

Научная статья

## Численное исследование взаимодействия сверхзвукового потока вязкого газа с поперечной струёй, вдуваемой под углом через щель в пластине

Е.В. Бабич, Е.В. Колесник

Санкт-Петербургский университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Представлены результаты комплексного численного исследования взаимодействия сверхзвукового потока воздуха с числом Маха, равным 3.5, и стационарной струи, вдуваемой через щель в обтекаемой пластине. Математическая модель основана на осреднённых по Рейнольдсу уравнениях Навье–Стокса, решаемых методом конечных объёмов. На первом этапе выполнены методические расчёты, позволившие обосновать выбор оптимальных параметров расчётной сетки, схемы аппроксимации конвективных потоков и модели турбулентности. Установлено, что наилучшее соответствие экспериментальным данным обеспечивает модель турбулентности Спаларта–Аллмараса с поправкой на сжимаемость в сочетании со схемой AUSM+up второго порядка точности. После валидации вычислительной методики проведено систематическое параметрическое исследование влияния двух факторов: относительного давления в струе (в диапазоне от 8.74 до 63.5) и угла вдува (от  $-30^\circ$  до  $30^\circ$ ). Показано, что увеличение интенсивности струи приводит к практически линейному росту длины отрывной зоны перед щелью, глубины проникновения струи в набегающий поток и результирующей силы, действующей на пластину. Наибольшая результативность вдува, характеризуемая коэффициентом усиления, достигается при относительном давлении, равном 17.12; его дальнейшее повышение сопровождается интенсификацией ударно-волнового взаимодействия и снижением эффективности вдува. Исследование влияния угла вдува выявило выраженную асимметрию между попутным и противопоточным направлениями вдува. Противопоточный вдув приводит к формированию обширных отрывных зон, интенсивных скачков уплотнения и значительных потерь полного давления. Попутный вдув, напротив, способствует прижатию струи к поверхности, ослаблению ударно-волновой структуры и снижению потерь.

*Ключевые слова:* высокоскоростные течения, численное моделирование, RANS, вязко-невязкое взаимодействие, щелевой вдув, поперечная струя

*Получение:* 05.12.2025 / *Публикация онлайн:* 01.06.2026

УДК 519.6:533.6:011

### 1. Введение

Задача о поперечно-щелевом вдуве струи в сверхзвуковой поток представляет значительный практический интерес в связи с широким спектром инженерных приложений. Например, поперечно-щелевой вдув используется в системах управления сверхзвуковыми летательными аппаратами для стабилизации режима обтекания [1], в гиперзвуковых прямооточных воздушно-реактивных двигателях для улучшения смесеобразования и горения топлива [2], а также встречается в устройствах аэродинамического торможения и теплозащиты элементов конструкций, подверженных интенсивному нагреву. Но поперечно-щелевой вдув, хотя и представляет собой экономичное и технологически простое средство управления потоком, формирует пространственную структуру течения, существенно осложняющую прогнозирование ключевых параметров потока.

Проблема поперечно-щелевого вдува в сверхзвуковой поток, являющаяся предметом систематического изучения на протяжении свыше 70-ти лет, первоначально исследовалась в рамках экспериментального подхода, который позволил идентифицировать основные физические механизмы взаимодействия [3–5]. Однако ограничения эксперимента затрудняют детальное изучение структуры и закономерностей внутреннего развития течения, поэтому всё более распространённым инструментом анализа подобных течений становится математическое моделирование. Корректное воспроизведение всех эффектов, характерных для влияния струи, вдуваемой в сверхзвуковой поток, предъявляет высокие требования к надёжности численных методов. Этим обусловлен значительный объём публикаций, направленных на верификацию и валидацию при тестировании методов расчёта: часть работ посвящена решателям [6, 7], в то время как в других анализируется роль используемых моделей турбулентности [8–11]. В статье [12] расчёты проводились в RANS постановке с аппроксимацией конвективных потоков схемами третьего порядка точности, а в работах [13–15] авторы прибегали при моделировании к методу больших вихрей (LES) или гибриднему RANS/LES методу. Применение методов повышенной точности позволяет подробно исследовать когерентные структуры и механизмы формирования неустойчивостей, однако они не приемлемы для параметрических исследований [16], поскольку требуют большой объём вычислительных ресурсов.

Несмотря на длительную историю существования задачи поперечно-щелевого вдува, физические механизмы взаимодействия струи и потока остаются недостаточно изученными даже в рамках двумерных постановок. Существенная нелинейность течения ограничивает возможности прогнозирования влияния управляющих параметров на структуру течения, что обуславливает необходимость проведения комплексных параметрических исследований зависимости аэродинамических, тепловых и смесительных характеристик от управляющих параметров (интенсивности струи, геометрии вдува).

В настоящей работе представлены результаты численного решения модельной задачи двумерного обтекания пластины сверхзвуковым потоком воздуха при воздействии на него стационарной струи того же состава, вдуваемой через щель в пластине. Постановка основана на экспериментальной работе [4], что даёт возможность

провести подробные методические расчёты, нацеленные на выбор оптимальной вычислительной модели, включающей описание турбулентности, используемых численных схем и подбор оптимальных параметров расчётных сеток. После валидации задачи проводится параметрическое исследование влияния угла струи на структуру течения и его основные характеристики.

## 2. Математическая модель и численный метод

Осреднённые по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса решаются с использованием метода конечных объёмов. Применительно к расчётной ячейке (контрольному объёму) интегральная формулировка законов сохранения массы, импульса и энергии имеет вид:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \tau} d\Omega + \sum_b \int_{S_b} \mathbf{F}^{\Sigma} dS = 0.$$

Здесь  $\Omega$  — контрольный объём с числом граней  $b$ ;  $S_b$  — площадь грани;  $\mathbf{F}^{\Sigma}$  — вектор потоков на грани контрольного объёма;  $\mathbf{w} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E]$  — вектор консервативных переменных, где  $\rho$  — плотность,  $u \equiv u_1$ ,  $v \equiv u_2$ ,  $w \equiv u_3$  — компоненты вектора скорости в декартовой системе координат,  $E$  — полная энергия.

Вектор  $\mathbf{F}^{\Sigma}$  представляет собой сумму невязких и вязких потоков,  $\mathbf{F}^{\Sigma} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{visc}$ , определяемых следующими выражениями:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \\ \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} u + P \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} \\ \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} v + P \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} \\ \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} w + P \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \\ \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{visc} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{i} \\ -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{j} \\ -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} \\ -\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{q}) \end{bmatrix},$$

где  $P$  — давление,  $H$  — полная энтальпия,  $\mathbf{n}$  — нормаль к грани,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — единичные векторы декартовой системы координат ( $x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3$ ).

Полные энергия и энтальпия находятся по формулам:

$$E = c_V T + V^2 / 2, \quad H = c_P T + V^2 / 2,$$

где  $c_V, c_P$  — удельные теплоёмкости при постоянных объёме  $V$  и давлении  $P$  в потоке, которые предполагаются постоянными.

Давление  $P$ , плотность  $\rho$  и внутренняя энергия  $e = c_V T$  связаны между собой уравнением состояния идеального газа:

$$P = (\gamma - 1) \rho e,$$

где  $\gamma$  — коэффициент удельной теплоёмкости ( $\gamma = c_P / c_V$ ).

Компоненты тензора напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  и вектора теплового потока  $\mathbf{q}$  вычисляются как

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right], \quad q_j = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right).$$

Здесь  $T$  — температура;  $\mu$  — сумма молекулярной и турбулентной вязкостей,  $\mu = \mu_m + \mu_t$ ;  $\lambda$  — сумма молекулярной и турбулентной теплопроводностей:  $\lambda = \lambda_m + \lambda_t = \lambda_m + c_P \mu_t / Pr_t$ , где  $Pr_t$  — турбулентное число Прандтля. Молекулярная вязкость воздуха  $\mu_m$  оценивается с помощью закона Сазерленда, молекулярная теплопроводность связана с вязкостью через постоянное число Прандтля  $Pr$ . Турбулентная вязкость рассчитывается в соответствии с выбранной моделью турбулентности.

Для расчёта невязких потоков на гранях используется локально квазиодномерный подход, то есть с рассматриваемой гранью связываются понятия параметров «слева» и «справа». Реконструкция значений переменных на грани со вторым порядком точности осуществляются методом, взятым из [17], согласно которому значение на грани восстанавливается по градиенту значений в центрах правой и левой ячеек. Вычисление конвективных потоков на гранях контрольных объёмов проводится на основе схем второго порядка точности (AUSM+up, Roe и HLL), для монотонизации решения применяется квазиодномерный ограничитель van Albada (детали численного метода описываются в [18]). Расчёт вязких потоков выполняется по гибридной схеме второго порядка с поправкой на неортогональность.

Численные решения получаются с применением конечно-объёмного «неструктурированного» программного кода SINF/Flag-S, разрабатываемого в СПбПУ [19] и прошедшего многолетнюю апробацию. Все вычислительные эксперименты реализуются в стационарной постановке, для получения сходящегося решения используется неявная схема установления с локальным шагом по времени. Для проведения расчетов использовались вычислительные ресурсы суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого ([www.scc.spbstu.ru](http://www.scc.spbstu.ru)).

### 3. Постановка задачи и вычислительные аспекты

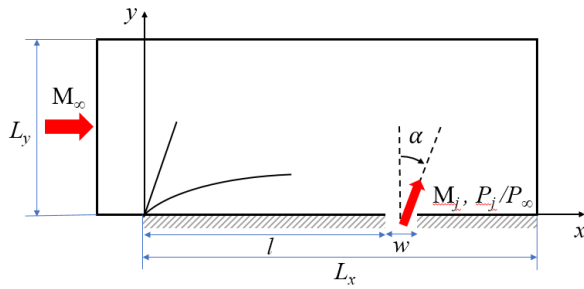


Рис. 1. Схема расчётной области

Пластина обтекается сверхзвуковым воздушным потоком, имеющим параметры: единичное число Рейнольдса  $Re = 1.38 \cdot 10^7$  1/м; число Рейнольдса, построенное по расстоянию от передней кромки пластины до щели  $Re_l = 4.3 \cdot 10^6$ ; число Маха  $M_\infty = 3.5$ , в который перпендикулярно снизу через щелевое отверстие в пластине вдувается стационарная струя того же состава. Расчётная область (Рис. 1) представляет прямоугольник высотой  $L_y = 0.075$  м и, кроме пластины, включает небольшой (0.01 м) начальный участок перед пластиной. Длина пластины составляет  $L_x = 0.3$  м, расстояние от передней кромки пластины до щели —  $l = 228.47$  мм, размер щели по горизонтали —  $w = 0.2667$  мм. В качестве рабочего газа используется воздух коэффициент (удельной теплоёмкости  $\gamma = 1.4$ , удельная теплоёмкость  $c_p = 1005$  Дж/(кг·К), число Прандтля  $Pr = 0.71$ ). Полная температура набегающего потока равняется  $T_{0\infty} = 298.4$  К. Число Маха вдуваемой струи воздуха в момент выхода на поверхность пластины (на срезе щели) полагается равным 1. Расчёты выполнены для четырёх значений отношения давления струи к давлению набегающего потока: [4]:  $P_j/P_\infty = \{8.74, 17.12, 42.79, 63.5\}$ , отношение для температуры не меняется:  $T_j/T_\infty = 3.45$ . В рамках параметрического исследования угол вдува струи  $\alpha$  варьируется в диапазоне от  $-30$  до  $30^\circ$  с шагом  $10^\circ$  (направление угла струи отсчитывается по часовой стрелке от оси  $y$ ).

Решаются осреднённые по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса для совершенного газа. Предписываются следующие граничные условия: на входе и на срезе отверстия — однородные профили с заданными параметрами для сверхзвукового набегающего потока и вдуваемой струи; на пластине — условие прилипания (адиабатическая стенка), на верхней границе области — неотражающее условие, на правой границе — выходное условие. Интенсивность турбулентности —  $Tu$ , и отношение турбулентной вязкости к молекулярной —  $TVR$ , для входных границ, соответственно, составляют 0.01 и 1%.

Если не указывается иное, то вычисление конвективных потоков на гранях контрольных объёмов проводится на основе схемы AUSM+up второго порядка точности, а для моделирования турбулентности используется модель Spalart Allmaras с учётом поправки на сжимаемость.

### 4. Описание основной структуры течения

Струя, поперечно вдуваемая в сверхзвуковой поток, формирует зону вязко-невязкого взаимодействия, характеризующуюся сложной ударно-волновой структурой, вихрями и сдвиговыми слоями (Рис. 2, [20]). Также струя создаёт препятствие набегающему потоку, формируя перед собой головной скачок уплотнения (СУ), подобно тому, как это происходит при обтекании затушенного тела [18]. Взаимодействие головного скачка с пограничным слоем вызывает отрыв последнего, сопровождающийся косым скачком уплотнения и увеличением давления на поверхности пластины. Непосредственно в области вдува формируется конфигурация, состоящая из бочки Маха и диска Маха, аналогичная наблюдаемой в струйных течениях реактивных двигателей [21]. За диском Маха поток расширяется, поэтому вблизи поверхности пластины формируется рециркуляционная область низкого давления и косой скачок, связанный с присоединением потока к поверхности, который приводит к увеличению давления.

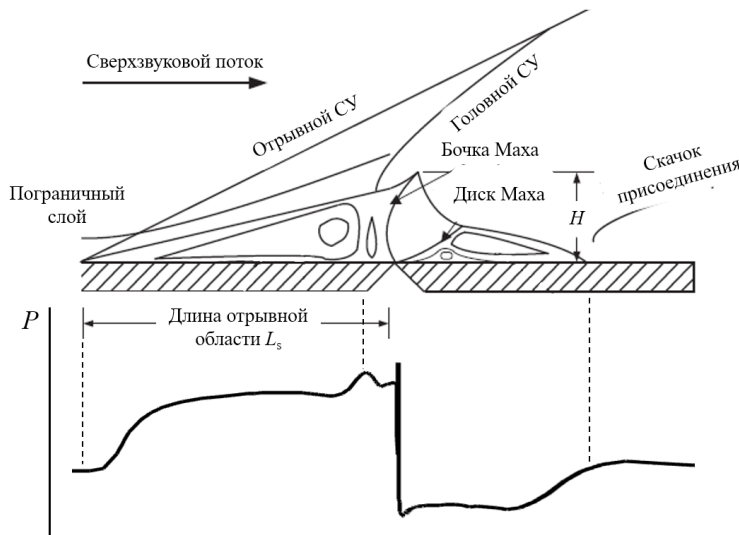


Рис. 2. Схема структуры течения, формирующейся при вдуве поперечной струи в сверхзвуковой поток, и распределение давления вдоль поверхности пластины

## 5. Методические исследования

### 5.1. Анализ сеточной сходимости

Общий вид использованной в расчётах сетки с прямоугольным типом элементов (base mesh) представлен на рисунке 3. Число ячеек составляло 40590, а размер первой пристенной ячейки равнялся  $\approx 10^{-6}$  м, что обеспечивало выполнение условия  $y^+ < 1$  по всей поверхности пластины, где формируется турбулентный пограничный слой, включая зону взаимодействия потока со струей. Для рассматриваемых высоких чисел Рейнольдса заданная длина начального ламинарного участка пренебрежимо мала, поэтому погрешности, вносимые моделями турбулентности вблизи передней кромки, не влияли на результаты в зоне взаимодействия.

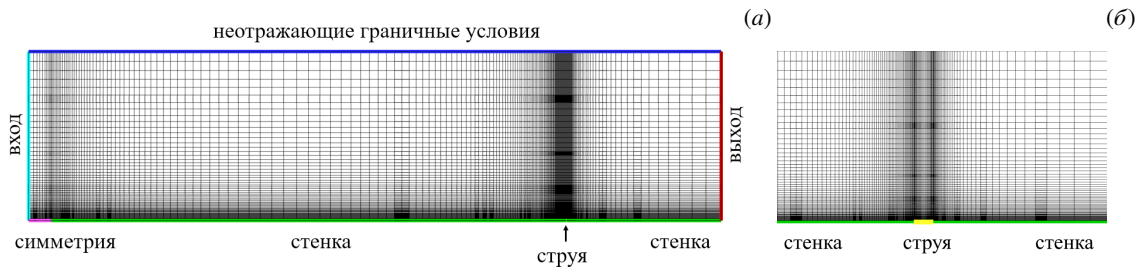


Рис. 3. Вид расчётной сетки во всей области (а) и в увеличенном виде вблизи отверстия вдува (б)

Для исследования сеточной сходимости также проведены расчёты на измельчённой сетке (fine mesh). Сетка получалась из исходной путём измельчения ячеек вблизи щелевого отверстия: по поперечному направлению в два раза с сохранением размера первой прилегающей к поверхности пластины ячейки; по продольному направлению в два раза только возле отверстия вдува струи. В итоге число ячеек измельчённой сетки составило 112 000. Максимальный размер ячейки по горизонтали в области отверстия равнялся 0.01 мм для базовой сетки и 0.005 мм для измельчённой, а в поперечном направлении — 5 и 3 мм соответственно.

На рисунке 4 приведены распределения по поверхности пластины относительного давления и коэффициента трения ( $C_f = 2\tau_w / \rho_\infty V_\infty^2$ ), полученные на базовой и измельчённой сетках для минимального и максимального значения  $P_j / P_\infty$ . Для значения  $P_j / P_\infty = 8.74$  кривые с высокой точностью совпадают друг с другом, а при  $P_j / P_\infty = 63.5$  есть незначительные отличия в зоне отрыва и присоединения потока к пластине. Максимальное отклонение наблюдается у давления в задней отрывной зоне, но оно не превышает 9%. Результаты настоящего исследования позволяют считать базовую сетку достаточной для проведения дальнейших расчётов. Дополнительно исследовано влияние длины расчётной области, подтвердившее, что выбранные для неё размеры являются достаточными.

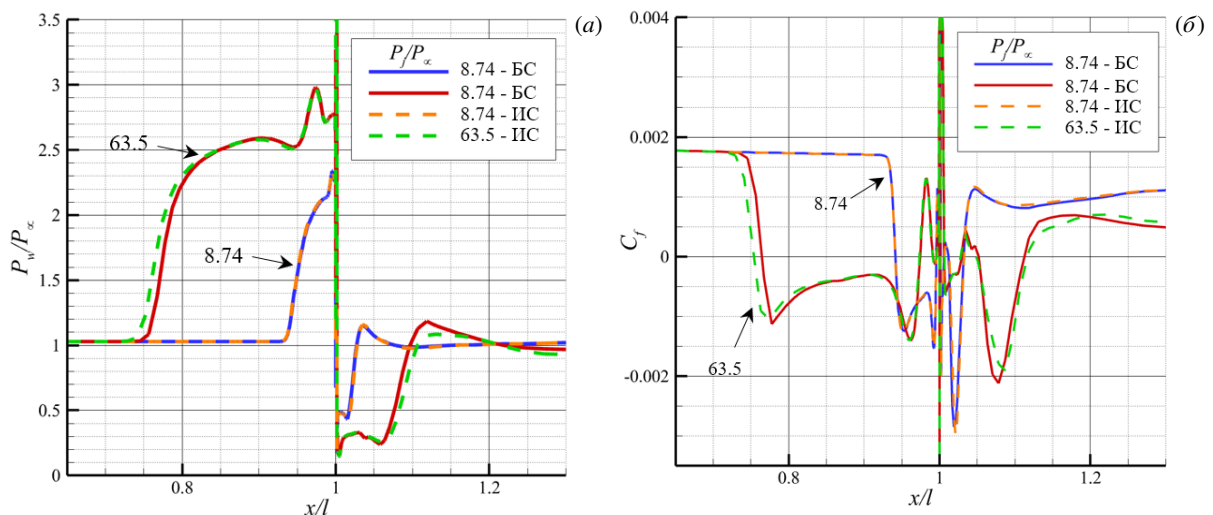
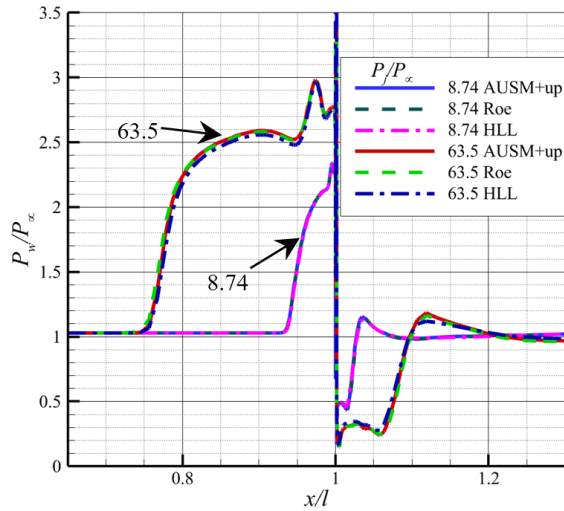


Рис. 4. Распределения давления (а) и коэффициента трения вдоль поверхности пластины (б) для значений  $P_j / P_\infty = 8.74$  и 63.5, рассчитанные на базовой (БС) и измельчённой (ИС) сетках при вдуве струи под углом  $\alpha = 0^\circ$

### 5.2. Анализ влияния схемы аппроксимации конвективных потоков

Для исследования влияния схем аппроксимации конвективных потоков выбраны три схемы второго порядка точности: AUSM+up, Roe и HLL. По распределениям давления (Рис. 5), построенным по данным расчётов с использованием этих схем видно, что при  $P_j / P_\infty = 8.74$  вид схемы сказывается на результатах незначительно.

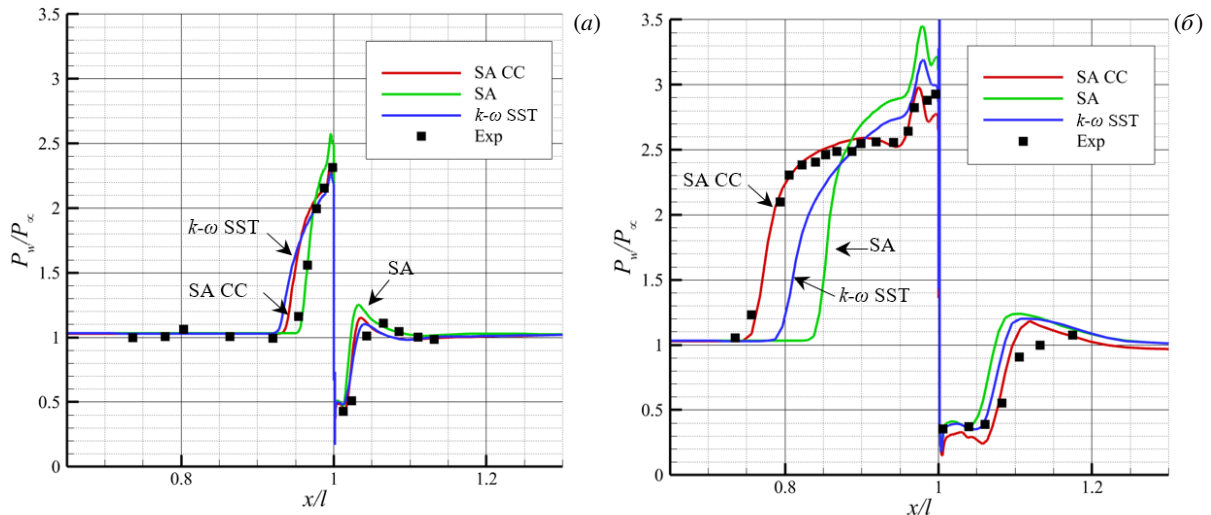
Для значения  $P_j/P_\infty = 63.5$  схема HLL, которая характеризуется более диссипативными свойствами, немного занижает уровень давления в отрывных зонах. В итоге для дальнейших расчётов принята схема AUSM+up ввиду её высокой устойчивости и низкой диссипативности.



**Рис. 5.** Распределение давления, вычисленное при значениях  $P_j/P_\infty = 8.74$  и  $63.5$  с использованием для аппроксимации конвективных потоков схем AUSM+up, Roe, HLL

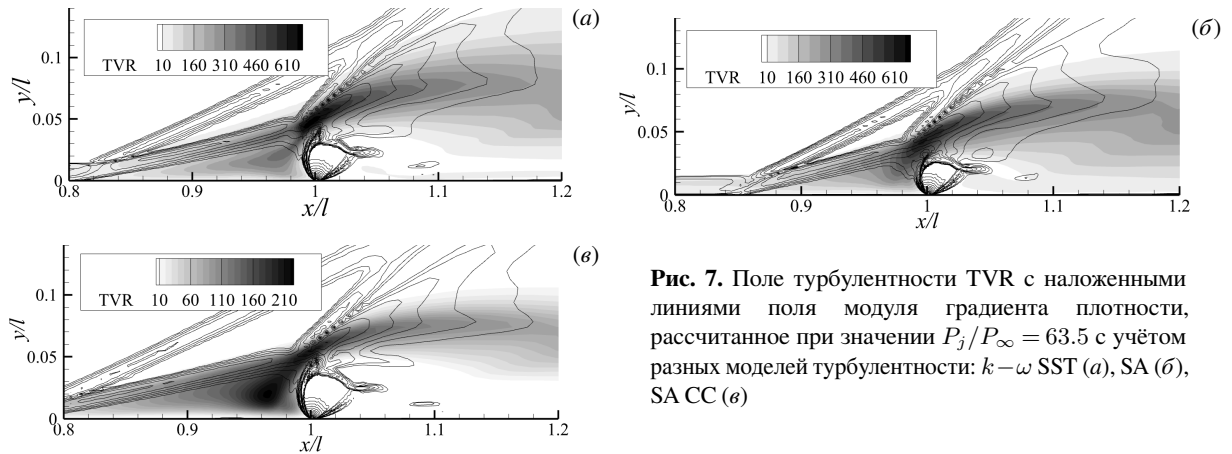
### 5.3. Модели турбулентности и их роль во взаимодействии течения и струи

Методический анализ влияния модели турбулентности осуществлен на низкорейнольдсовых моделях, разрешающих пристеночную область вплоть до стенки. Выбраны  $k-\omega$  SST модель Ментера 2003 и модель Spalart–Allmaras в двух вариантах (без поправки (SA) и с поправкой на сжимаемость (SA CC)), что позволяет также оценить воздействие на течение сжимаемости. Распределения давления, рассчитанные при разных моделях турбулентности и установленные в эксперименте показаны на рисунке 6. Видно, что по всем моделям турбулентности получается распределение, близкое к экспериментальному для значения параметра  $P_j/P_\infty = 8.74$ , однако при использовании модели SA наблюдается небольшое отличие по форме у распределений давления. При  $P_j/P_\infty = 63.5$  вид кривых, оказывается существенно разным: для модели SA с поправкой на сжимаемость распределение давления наиболее близко к экспериментальному. Остальные модели значительно занижают протяжённость участка постоянного («слабо меняющегося») давления на пластине, соответствующего отрывной области перед струей.



**Рис. 6.** Распределение давления, рассчитанное с учётом различных моделей турбулентности и экспериментальное при разных значениях отношения  $P_j/P_\infty$ : 8.74 (а), 63.5 (б)

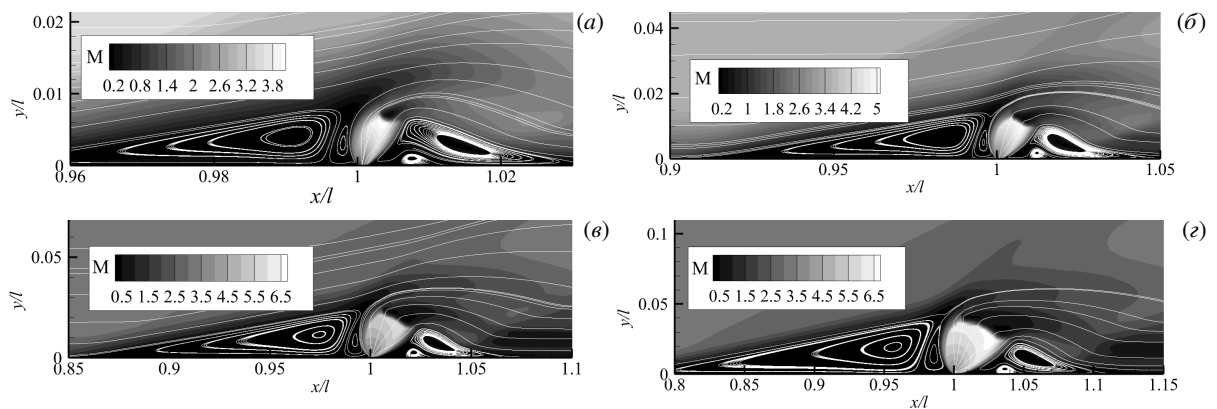
Для более глубокого анализа влияния модели турбулентности на рисунке 7 представлено поле турбулентной вязкости, отнесённой к молекулярной (обозначенное как TVR) для  $P_j/P_\infty = 63.5$ . Максимум TVR наблюдается после головного скачка: его значение, вычисленное по модели SA с поправкой на сжимаемость, заметно ниже по сравнению с результатами по  $k-\omega$  SST модели и стандартной модели SA. Как видно из рисунков 6 и 7, завышение уровня TVR этими моделями приводит к уменьшению протяжённости отрывной зоны и глубины проникновения струи в поток, тогда как ограничение уровня TVR моделью SA CC позволяет точнее, чем по другим моделям, находить длину отрывной зоны.



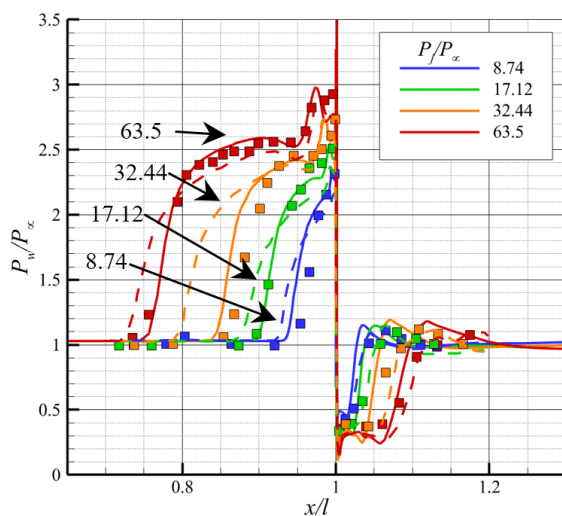
**Рис. 7.** Поле турбулентности TVR с наложенными линиями поля модуля градиента плотности, рассчитанное при значении  $P_j/P_\infty = 63.5$  с учётом разных моделей турбулентности:  $k-\omega$  SST (а), SA (б), SA CC (в)

### 6. Результаты расчётов при варьировании значения $P_j/P_\infty$

Рисунок 8 содержит поля числа Маха с наложенными линиями тока для разных значений  $P_j/P_\infty$ . Анализ полей показывает, что при увеличении параметра  $P_j/P_\infty$  конфигурация течения не меняется, но наблюдается изменение масштабов течения: увеличиваются длина отрывной зоны и степень проникновения струи в набегающий поток, а также протсходит расширение бочки Маха.



**Рис. 8.** Поле числа Маха с наложенными линиями тока (обозначены белым цветом) при разных значениях отношения  $P_j/P_\infty$ : 8.74 (а), 17.12 (б), 32.44 (в), 63.5 (г)



**Рис. 9.** Распределение давления на стенке для разных значений  $P_j/P_\infty$ : авторский расчёт (сплошные линии), расчёт Huang et al. (пунктирные линии), эксперимент (символы)

По распределениям давления на пластине (Рис. 9) видно, что с увеличением  $P_j/P_\infty$  участок плато, соответствующий передней отрывной зоне, становится более протяжённым, а уровень давления при этом увеличивается из-за возрастающей интенсивности головного скачка уплотнения. Необходимо отметить, что результаты расчёта хорошо согласуются с экспериментальными данными при всех значениях  $P_j/P_\infty$ . Для сравнения на рисунок нанесены линии, построенные по данным расчёта Huang et al. [10] по модели турбулентности  $k-\omega$  SST, которую посчитали наиболее удачной для случаев интенсивного взаимодействия течения с вдуваемой струей. Видно, что результаты авторского расчёта более близки к экспериментальным данным, по сравнению с расчётами из [10], особенно в области передней отрывной зоны и на участке плато. Это подтверждает обоснованность выбора модели SA с поправкой на сжимаемость для течений данного класса.

Количественное описание течения, формирующегося при вдуве струи в сверхзвуковой

поток, основывается на оценке двух основных масштабов: длины отрывной зоны перед отверстием вдува  $L_s$  и глубины проникновения струи  $H$  (Рис. 2). Для течений данного класса длина отрывной зоны  $L_s$  определяется как расстояние между точкой поверхности на краю щели, в которой начинается рост давления, и центральной точкой щелевого отверстия [22]. Глубиной проникновения струи  $H$  является расстояние от пластины до начала диска Маха [22]. В данной работе проводится также сравнение с теоретическими оценками, представленными в работах [23] и [22], соответственно для отрывной зоны и для глубины проникновения струи. Теоретическая оценка длины отрывной зоны базируется на эмпирических данных и результатах многопараметрического численного моделирования, учитывающего взаимовлияние ключевых характеристик течения:

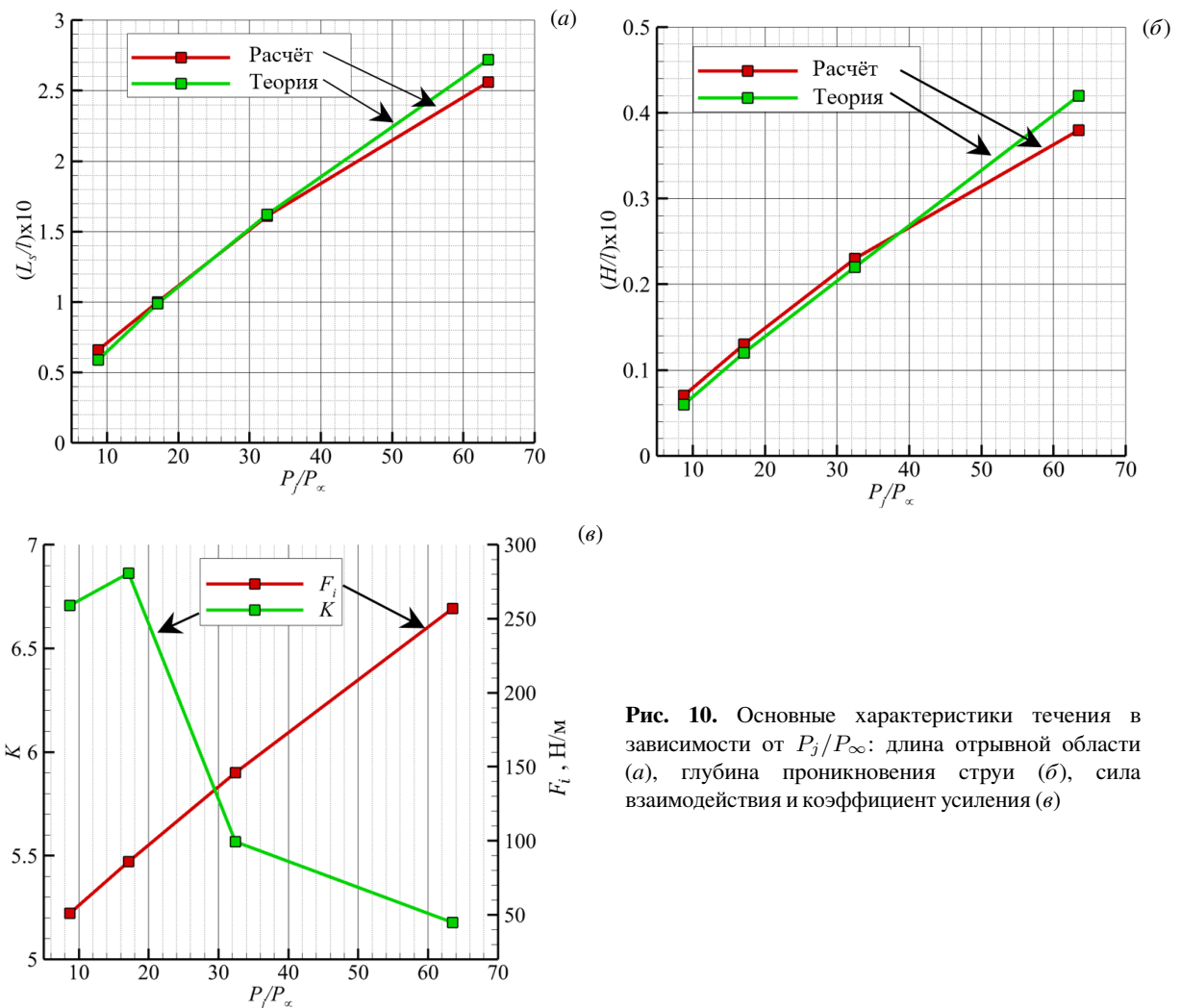
$$L_s = 4l \cdot \text{Re}_l^{-0.1} (w/l)^{0.65} (P_j/P_\infty)^{0.77},$$

где  $\text{Re}_l = \rho_\infty V_\infty l / \mu_\infty$  — число Рейнольдса, построенное по расстоянию  $l$ . Формула для нахождения глубины проникновения струи выводится исходя из гидродинамической структуры течения при вдуве струи в поперечный поток, образующейся при обтекании прямого уступа [22]:

$$H = L_s \text{tg} \theta / 1.36,$$

где  $\theta$  — угол отклонения потока, вычисляемый по теории косоугольного скачка уплотнения при предположении, что давление перед скачком равно  $P_\infty$ , а давление за скачком — давлению на плато, формирующемуся в отрывной зоне перед струей.

На рисунках 10а, б и в таблице 1 для сравнения приведены длины отрывной области, полученные при численном моделировании и на основе теоретической оценки. В связи с тем, что в настоящей работе экспериментальные данные представлены в виде графиков, построенных по малому числу точек, сопоставление с ними численных результатов сопряжено с определённой погрешностью оцифровки. Принимая во внимание это обстоятельство, верификация авторских результатов выполнена путём их сравнения с данными теоретических оценок. Анализ информации из таблицы 1, позволяет заключить: расхождение между расчётными значениями и теоретическими оценками не



**Рис. 10.** Основные характеристики течения в зависимости от  $P_j/P_\infty$ : длина отрывной области (а), глубина проникновения струи (б), сила взаимодействия и коэффициент усиления (е)

**Таблица 1.** Расчётные, теоретические и экспериментальные характеристики течения, полученные при разных отношениях  $P_j/P_\infty$

$P_j/P_\infty$	$(L_s/l) \times 10$		$\delta L_s/l, \%$	$(H/l) \times 10$		$\delta H/l, \%$
	Расчёт	Теория		Расчёт	Теория	
8.74	0.66	0.59	13.6	0.07	0.06	9.8
17.12	1.00	0.99	1.0	0.13	0.12	5.7
32.44	1.61	1.62	0.6	0.23	0.22	5.6
63.5	2.56	2.72	5.8	0.38	0.42	9.1

превышает 14%. Это свидетельство хорошей сходимости и достоверности полученных результатов, если учесть корреляционный характер оценочных формул и то, что у самих авторов отклонения от экспериментальных данных доходят до 18%.

В инженерных приложениях для анализа течений со вдувом струи в сверхзвуковой поток ключевыми параметрами, помимо длины отрывной зоны  $L_s$  и глубины проникновения струи  $H$ , являются следующие безразмерные характеристики: отношение плотностей потоков импульсов  $J$  и коэффициент усиления  $K$ , определяемые следующим образом:

$$J = \rho_j V_j^2 / (\rho_\infty V_\infty^2), \quad K = (F_i + T) / T_s.$$

Здесь  $F_i = \int_0^l (p - p_\infty) dx$  — сила давления, действующая на участок пластины от её начала до отверстия;

$T = GV + (p_j - p_\infty)w$  — тяга струи, где  $G$  — массовый расход струи;  $T_s = Ga^*$  — тяга струи в вакууме (где скорость звука рассчитывается по рекомендациям из статьи [4] как  $a^* = \sqrt{\gamma R(2T_0)/(\gamma + 1)}$ ). Коэффициент усиления струи показывает, во сколько раз полная сила тяги, производимая системой, больше тяги, которую создала бы только одна вытекающая струя, если бы она истекала в вакуум на срезе отверстия вдува со скоростью звука.

**Таблица 2.** Характеристики течения, рассчитанные при разных значениях  $P_j/P_\infty$

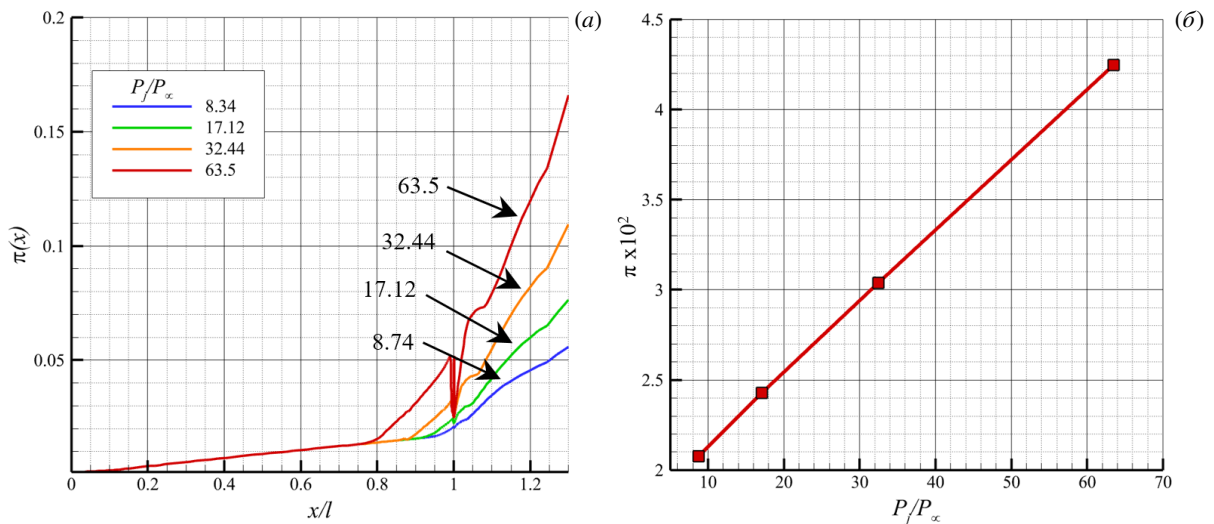
$P_j/P_\infty$	$J$	$F_i, \text{Н/м}$	$K$
8.74	0.72	51	6.71
17.12	1.44	86	6.86
32.44	2.81	146	5.57
63.5	5.22	257	5.18

Характеристики, приведённые в таблице 2, свидетельствуют, что с увеличением значения  $P_j/P_\infty$  импульс струи  $J$  становится больше, взаимодействие между струей и набегающим потоком усиливается, что приводит к почти линейному росту силы, действующей на пластину. Однако коэффициент усиления достигает максимума при  $P_j/P_\infty = 17.12$  и указывает на оптимальный режим, при котором энергия вдува расходуется на образование отрывной зоны с наибольшей эффективностью. Для струй с высоким импульсом энергия теряется на формирование системы интенсивных скачков уплотнения, что можно наблюдать на графике распределения коэффициента потери полного давления вдоль пластины (Рис. 11а):

$$\pi(x) = 1 - \int_0^{L_y} \rho u p_0 dy / (\rho_\infty u_\infty p_{0\infty} L_y),$$

где в числителе стоит расход полного давления  $p_0$  через текущее сечение с координатой  $x$ , а в знаменателе — расход полного давления на входе в расчётную область. Для разных значений  $P_j/P_\infty$  зависимости качественно похожи: резкий рост потерь происходит в зоне отрыва потока, то есть там, где формируется отрывной косоугольный скачок уплотнения. На участке перед началом пластины наклоны кривых близки, однако в области взаимодействия струи и набегающего потока с ростом  $P_j/P_\infty$  их наклон становится круче. Это объясняется тем, что при интенсификации взаимодействия формируется более мощная система скачков уплотнения, являющихся основным источником необратимых потерь полного давления в сверхзвуковом течении. Интегральные потери во всём объёме (Рис. 11б) линейно растут с увеличением  $P_j/P_\infty$ .

Анализ представленных данных позволяет установить, что рост параметра  $P_j/P_\infty$  обуславливает практически линейное увеличение длины зоны отрыва, глубины проникновения струи в набегающий поток и результирующей силы, действующей на поверхность пластины. В задачах, связанных с организацией процесса горения, такая динамика может способствовать стабилизации фронта пламени и интенсификации перемешивания топлива и окислителя [20]. Вместе с тем, дальнейшее наращивание мощности вдува сопровождается снижением его эффективности, поскольку усиливается система скачков уплотнения, что, в конечном счёте, приводит к снижению полезной тяги, создаваемой системой.

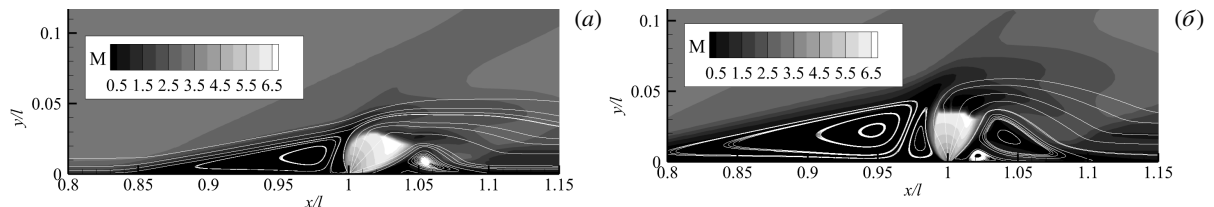


**Рис. 11.** Коэффициент потерь полного давления в зависимости от  $P_j/P_\infty$ : распределение по продольной координате (а), интегральная величина (б)

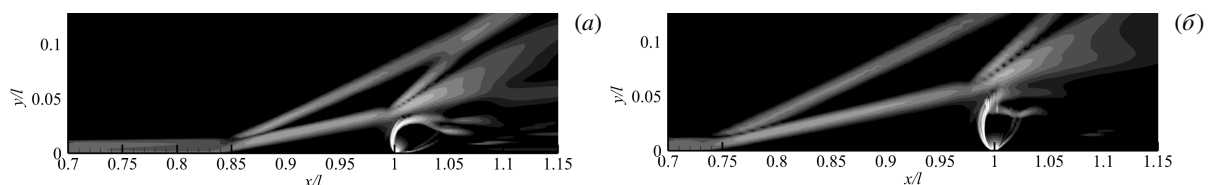
### 7. Результаты расчётов при варьировании угла вдува

Параметрическое исследование с варьированием угла вдува проведено для течения с максимальной интенсивностью струи ( $P_j/P_\infty = 63.5$ ), поскольку расчёты для менее мощных струй показали, что все тенденции, связанные с изменением угла вдува, качественно сохраняются, но выражаются менее отчётливо.

На рисунках 12 и 13 представлены поля числа Маха и ударно-волновая структура течения для значений угла вдува, ограничивающих исследованный диапазон:  $\alpha = -30^\circ$  (струя вдувается против потока) и  $\alpha = 30^\circ$  (струя вдувается по потоку). При противопоточном вдуве наблюдается рост длин отрывных зон по обе стороны от струи и увеличение наклона скачков уплотнения, что свидетельствует о сильном взаимодействии струи с набегающим потоком. Напротив, попутный вдув приводит к тому, что струя прижимается к поверхности пластины, расширяется, и формируемая система скачков уплотнения ослабляется. Стоит отметить, что при изменении угла вдува в исследуемом диапазоне углов глубина проникновения струи меняется незначительно.



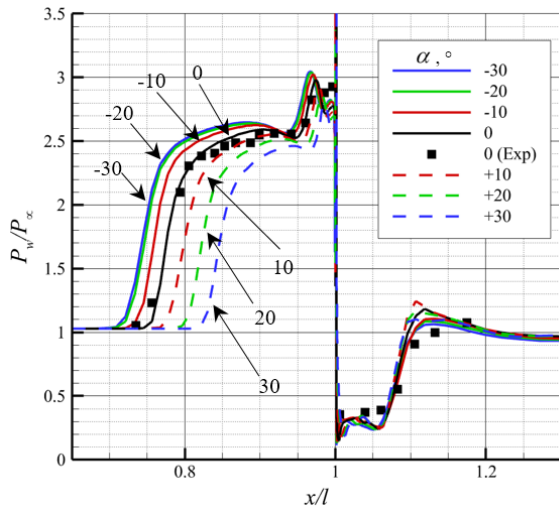
**Рис. 12.** Поле числа Маха с наложенными линиями тока (обозначены белым цветом) при разных значениях угла вдува  $\alpha, ^\circ$ : 30 (а);  $-30$  (б)



**Рис. 13.** Ударно-волновая картина течения при разных значениях угла вдува  $\alpha, ^\circ$ : 30 (а);  $-30$  (б)

Распределение давления по пластине (Рис. 14) подтверждает выявленные ранее закономерности: при противопоточном вдуве наблюдается рост давления в отрывной зоне и удлинение плато, вызванные более интенсивными скачками уплотнения. При попутном вдуве с увеличением угла  $\alpha$  протяжённость отрывной зоны уменьшается.

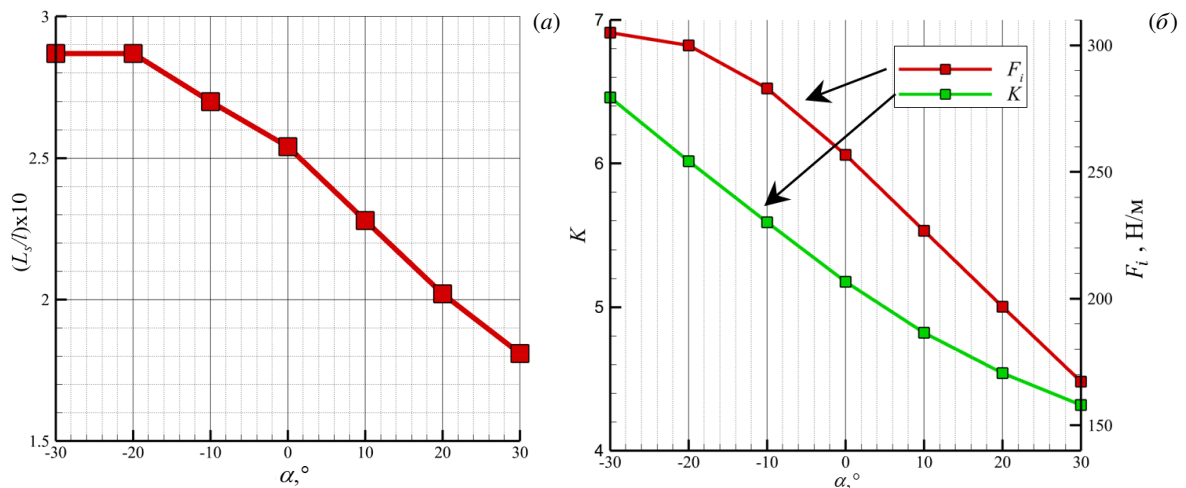
Более подробно характеристики течения представлены в таблице 3 и проиллюстрированы на рисунке 15. Анализ данных позволяет заключить, что при изменении угла вдува от  $-30$  до  $-20^\circ$  длина отрывной зоны, а также результирующая сила взаимодействия струи с потоком остаются практически неизменными, что указывает на существование режима насыщения. При дальнейшем увеличении угла вдува оба параметра начинают монотонно уменьшаться. В отличие от них, коэффициент усиления  $K$  демонстрирует монотонное снижение во всём



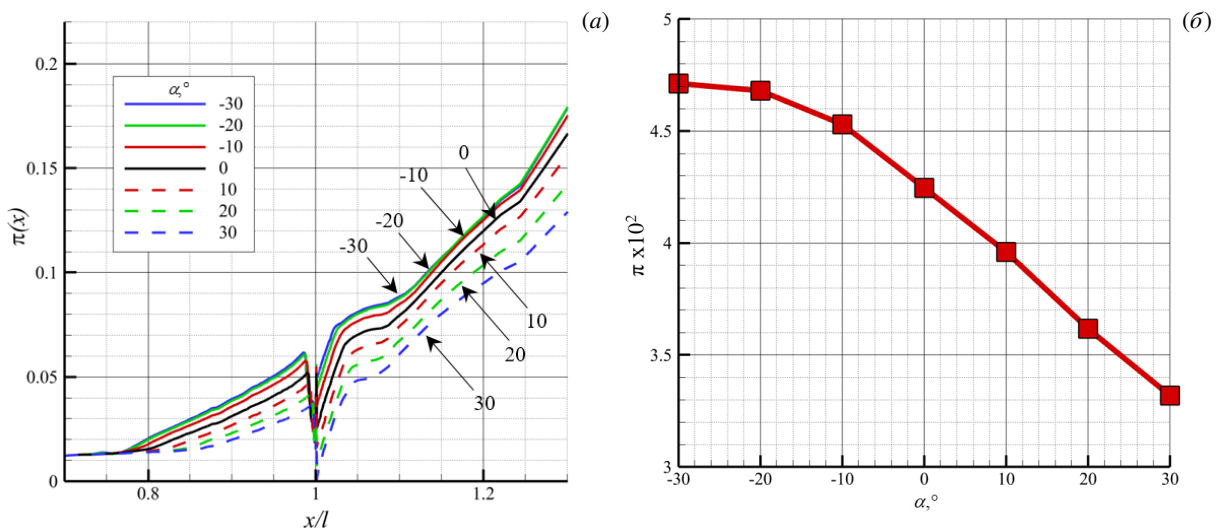
**Таблица 3.** Расчётные, теоретические и экспериментальные характеристики течения, полученные при разных значениях  $P_j/P_\infty$

$\alpha, ^\circ$	$(L_s/l) \times 10$	$F_i, \text{Н/м}$	$K$
-30	2.87	305	6.46
-20	2.87	300	6.02
-10	2.7	283	5.59
0	2.54	257	5.18
10	2.28	227	4.82
20	2.02	197	4.54
30	1.81	167	4.32

**Рис. 14.** Распределение давления на стенке для разных углов вдува  $\alpha$



**Рис. 15.** Основные характеристики течения в зависимости от угла вдува  $\alpha$ : длина отрывной области (а); сила взаимодействия и коэффициент усиления (б)



**Рис. 16.** Коэффициент потерь полного давления: распределение по продольной координате (а), интегральная величина в зависимости от угла вдува  $\alpha$  (б)

исследуемом диапазоне углов. Такое поведение объясняется уменьшением нормальной составляющей силы тяги струи по мере её отклонения от перпендикуляра к поверхности пластины.

Анализ зависимости потерь полного давления от угла вдува (Рис. 16) также демонстрирует выраженную асимметрию между картинками течения при попутном и противопоточном вдувах. Режим насыщения при противопоточном вдуве объясняется тем, что струя, направленная против набегающего потока, ведёт себя подобно аэродинамическому препятствию. При дальнейшем увеличении отрицательного угла эффективная площадь миделава сечения этого препятствия перестает существенно возрастать, что ограничивает интенсификацию головного скачка и связанных с ним потерь.

В отличие от противопоточного режима вдува, при положительных углах наблюдается существенная перестройка структуры течения, сопровождающаяся снижением потерь полного давления. Этот эффект обуславливается ориентацией струи, поскольку при её направлении по потоку уменьшается угол изгиба головного скачка и, как следствие, его интенсивность.

## 8. Выводы

Представлены и проанализированы результаты комплексного численного исследования взаимодействия сверхзвукового потока с поперечно-щелевой струей, вдуваемой под различными углами к обтекаемой поверхности. Валидация вычислительной модели на основе экспериментальных данных подтвердила её корректность и позволила провести детальное параметрическое исследование.

Определена оптимальная конфигурация вычислительной модели для данной задачи. Установлено, что модель турбулентности Spalart-Allmaras с поправкой на сжимаемость (SA CC) в сочетании со схемой AUSM+up на базовой расчётной сетке позволяет с приемлемой точностью воспроизводить ключевые характеристики течения, включая длину отрывной зоны и распределение давления. Модель же  $k-\omega$  SST значительно занижает протяжённость участка постоянного давления на пластине, соответствующего отрывной зоне перед струей.

Показано, что увеличение относительного давления в струе приводит к росту масштабов взаимодействия: длины отрывной зоны перед щелью, глубины проникновения струи и результирующей силы. При этом максимальное значение коэффициента усиления наблюдается при  $P_j/P_\infty = 17.12$ . Дальнейший рост давления ведёт к снижению коэффициента усиления из-за интенсификации системы скачков уплотнения и роста потерь полного давления.

Выявлена тенденция изменения структуры течения и интегральных характеристик при противопоточном ( $\alpha < 0^\circ$ ) и попутном ( $\alpha > 0^\circ$ ) вдувах. В режиме противопоточного вдува струя выступает в роли эффективного аэродинамического препятствия, индуцируя отрыв пограничного слоя с образованием протяжённой рециркуляционной зоны, а также увеличение потерь полного давления. Попутный вдув характеризуется прижиманием струи к поверхности пластины, ослаблением интенсивности волновой структуры и монотонным снижением как длины отрывной зоны и силы взаимодействия, так и коэффициента усиления.

## Литература

1. Min B.Y., Lee J.W., Byun Y.H. Numerical investigation of the shock interaction effect on the lateral jet controlled missile // *Aerospace Science and Technology*. 2006. Vol. 10. P. 385–393. DOI: 10.1016/J.AST.2005.11.013
2. Huang W., Pourkashanian M., Ma L., Ingham D.B., Luo S.B., Wang Z.G. Effect of geometric parameters on the drag of the cavity flameholder based on the variance analysis method // *Aerospace Science and Technology*. 2012. Vol. 21. P. 24–30. DOI: 10.1016/j.ast.2011.04.009
3. Everett D.E., Woodmansee M.A., Dutton J.C., Morris M.J. Wall Pressure Measurements for a Sonic Jet Injected Transversely into a Supersonic Crossflow // *Journal of Propulsion and Power*. 1998. Vol. 14, no. 6. P. 861–868.
4. Spaid F.W., Zukoski E.E. A study of the interaction of gaseous jets from transverse slots with supersonic external flows // *AIAA Journal*. 1968. Vol. 6, no. 2. P. 205–212. DOI: 10.2514/3.4479
5. Aso S., Okuyama S., Kawai M., Ando Y. Experimental Study on the Mixing Phenomena in Supersonic Flows with Slot Injection // 29th Aerospace Sciences Meeting. 1991. AIAA-91-0016. DOI: 10.2514/6.1991-16
6. Gnemmi P., Adeli R., Longo J. Computational Comparisons of the Interaction of a Lateral Jet on a Supersonic Generic Missile // *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*. 2008. 2008–6883. DOI: 10.2514/6.2008-6883
7. Gnemmi P., Gruhn P., Leplat M., Nottin C., Wallin S. Computation validation on lateral jet interactions at supersonic speeds // *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*. 2013. Vol. 5. P. 68–83. DOI: 10.1504/IJESMS.2013.052384
8. DeSpirito J. Turbulence Model Effects on Cold-Gas Lateral Jet Interaction in a Supersonic Crossflow // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2015. Vol. 52, no. 3. P. 836–852. DOI: 10.2514/1.A32974
9. Huh J., Lee S. Numerical study on lateral jet interaction in supersonic crossflows // *Aerospace Science and Technology*. 2018. Vol. 80. P. 315–328. DOI: 10.1016/j.ast.2018.07.022
10. Huang W., Liu W.D., Li S.B., Xia Z.X., Liu J., Wang Z.G. Influences of the turbulence model and the slot width on the transverse slot injection flow field in supersonic flows // *Acta Astronautica*. 2012. Vol. 73. P. 1–9. DOI: 10.1016/j.actaastro.2011.12.003
11. Pudsey A.S., Boyce R.R., Wheatley V. Influence of Common Modeling Choices for High-Speed Transverse Jet-Interaction Simulations // *Journal of Propulsion and Power*. 2013. Vol. 29, no. 5. P. 1076–1086. DOI: 10.2514/1.B34750

12. *Sriram A.T., Mathew J.* Improved Prediction of Plane Transverse Jets in Supersonic Crossflows // *AIAA Journal*. 2006. Vol. 44, no. 2. P. 405–408. DOI: 10.2514/1.17114
13. *Rana Z.A., Thornber B., Drikakis D.* Transverse jet injection into a supersonic turbulent cross-flow // *Physics of Fluids*. 2011. Vol. 23. 046103. DOI: 10.1063/1.3570692
14. *Zhang Y., Liu W., Sun M.* Effect of Microramp on Transverse Jet in Supersonic Crossflow // *AIAA Journal*. 2016. Vol. 54, no. 12. P. 4043–4045. DOI: 10.2514/1.J055338
15. *Williams N.J., Moeller T.M., Thompson R.J.* Numerical simulations of high frequency transverse pulsed jet injection into a supersonic crossflow // *Aerospace Science and Technology*. 2020. Vol. 103. 105908. DOI: 10.1016/j.ast.2020.105908
16. *Qiao C.L., Xu H.Y., Li J., Hu H.D.* Parametric study on the sonic transverse jet in supersonic crossflow and analysis of the jet-crossflow interaction instability // *Aerospace Science and Technology*. 2022. Vol. 123. 107472. DOI: 10.1016/j.ast.2022.107472
17. *Darwish M.S., Moukalled F.* TVD schemes for unstructured grids // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2003. Vol. 46. P. 599–611. DOI: 10.1016/S0017-9310(02)00330-7
18. *Kolesnik E., Smirnov E., Smirnovsky A.* RANS-based numerical simulation of shock wave/turbulent boundary layer interaction induced by a blunted fin normal to a flat plate // *Computers & Fluids*. 2022. Vol. 247. 105622. DOI: 10.1016/j.compfluid.2022.105622
19. *Smirnov E.M., Zaitsev D.K., Smirnovsky A.A., Kolesnik E.V., Pozhilov A.A.* Assessment of Several Advanced Numerical Algorithms Implemented in the CFD Code SINF/Flag-S for Supercomputer Simulations // *Supercomputing Frontiers and Innovations*. 2024. Vol. 11, no. 2. P. 14–31. DOI: 10.14529/j.sfi240202
20. *Yan L., Huang W., Zhang T., Li H., Yan X.* Numerical investigation of the nonreacting and reacting flow fields in a transverse gaseous injection channel with different species // *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 105. P. 17–23. DOI: 10.1016/j.actaastro.2014.08.018
21. *Welch A.B., Wallace J.S.* Performance Characteristics of a Hydrogen-Fueled Diesel Engine with Ignition Assist // *SAE Technical Paper Series*. 1990. 902070. DOI: 10.4271/902070
22. *Werle M.J., Driftmyer R.T., Shaffer D.G.* Jet-interaction-induced separation - The two-dimensional problem // *AIAA Journal*. 1972. Vol. 10, no. 2. P. 188–193. DOI: 10.2514/3.6558
23. *Wang Z., Jiang C., Gao Z., Lee C.* Prediction for the Separation Length of Two-Dimensional Sonic Injection with High-Speed Crossflow // *AIAA Journal*. 2017. Vol. 5, no. 3. P. 832–847. DOI: 10.2514/1.J055194

### Сведения об авторах:

*Бабич Елена Викторовна (корр.)*, асп., Санкт-Петербургский университет Петра Великого (СПбПУ), 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29; e-mail: babich\_e@spbstu.ru; ORCID: 0000-0003-1442-4886

*Колесник Елизавета Владимировна*, кфмн, СПбПУ; e-mail: kolesnik.ev1@spbstu.ru; ORCID: 0000-0002-6308-733X

### Research article

## Numerical simulation of the interaction between a supersonic viscous gas flow and a transverse jet injected at an angle from the slot in a flat plate

*E.V. Babich, E.V. Kolesnik*

*Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

This paper presents the results of a comprehensive numerical study of the interaction between a supersonic air flow with a Mach number of 3.5 and a stationary jet injected through a slot in a streamlined plate. The mathematical model is based on the Reynolds-averaged Navier–Stokes equations, which are solved by the finite volume method. In the first stage, methodological calculations were performed to substantiate the choice of optimal parameters for the computational grid, the convective flow approximation scheme, and the turbulence model. It was found that the best fit to the experimental data is achieved by combining the Spalart–Allmaras turbulence model allowing for compressibility and the second-order AUSM+up scheme. After validating the computational methodology, a systematic parametric study was conducted to examine the influence of two factors: the relative pressure in the jet (in the range from 8.74 to 63.5) and the injection angle (from  $-30$  to  $30^\circ$ ). It is shown that increasing the jet intensity leads to a nearly linear increase in the length of the separation zone in front of the slot, the depth of jet penetration in the cross flow, and the resulting force acting on the plate. The highest injection efficiency, characterized by the gain factor, is achieved at a relative pressure of 17.12; its further increase is accompanied by an enhancement of the shock-wave interaction and a decrease in efficiency. The study of the influence of injection angle revealed a pronounced asymmetry between the concurrent and countercurrent injected jets. The countercurrent injection leads to the formation of extensive separation zones, intense shock waves, and significant total pressure losses. By contrast, the concurrent injection forces the jet against the surface, weakens the shock-wave structure, and reduces losses.

**Keywords:** high-speed flows, numerical simulation, RANS, viscous-inviscid interaction, slot injection, transverse jet

**Received:** 05.12.2025 / **Published online:** 01.06.2026

## References

1. *Min B.Y., Lee J.W., Byun Y.H.* Numerical investigation of the shock interaction effect on the lateral jet controlled missile. *Aerospace Science and Technology*. 2006. Vol. 10. P. 385–393. DOI: 10.1016/j.ast.2005.11.013
2. *Huang W., Pourkashanian M., Ma L., Ingham D.B., Luo S.B., Wang Z.G.* Effect of geometric parameters on the drag of the cavity flameholder based on the variance analysis method. *Aerospace Science and Technology*. 2012. Vol. 21. P. 24–30. DOI: 10.1016/j.ast.2011.04.009
3. *Everett D.E., Woodmansee M.A., Dutton J.C., Morris M.J.* Wall Pressure Measurements for a Sonic Jet Injected Transversely into a Supersonic Crossflow. *Journal of Propulsion and Power*. 1998. Vol. 14, no. 6. P. 861–868.
4. *Spaid F.W., Zukoski E.E.* A study of the interaction of gaseous jets from transverse slots with supersonic external flows. *AIAA Journal*. 1968. Vol. 6, no. 2. P. 205–212. DOI: 10.2514/3.4479
5. *Aso S., Okuyama S., Kawai M., Ando Y.* Experimental Study on the Mixing Phenomena in Supersonic Flows with Slot Injection. 29th Aerospace Sciences Meeting. 1991. AIAA-91-0016. DOI: 10.2514/6.1991-16
6. *Gnemmi P., Adeli R., Longo J.* Computational Comparisons of the Interaction of a Lateral Jet on a Supersonic Generic Missile. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*. 2008. 2008–6883. DOI: 10.2514/6.2008-6883
7. *Gnemmi P., Gruhn P., Leplat M., Nottin C., Wallin S.* Computation validation on lateral jet interactions at supersonic speeds. *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*. 2013. Vol. 5. P. 68–83. DOI: 10.1504/IJESMS.2013.052384
8. *DeSpirito J.* Turbulence Model Effects on Cold-Gas Lateral Jet Interaction in a Supersonic Crossflow. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2015. Vol. 52, no. 3. P. 836–852. DOI: 10.2514/1.A32974
9. *Huh J., Lee S.* Numerical study on lateral jet interaction in supersonic crossflows. *Aerospace Science and Technology*. 2018. Vol. 80. P. 315–328. DOI: 10.1016/j.ast.2018.07.022
10. *Huang W., Liu W.D., Li S.B., Xia Z.X., Liu J., Wang Z.G.* Influences of the turbulence model and the slot width on the transverse slot injection flow field in supersonic flows. *Acta Astronautica*. 2012. Vol. 73. P. 1–9. DOI: 10.1016/j.actaastro.2011.12.003
11. *Pudsey A.S., Boyce R.R., Wheatley V.* Influence of Common Modeling Choices for High-Speed Transverse Jet-Interaction Simulations. *Journal of Propulsion and Power*. 2013. Vol. 29, no. 5. P. 1076–1086. DOI: 10.2514/1.B34750
12. *Sriram A.T., Mathew J.* Improved Prediction of Plane Transverse Jets in Supersonic Crossflows. *AIAA Journal*. 2006. Vol. 44, no. 2. P. 405–408. DOI: 10.2514/1.17114
13. *Rana Z.A., Thornber B., Drikakis D.* Transverse jet injection into a supersonic turbulent cross-flow. *Physics of Fluids*. 2011. Vol. 23. 046103. DOI: 10.1063/1.3570692
14. *Zhang Y., Liu W., Sun M.* Effect of Microramp on Transverse Jet in Supersonic Crossflow. *AIAA Journal*. 2016. Vol. 54, no. 12. P. 4043–4045. DOI: 10.2514/1.J055338
15. *Williams N.J., Moeller T.M., Thompson R.J.* Numerical simulations of high frequency transverse pulsed jet injection into a supersonic crossflow. *Aerospace Science and Technology*. 2020. Vol. 103. 105908. DOI: 10.1016/j.ast.2020.105908
16. *Qiao C.L., Xu H.Y., Li J., Hu H.D.* Parametric study on the sonic transverse jet in supersonic crossflow and analysis of the jet-crossflow interaction instability. *Aerospace Science and Technology*. 2022. Vol. 123. 107472. DOI: 10.1016/j.ast.2022.107472
17. *Darwish M.S., Moukalled F.* TVD schemes for unstructured grids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2003. Vol. 46. P. 599–611. DOI: 10.1016/S0017-9310(02)00330-7
18. *Kolesnik E., Smirnov E., Smirnovsky A.* RANS-based numerical simulation of shock wave/turbulent boundary layer interaction induced by a blunted fin normal to a flat plate. *Computers & Fluids*. 2022. Vol. 247. 105622. DOI: 10.1016/j.compfluid.2022.105622
19. *Smirnov E.M., Zaitsev D.K., Smirnovsky A.A., Kolesnik E.V., Pozhilov A.A.* Assessment of Several Advanced Numerical Algorithms Implemented in the CFD Code SINF/Flag-S for Supercomputer Simulations. *Supercomputing Frontiers and Innovations*. 2024. Vol. 11, no. 2. P. 14–31. DOI: 10.14529/j.sfi240202
20. *Yan L., Huang W., Zhang T., Li H., Yan X.* Numerical investigation of the nonreacting and reacting flow fields in a transverse gaseous injection channel with different species. *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 105. P. 17–23. DOI: 10.1016/j.actaastro.2014.08.018
21. *Welch A.B., Wallace J.S.* Performance Characteristics of a Hydrogen-Fueled Diesel Engine with Ignition Assist. *SAE Technical Paper Series*. 1990. 902070. DOI: 10.4271/902070
22. *Werle M.J., Driftmyer R.T., Shaffer D.G.* Jet-interaction-induced separation - The two-dimensional problem. *AIAA Journal*. 1972. Vol. 10, no. 2. P. 188–193. DOI: 10.2514/3.6558
23. *Wang Z., Jiang C., Gao Z., Lee C.* Prediction for the Separation Length of Two-Dimensional Sonic Injection with High-Speed Crossflow. *AIAA Journal*. 2017. Vol. 55, no. 3. P. 832–847. DOI: 10.2514/1.J055194