // *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4, no. 3. P. 500–505. DOI: 10.2514/3.3464
11. Birman V. Thermal Dynamic Problems of Reinforced Composite Cylinders // *Journal of Applied Mechanics*. 1990. Vol. 57, no. 4. P. 941–947. DOI: 10.1115/1.2897665
12. Ghiasian S.E., Kiani Y., Eslami M.R. Nonlinear thermal dynamic buckling of FGM beams // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2015. Vol. 54. P. 232–242. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.07.004
13. Khalili M.M., Keibolahi A., Kiani Y., Eslami M.R. Dynamic snap-through of functionally graded shallow arches under rapid surface heating // *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 178. 109541. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109541
14. Левяков С.В., Шеремет О.В. Колебания и потеря устойчивости стержней из функционально-градиентных материалов при внезапном нагреве // *Вычислительные технологии*. 2025. Т. 30, № 1. С. 24–40. DOI: 10.25743/ICT.2025.30.1.004
15. Zhang J., Pan S., Chen L. Dynamic thermal buckling and postbuckling of clamped–clamped imperfect functionally graded annular plates // *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 95. P. 565–577. DOI: 10.1007/s11071-018-4583-5
16. Javani M., Kiani Y., Eslami M.R. Large amplitude thermally induced vibrations of temperature dependent annular FGM plates // *Composites Part B: Engineering*. 2019. Vol. 163. P. 371–383. DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.11.018
17. Czechowski L. Study of Dynamic Buckling of FG Plate Due to Heat Flux Pulse // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2015. Vol. 20, no. 1. P. 19–31. DOI: 10.1515/ijame-2015-0002
18. Keibolahi A., Eslami M.R., Kiani Y. Assessment of Axisymmetric Dynamic Snap-Through and Thermally Induced Vibrations in FGM Cylindrical Shells Under Instantaneous Heating // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2025. Vol. 25, no. 4. 2550032. DOI: 10.1142/S0219455425500324
19. Javani M., Kiani Y., Eslami M.R. Nonlinear axisymmetric response of temperature-dependent FGM conical shells under rapid heating // *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230. P. 3019–3039. DOI: 10.1007/s00707-019-02459-y
20. Prakash T., Singha M.K., Ganapathi M. Nonlinear Dynamic Thermal Buckling of Functionally Graded Spherical Caps // *AIAA Journal*. 2007. Vol. 45, no. 2. P. 505–508. DOI: 10.2514/1.21578
21. Talebi S., Hedayati R., Sadighi M., Ashoori A.R. Dynamic thermal buckling of spherical porous shells // *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 172. 108737. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108737
22. Javani M., Kiani Y., Eslami M.R. Nonlinear dynamic response of a temperature-dependent FGM spherical shell under various boundary conditions and thermal shocks: Examination of dynamic snap-through // *Thin-Walled Structures*. 2024. Vol. 199. 111796. DOI: 10.1016/j.tws.2024.111796
23. Shariyat M. Dynamic thermal buckling of suddenly heated temperature-dependent FGM cylindrical shells, under combined axial compression and external pressure // *International Journal of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45. P. 2598–2612. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.12.015
24. Bich D.H., Dung D.V., Hoa L.K. Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects // *Composite Structures*. 2012. Vol. 94, no. 9. P. 2952–2960. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.04.012
25. Zhang J., Chen S., Zheng W. Dynamic buckling analysis of functionally graded material cylindrical shells under thermal shock // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020. Vol. 32, no. 4. P. 1095–1108. DOI: 10.1007/s00161-019-00812-z
26. Verma K.P., Maiti D.K. Transient analysis of thermo-mechanically shock loaded four-parameter power law functionally graded shells // *Composite Structures*. 2021. Vol. 257. 113388. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.113388

27. Shen H.-S. Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2016. 266 p. DOI: 10.1201/9781420092578
28. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова Думка, 1970. 308 с.
29. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
30. Levyakov S.V. Axisymmetric Snap Buckling of Thermally Preloaded Functionally Graded Shells Under External Pressure // Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering. 2026. Vol. 50, no. 1. P. 209–226. DOI: 10.1007/s40997-025-00930-x
31. Bathe K.J., Wilson E.L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, 1976. 528 p.
32. Touzé C., Amabili M., Thomas O. Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2008. Vol. 197, no. 21–24. P. 2030–2045. DOI: 10.1016/j.cma.2008.01.002
33. Moita J.S., Araújo A.L., Franco Correia V., Mota Soares C.M. Vibrations of functionally graded material axisymmetric shells // Composite Structures. 2020. Vol. 248. 112489. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112489
34. Javani M., Kiani Y., Eslami M.R. Dynamic snap-through of shallow spherical shells subjected to thermal shock // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2020. Vol. 179. P. 104028. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2019.104028
35. Коробейников С.Н., Шутков А.В. Выбор отсчетной поверхности в уравнениях пластин и оболочек // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 6. С. 38–59.
36. Budiansky B., Roth R.S. Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells // Collected Papers on Stability of Shell Structures. TN D-1510, NASA. 1962. P. 597–606.
37. Chen H., Virgin L.N. Dynamic analysis of modal shifting and mode jumping in thermally buckled plates // Journal of Sound and Vibration. 2004. Vol. 278, no. 1/2. P. 233–256. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.10.054

Сведения об авторах:

Левяков Станислав Вячеславович, ктн, доц., Новосибирский государственный технический университет (НГТУ), 630073, г. Новосибирск, пр-т К. Маркса, д. 20; e-mail: stan-levyakov@yandex.ru; ORCID: 0000-0002-8383-956X

Research article

Axisymmetric buckling of FGM shells under thermal shock

S.V. Levyakov

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

The paper deals with the problem of vibrations and dynamic buckling of FGM shells of revolution subjected to thermal shock. A finite-element algorithm is developed for studying geometrically nonlinear vibration of shells under unsteady heat conduction through the shell wall. A two-node shell finite element is formulated taking into account transverse shear deformation based on the first-order shear deformation theory by S. Timoshenko. To avoid the shear locking effect, the strains of the element are approximated using an exact analytical solution of the bending problem obtained in the framework of the Timoshenko beam theory. The reference surface used is the surface, passing through the centers of mass of the transverse fibers, which makes it possible to separate the inertial terms corresponding to translational motion and rotation. Equations of motion of the finite-element model are solved numerically using a step-by-step method based on the implicit Newmark integration scheme. At each time step of integration, temperature loads and stiffness characteristics of the shell are determined by numerically solving the unsteady heat conduction problem formulated with account of temperature-dependent properties of the material. Deformed configuration of the shell at each time step is determined using the Newton-Raphson iterative procedure. The proposed numerical algorithm is verified by comparing the numerical solution of test problems with the data available in the literature. Dynamic snap-through buckling of shallow spherical and conical shells, experiencing a sudden rise of temperature at the inner surface, is studied. The effect of material properties, geometrical parameters, and the rate of heating of the inner surface on the dynamic loss of stability is discussed.

Keywords: shell of revolution, functionally-graded material, thermal shock, unsteady heat conduction, geometrical nonlinearity, buckling, finite element

Received: 04.03.2026 / *Published online:* 05.08.2026

References

1. Boley B.A. Thermally induced vibrations of beams. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1956. Vol. 23, no. 2. P. 179–181.
2. Jones J.P. Thermoelastic Vibrations of a Beam. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1966. Vol. 39, no. 3. P. 542–548. DOI: 10.1121/1.1909926
3. Seibert A.G., Rice J.S. Coupled thermally induced vibrations of beams. *AIAA Journal*. 1973. Vol. 11, no. 7. P. 1033–1035. DOI: 10.2514/3.6866
4. Venkataramana J., Jana M.K. Thermally forced vibrations of beams. *Journal of Sound and Vibration*. 1974. Vol. 37, no. 2. P. 291–295. DOI: 10.1016/S0022-460X(74)80338-X
5. Gur'yanov N.G. Kruglaya plastina, podverzhennaya deystviyu teplovogo udara. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek*. 1978. No. 13. P. 160–166.
6. Stroud R.C., Mayers J. Dynamic response of rapidly heated plate elements. *AIAA Journal*. 1971. Vol. 9, no. 1. P. 76–83. DOI: 10.2514/3.6126
7. Irie T., Yamada G. Thermally Induced Vibration of Circular Plate. *Bulletin of JSME*. 1978. Vol. 21, no. 162. P. 1703–1709. DOI: 10.1299/jsme1958.21.1703
8. Das S. Vibrations of polygonal plates due to thermal shock. *Journal of Sound and Vibration*. 1983. Vol. 89. P. 471–476. DOI: 10.1016/0022-460X(83)90348-6
9. Nakajo Y., Hayashi K. Response of simply supported and clamped circular plates to thermal impact. *Journal of Sound and Vibration*. 1988. Vol. 122, no. 2. P. 347–356. DOI: 10.1016/S0022-460X(88)80359-6
10. Kraus H. Thermally induced vibrations of thin nonshallow spherical shells. *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4, no. 3. P. 500–505. DOI: 10.2514/3.3464
11. Birman V. Thermal Dynamic Problems of Reinforced Composite Cylinders. *Journal of Applied Mechanics*. 1990. Vol. 57, no. 4. P. 941–947. DOI: 10.1115/1.2897665
12. Ghiasian S.E., Kiani Y., Eslami M.R. Nonlinear thermal dynamic buckling of FGM beams. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2015. Vol. 54. P. 232–242. DOI: 10.1016/j.euromechso1.2015.07.004
13. Khalili M.M., Keibolahi A., Kiani Y., Eslami M.R. Dynamic snap-through of functionally graded shallow arches under rapid surface heating. *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 178. 109541. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109541
14. Levyakov S.V., Sheremet O.V. Thermally induced vibrations and buckling of FGM rods subjected to sudden heating. *Computational Technologies*. 2025. Vol. 30, no. 1. P. 24–40. DOI: 10.25743/ICT.2025.30.1.004
15. Zhang J., Pan S., Chen L. Dynamic thermal buckling and postbuckling of clamped–clamped imperfect functionally graded annular plates. *Nonlinear Dynamics*. 2019. Vol. 95. P. 565–577. DOI: 10.1007/s11071-018-4583-5
16. Javani M., Kiani Y., Eslami M.R. Large amplitude thermally induced vibrations of temperature dependent annular FGM plates. *Composites Part B: Engineering*. 2019. Vol. 163. P. 371–383. DOI: 10.1016/j.compositesb.2018.11.018
17. Czechowski L. Study of Dynamic Buckling of FG Plate Due to Heat Flux Pulse. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2015. Vol. 20, no. 1. P. 19–31. DOI: 10.1515/ijame-2015-0002
18. Keibolahi A., Eslami M.R., Kiani Y. Assessment of Axisymmetric Dynamic Snap-Through and Thermally Induced Vibrations in FGM Cylindrical Shells Under Instantaneous Heating. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2025. Vol. 25, no. 4. 2550032. DOI: 10.1142/S0219455425500324
19. Javani M., Kiani Y., Eslami M.R. Nonlinear axisymmetric response of temperature-dependent FGM conical shells under rapid heating. *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230. P. 3019–3039. DOI: 10.1007/s00707-019-02459-y
20. Prakash T., Singha M.K., Ganapathi M. Nonlinear Dynamic Thermal Buckling of Functionally Graded Spherical Caps. *AIAA Journal*. 2007. Vol. 45, no. 2. P. 505–508. DOI: 10.2514/1.21578
21. Talebi S., Hedayati R., Sadighi M., Ashoori A.R. Dynamic thermal buckling of spherical porous shells. *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 172. 108737. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108737
22. Javani M., Kiani Y., Eslami M.R. Nonlinear dynamic response of a temperature-dependent FGM spherical shell under various boundary conditions and thermal shocks: Examination of dynamic snap-through. *Thin-Walled Structures*. 2024. Vol. 199. 111796. DOI: 10.1016/j.tws.2024.111796
23. Shariyat M. Dynamic thermal buckling of suddenly heated temperature-dependent FGM cylindrical shells, under combined axial compression and external pressure. *International Journal of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45. P. 2598–2612. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.12.015
24. Bich D.H., Dung D.V., Hoa L.K. Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects. *Composite Structures*. 2012. Vol. 94, no. 9. P. 2952–2960. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.04.012
25. Zhang J., Chen S., Zheng W. Dynamic buckling analysis of functionally graded material cylindrical shells under thermal shock. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2020. Vol. 32, no. 4. P. 1095–1108. DOI: 10.1007/s00161-019-00812-z
26. Verma K.P., Maiti D.K. Transient analysis of thermo-mechanically shock loaded four-parameter power law functionally graded shells. *Composite Structures*. 2021. Vol. 257. 113388. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.113388

27. Shen H.-S. Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. CRC Press, 2016. 266 p. DOI: 10.1201/9781420092578
28. Kovalenko A.D. Osnovy termouprugosti. Kiev: Naukova Dumka, 1970. 308 p.
29. Zienkiewicz O.C., Morgan K. Finite Elements and Approximation. New York: John Wiley & Sons, 1983. 328 p.
30. Levyakov S.V. Axisymmetric Snap Buckling of Thermally Preloaded Functionally Graded Shells Under External Pressure. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering. 2026. Vol. 50, no. 1. P. 209–226. DOI: 10.1007/s40997-025-00930-x
31. Bathe K.J., Wilson E.L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, 1976. 528 p.
32. Touzé C., Amabili M., Thomas O. Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2008. Vol. 197, no. 21–24. P. 2030–2045. DOI: 10.1016/j.cma.2008.01.002
33. Moita J.S., Araújo A.L., Franco Correia V., Mota Soares C.M. Vibrations of functionally graded material axisymmetric shells. Composite Structures. 2020. Vol. 248. 112489. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112489
34. Javani M., Kiani Y., Eslami M.R. Dynamic snap-through of shallow spherical shells subjected to thermal shock. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2020. Vol. 179. P. 104028. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2019.104028
35. Korobeinikov S.N., Shutov A.V. A choice of the reference surface in plate and shell equations. Computational Technologies. 2003. Vol. 8, no. 6. P. 38–59.
36. Budiansky B., Roth R.S. Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells. Collected Papers on Stability of Shell Structures. TN D-1510, NASA. 1962. P. 597–606.
37. Chen H., Virgin L.N. Dynamic analysis of modal shifting and mode jumping in thermally buckled plates. Journal of Sound and Vibration. 2004. Vol. 278, no. 1/2. P. 233–256. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.10.054