ISSN: 1999-6691, e-ISSN: 2782-3709 DOI: 10.7242/1999-6691/2026.19.1.4

Научная статья

Бифуркационный анализ вблизи порога возбуждения конвекции при однородном прокачивании жидкости через слабо несимметричный пористый чип

Д.А. Брацун

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

Пористые каркасы, насыщенные жидкостью, являются важнейшей частью перфузионных биореакторов проточного типа и выполняют роль микрожидкостных чипов. Такие устройства используются для выращивания клеточных культур и поддержания их в условиях постоянного потока раствора, богатого питательными веществами. Размножение клеток часто протекает в неизотермических условиях, которые в поле силы тяжести могут приводить к возбуждению тепловой конвекции. В данной работе рассматривается задача возникновения конвекции в подогреваемом снизу пористом чипе, через который осуществляется однородное прокачивание несжимаемой жидкости в вертикальном направлении. Известно, что включение пористой среды в высокотеплопроводный непроницаемый массив приводит к тому, что краевая задача приобретает свойство косимметрии при любой односвязной двумерной форме области и вызывает ответвление однопараметрических семейств разнородных состояний равновесия. Но даже слабое течение жидкости через пористую среду разрушает косимметрию, а тип динамического поведения системы в этом случае обуславливается свойствами области. Если область прокачивания при отражении симметрична относительно вертикальной оси, наблюдается стационарная конвекция. В несимметричной области возбуждаются периодические колебания. В статье изучается бифуркационная структура вблизи порога возбуждения конвекции в слабо несимметричной области. Внимание фокусируется на процессе перехода от стационарной к колебательной конвекции. Исследование системы включает: нахождение основного состояния; линейный анализ его устойчивости с помощью метода Галёркина; анализ слабо нелинейных решений вблизи точки первой бифуркации методом многих временных масштабов. Показано, что ветвление решений вблизи порога возбуждения конвекции у слабо некосимметричной системы уравнений, заданных в слабо несимметричной 2-D области, неожиданно имеет сложную картину. Процесс перехода включает бифуркацию Андронова–Хопфа, рождение и смерть предельных циклов и равновесий, а также образование гомоклинических траекторий. Построены карты устойчивости на плоскостях, составленных управляющими параметрами задачи: числом Рэлея для пористой среды, тепловым числом Пекле и углом наклона чипа, выступающим как параметр несовершенства симметрии. Приведены бифуркационные диаграммы динамической системы на её медленном многообразии.

Ключевые слова: пористая среда, конвективная неустойчивость, бифуркации, симметрия, косимметрия

Получение: 13.10.2025 / *Публикация онлайн*: 01.06.2026 УДК 532.5

1. Введение

Фильтрационная конвекция несжимаемой жидкости, насыщающей пористую среду, неизменно привлекает внимание исследователей из-за широкого распространения этого явления в природе и технике [1]. Среди традиционных областей приложения можно упомянуть фильтрацию через неоднородные среды в интересах нефте- и газодобычи [2], обустройство полигонов бытовых и промышленных отходов [3, 4], процессы реакции–диффузии–конвекции в химической промышленности [5] и другое. Среди сравнительно новых направлений можно назвать тканевую инженерию, которая использует синтетические пористые материалы для выращивания клеточных культур [6–9]. Твёрдая матрица выступает здесь либо в качестве каркаса (скаффолда) для формируемой ткани, либо в качестве костного импланта (в регенеративной медицине). Деление клеток в биореакторе требует непрерывного подвода питательных веществ. Нелишне упомянуть задачу о коллективном поведении императорских пингвинов или роботов. Как оказалось, её также можно сформулировать на основе концепции тепловой конвекции в пористой среде [10].

Если рассматривать задачу о конвективной устойчивости жидкости, насыщающей однородный пористый слой, подогреваемый снизу, то изначально, по-видимому, она полагалась близкой к классической задаче Рэлея–Бенара [11, 12]. Как и в однородной жидкости, при определённом значении числа Рэлея механическое равновесие становится неустойчивым, и в результате вилочной бифуркации возникает стационарная конвекция. Уравнение движения жидкости в пористой среде записывается гораздо проще, чем в случае течения однородной жидкости, поэтому некоторые исследователи считали фильтрационные задачи отличным полигоном для оттачивания инструментов нелинейной динамики и теории бифуркаций [13]. Поворотным моментом стала работа Д.В. Любимова [14], в которой на решении задачи о возникновении тепловой конвекции в горизонтальном пористом цилиндре с идеально теплопроводными границами показано, что механическое равновесие сменяется не одним или двумя равновесными состояниями, а целым однопараметрическим семейством. Причем этот вывод оказался справедливым для произвольной односвязной формы поперечного сечения цилиндра. Результат выглядел странным, так как задача не обладала видимыми симметриями со свободным параметром, тем не менее теоретическое предсказание было подтверждено экспериментально [15].

Тщательное рассмотрение в [14], казалось бы, стандартной формулировки задачи привело к необходимости применения теории косимметрии, выдвинутой В.И. Юдовичем [16]. Под косимметрией понимается свойство задачи иметь скрытый сохраняющийся интеграл, происхождение которого не связано с симметрией; в

©Авторы 2026 Статья опубликована в открытом доступе по лицензии CC BY 4.0

динамических системах с косимметрией все равновесные состояния классифицируются как косимметричные, либо как некосимметричные. Последние всегда являются семействами. В дальнейшем теория косимметрии получила развитие в серии работ В.И. Юдовича и его учеников [17–22]. Исследовались вопросы бифуркаций уединённых косимметричных равновесий [17], ветвления однопараметрических семейств некосимметричных равновесий [17, 20–22], а также изучены бифуркации при нарушении косимметрии [19]. Последний вопрос рассматривался также в работе [23], в которой авторами обнаружен любопытный факт: в случае прокачивания жидкости в вертикальном направлении косимметрия задачи нарушается и вырождение снимается; сценарий распада однопараметрического семейства вблизи точки первой бифуркации обуславливается симметрией области. Если сечение горизонтального пористого цилиндра при отражении по горизонтали симметрично, то наблюдается стационарная конвекция. А если это условие не выполняется, то вблизи порога имеется предельный цикл. Однако, каким образом происходит переход от периодической конвекции к стационарной и обратно, исследовано не было. Данная работа призвана восполнить этот пробел. В практических приложениях встречается всё больше задач, в которых однородное просачивание несжимаемой жидкости через пористую среду играет важное значение. Умение переключать конвективные режимы в пористых чипах за счёт слабого внешнего воздействия видится полезным в различных устройствах. Кроме того, вертикальное прокачивание не получило в литературе достаточного внимания, хотя энергетически менее затратно. Реализовать этот способ можно, например, разместив резервуар с жидкостью прямо над конвективной системой, и позволить жидкости самотеком просачиваться через пористую среду.

Данная статья также может расцениваться как аналитический этюд о бифуркационном анализе. Все процессы рассматриваются вблизи точки первой бифуркации. Поэтому асимптотическую теорию можно построить от постановки задачи и до получения нормальной формы ветвления решений на медленном многообразии исследуемой системы и оценки её бифуркационной структуры. Хотя в последние годы стало преобладающим прямое численное моделирование гидродинамических систем, физики не должны терять своих исторических компетенций в области теории возмущений, которая начинает свой отсчёт с работ Ньютона.

2. Математическая формулировка задачи

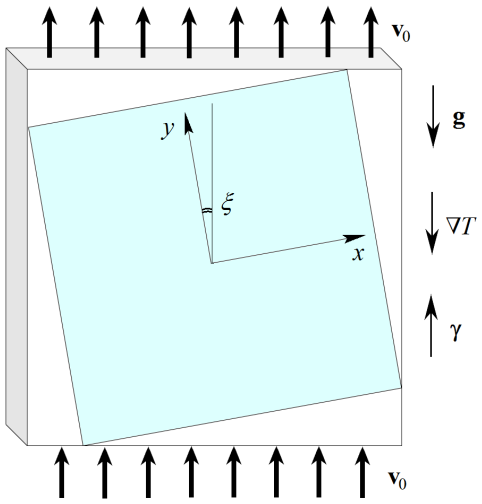

Рис. 1. Схематическое изображение системы с чипом (закрашен) – слабо несимметричной области пористой среды в массиве, через которую происходит однородное просачивание несжимаемой жидкости; система подогревается снизу

Рассмотрим движение несжимаемой жидкости с динамической вязкостью η и плотностью ρ_0, заполняющей бесконечно протяжённый горизонтальный пористый цилиндр с твёрдыми проницаемыми границами, который со всех сторон окружён твёрдым массивом, имеющим высокую теплопроводность. Пусть поперечное сечение цилиндра представляет собой квадрат с характерным размером h, способный иметь различные наклоны к направлению ускорения свободного падения $\mathbf{g} = -g\boldsymbol{\gamma}$, где $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, определяющий угол наклона ξ прямоугольной системы координат $\{x,y\}$ (Рис. 1):

$$\boldsymbol{\gamma} : (\sin(\xi), \cos(\xi)). \tag{1}$$

Массив с цилиндром подогревается снизу таким образом, чтобы в любой ситуации было возможно существование механического равновесия жидкости, характеризуемое равновесным градиентом температуры $-A\boldsymbol{\gamma}$. Хотя математически рассматриваемый цилиндр беконечен, на практике хорошим приближением к этой теоретической конструкции служит цилиндр конечной длины, боковые стенки которого изолированы от потоков тепла вдоль цилиндра. В работах [24, 25] показано, что, если цилиндр вдоль своей оси короче характерного размера h, то двумерные возмущения являются наиболее опасными. Это даёт обоснование достаточности исследования только класса двумерных конвективных движений, что существенно упрощает анализ. Поэтому на рисунке 1 пористый цилиндр изображен в виде квадратной призмы, сплющенной вдоль оси вращения, перпендикулярной плоскости рисунка.

С учётом сказанного выше определяющие уравнения фильтрационной конвекции в приближении Дарси и Буссинеска принимают следующий вид [13]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla P' + g\beta_0 T\boldsymbol{\gamma} - \frac{\nu}{K}\mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

$$b\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \chi\Delta \mathrm{T}, \tag{4}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость фильтрации жидкости, T — температура, P' — давление, β_0 — коэффициент теплового объёмного расширения, ν — коэффициент кинематической вязкости, K — коэффициент проницаемости среды,

b — отношение теплоёмкостей среды и жидкости, χ — эффективный коэффициент температуропроводности пористой матрицы, насыщенной жидкостью.

Обсудим граничные условия для полей в (2)–(4). Положим, что через нижнюю границу цилиндра идёт однородный вдув жидкости со скоростью $\mathbf{v}_0 = v_0\boldsymbol{\gamma}$, а через верхнюю — однородное откачивание с той же скоростью (Рис. 1). Тогда на границе G для нормальной компоненты скорости получим условие:

$$v_n|_G = v_0\,\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\gamma}, \tag{5}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к G. Так как уравнение движения (3) линейное, то условия (5) вполне достаточно для определения поля скорости.

Поскольку чип со всех сторон окружён твёрдым массивом, обладающим свойством высокой теплопроводности, то на его границах устанавливается равновесное распределение температуры, зависящее от его формы, а все возмущения эффективно отводятся от границы в массив и затухают:

$$T|_G = T_0. \tag{6}$$

Таким образом, краевая задача (2)–(6) определяет динамику конвективных движений в чипе. С одной стороны, граничное условие (6) гарантирует, что при отсутствии прокачки жидкости эта задача имеет косимметрию [14, 16]. Невысокая интенсивность прокачивания делает задачу (2)–(6) слабо некосимметричной. С другой стороны, вращение цилиндра (чипа) вокруг своей оси позволяет рассматривать как симметричные, так и несимметричные области. Небольшие углы ξ делают задачу (2)–(6) слабо несимметричной. Комбинируя значения параметров, можно получать и обсуждать различные ситуации.

Представим общее решение задачи (2)–(6) в виде суммы основного состояния и его конечных возмущений:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}(t,x,y) \\ T(t,x,y) \\ P'(t,x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ T_0(x,y) \\ p_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t,x,y) \\ \theta(t,x,y) \\ p(t,x,y) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

По аналогии с [14, 23] обезразмерим физические величины с использованием масштабов: h — длина, χ/h — скорость, bh^2/χ — время, $\nu\chi\rho_0/K$ — давление, $(\nu\chi A/g\beta K)^{1/2}$ — температура. Этот приём позволяет симметризовать линейный оператор относительно возмущений скорости и температуры. Подставляя (7) в (2)–(6) и разрешая уравнения для основного состояния, с учётом (1) придём к безразмерной форме решения для однородного невозмущённого потока через чип:

$$\mathbf{v}_0 : (v_0\sin(\xi), v_0\cos(\xi)), \tag{8}$$

$$\nabla T_0 : \left(\frac{\mathrm{PeRa}}{2\mathrm{sh}(\mathrm{Pe}/2)} e^{\mathrm{Pe}\sin(\xi)x}\sin(\xi), \frac{\mathrm{PeRa}}{2\mathrm{sh}(\mathrm{Pe}/2)} e^{\mathrm{Pe}\cos(\xi)y}\cos(\xi)\right). \tag{9}$$

В выражениях (8), (9) появились два безразмерных параметра, определяющих эволюцию конвективных течений, — число Рэлея для пористой среды и тепловое число Пекле:

$$\mathrm{Ra} = h\sqrt{\frac{g\beta KA}{\nu\chi}}, \quad \mathrm{Pe} = \frac{v_0 h}{\chi}. \tag{10}$$

Используя условие несжимаемости (2), введём функцию тока:

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

и перепишем задачу в терминах функции тока и температуры:

$$\Delta\psi - \mathrm{Ra}\left(\cos(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \sin(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + J(\psi,\theta) =$$

$$= \Delta\theta + \frac{\mathrm{PeRa}}{2\mathrm{sh}(\mathrm{Pe}/2)}\left(e^{\mathrm{Pe}\cos(\xi)y}\cos(\xi)\frac{\partial\psi}{\partial x} - e^{\mathrm{Pe}\sin(\xi)x}\sin(\xi)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \mathrm{Pe}\left(\sin(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \cos(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial y}\right), \tag{12}$$

$$\psi|_G = 0, \quad \theta|_G = 0, \tag{13}$$

где для краткости введено обозначение якобиана:

$$J(\psi,\theta) \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

Приведем важные предельные случаи для системы (11)–(13). Так, при прекращении прокачивания жидкости через пористый чип ($\mathrm{Pe}\to 0$) имеем:

$$\Delta\psi-\mathrm{Ra}\left(\cos(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial x}-\sin(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+J(\psi,\theta)=\Delta\theta+\mathrm{Ra}\left(\cos(\xi)\frac{\partial\psi}{\partial x}-\sin(\xi)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right), \tag{14}$$

$$\psi|_G=0,\quad \theta|_G=0.$$

Если задача инвариантна относительно операции горизонтального отражения ($\xi\to 0$), то получаем:

$$\Delta\psi-\mathrm{Ra}\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+J(\psi,\theta)=\Delta\theta+\frac{\mathrm{PeRa}}{2\mathrm{sh}(\mathrm{Pe}/2)}e^{\mathrm{Pe}y}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\mathrm{Pe}\frac{\partial\theta}{\partial y}, \tag{15}$$

$$\psi|_G=0,\quad \theta|_G=0.$$

Наконец, если справедливы оба предельных случая (14) и (15), имеем:

$$\Delta\psi-\mathrm{Ra}\frac{\partial\theta}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+J(\psi,\theta)=\Delta\theta+\mathrm{Ra}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{16}$$

$$\psi|_G=0,\quad \theta|_G=0.$$

Покажем, что задача (16) обладает свойством косимметрии [16]. Пусть множество функций θ формирует гильбертово пространство. Тогда в этом пространстве уравнения (16) могут быть представлены в операторном виде:

$$\hat{Q}\theta=\frac{\partial\theta}{\partial t},\quad \hat{L}\theta=\psi.$$

Здесь оператор $\hat{Q}$ есть эволюционный и нелинейный, функционально зависящий от ψ, а оператор $\hat{L}$ — линейный интегро-дифференциальный, являющийся решением двумерного уравнения Пуассона.

Введём скалярное произведение двух произвольных функций:

$$\langle a(x,y),b(x,y)\rangle=\int\limits_{-0.5}^{0.5}\int\limits_{-0.5}^{0.5}a(x,y)b(x,y)\,dxdy. \tag{17}$$

Используя (17), приходим к выражению:

$$\left\langle\hat{L}\theta,\hat{Q}\theta\right\rangle=0. \tag{18}$$

Таким образом, в (18) операторы образуют нетривиальную косимметричную пару.

В работе [16] доказано, что в гильбертовом пространстве ортогональность операторов (18) приводит к вырождению стационарных решений задачи (16), не обращающих в нуль сразу оба оператора. Такие равновесия получили название некосимметричных. Например, в задаче (16) — это любые стационарные решения, которые описывают конвективные движения жидкости. Механическое равновесие жидкости, при котором функция тока и возмущение температуры равны нулю, относится к классу невырожденных косимметричных равновесий. При этом число Пекле выступает как параметр, нарушающий свойство (18). В задаче (11)–(13) его можно назвать параметром несовершенства косимметрии. Угол наклона кюветы ξ, наоборот, является параметром несовершенства дискретной симметрии в задаче (11)–(13).

3. Линейный анализ механического равновесия жидкости

Проведём анализ линейной устойчивости основного состояния (8), (9). Сначала рассмотрим задачу без прокачивания ($\mathrm{Pe}=0$), допускающую аналитическое решение. Обратимся к нормальным возмущениям вида:

$$\begin{pmatrix}\psi(t,x,y)\\ \theta(t,x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\psi}(x,y)\\ \hat{\theta}(x,y)\end{pmatrix}e^{\lambda t},$$

где λ — инкремент возмущений, $\hat{\psi}$ и $\hat{\theta}$ — амплитуды возмущений, зависящие только от координат.

Линеаризуя задачу (14) вблизи порога наступления конвекции, получаем для малых монотонных возмущений ($\lambda = 0$) следующую задачу:

$$\begin{gathered}\Delta\psi - \mathrm{Ra}\left(\cos(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \sin(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) = 0,\\ \Delta\theta + \mathrm{Ra}\left(\cos(\xi)\frac{\partial\psi}{\partial x} - \sin(\xi)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0,\\ \psi|_G = 0, \quad \theta|_G = 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь и далее «шляпки» над обозначениями амплитуд для упрощения изложения опускаются.

Как видно, задача (19) инвариантна по отношению к замене

$$\psi \to \theta, \quad \theta \to -\psi.$$

Таким образом, если функции ψ и θ удовлетворяют уравнениям (19), то пара функций θ и $-\psi$ также будет их решением. Важно отметить, что эти решения линейно независимы, поэтому каждое собственное значение (19) является двукратно вырожденным. Это есть прямое следствие наличия у задачи (14) свойства косимметрии (18). Вводя в рассмотрение комплексную функцию

$$\Phi = \psi + i\theta,$$

получаем вместо (19) задачу вида:

$$\Delta\Phi + i\mathrm{Ra}\left(\cos(\xi)\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \sin(\xi)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0, \quad \Phi|_G = 0. \tag{20}$$

Применим к (20) следующее преобразование:

$$\Phi(x,y) = \Omega(x,y)e^{(-i\mathrm{Ra}/2)(x\cos(\xi) - y\sin(\xi))}. \tag{21}$$

В итоге имеем:

$$\Delta\Omega + \frac{\mathrm{Ra}^2}{4}\Omega = 0, \quad \Omega|_G = 0. \tag{22}$$

Краевая задача (22) описывает собственные колебания пластины с закрепленными краями. Для квадратной области она легко решается аналитически. В результате получаем выражение для нейтральной кривой устойчивости основного состояния: (8), (9):

$$\mathrm{Ra}_0(\xi) = \frac{2\pi}{\cos(\pi/4 - \xi)}. \tag{23}$$

Значению (23) отвечают собственные функции задачи (19), которые с учётом (21) и (22) можно записать как

$$\psi(x,y) = \cos(\sqrt{2}\pi\,(x\cos(\xi) - y\sin(\xi)))\cos(\pi x)\cos(\pi y), \tag{24}$$

$$\theta(x,y) = -\sin(\sqrt{2}\,\pi\,(x\cos(\xi) - y\sin(\xi)))\cos(\pi x)\cos(\pi y). \tag{25}$$

Рисунок 2*а* содержит карту устойчивости основного состояния на плоскости параметров Ra и ξ. Нейтральная кривая для задачи без прокачки ($\mathrm{Pe} = 0$) (23) показана сплошной жирной линией. Существенное понижение порога устойчивости при повороте чипа вокруг своей оси связано с тем, что при фиксированном градиенте температуры его вертикальный размер с ростом ξ увеличивается. Угол $\xi = \pi/4$ отвечает ромбической форме сечения чипа, что обеспечивает его максимальный вертикальный размер. Критические возмущения функции тока и температуры (24), (25) показаны на рисунке 2*б*. Как видно, наклон линий равного уровня функции тока в точности соответствует наклону чипа относительно направления действия силы тяжести.

При прокачивании жидкости через чип (пористый блок) ($\mathrm{Pe} \neq 0$) выразить решение через элементарные функции, по-видимому, невозможно. Поэтому для определения нейтральных кривых прибегнем к методу Галёркина. В качестве базиса для аппроксимации ψ и θ выберем собственные функции задачи (22):

$$\Omega_i(x,y) = \Omega_{(k,m)}(x,y) = \cos(k\pi x)\cos(m\pi y).$$

В работе [23] подробно описана процедура применения метода и приведены выражения коэффициентов разложений. Как известно, в методе Галёркина точность зависит от числа задействованных в аппроксимации базисных функций. В данной работе количество функций увеличивалось до тех пор, пока результат вычислений не выходил на насыщение. В большинстве вычислительных экспериментов число базисных функций превышало 100. Приложение 1 содержит краткое описание метода решения.

Вернемся к рисунку 2*а*. Когда появляется прокачивание ($\mathrm{Pe} > 0$), косимметрия разрушается и двукратное вырождение снимается. Стоит отметить, что освобождение от вырождения может осуществляться двояко: при значениях угла ξ, когда чип близок к симметричным конфигурациям (квадрату при $\xi = 0$, ромбу при

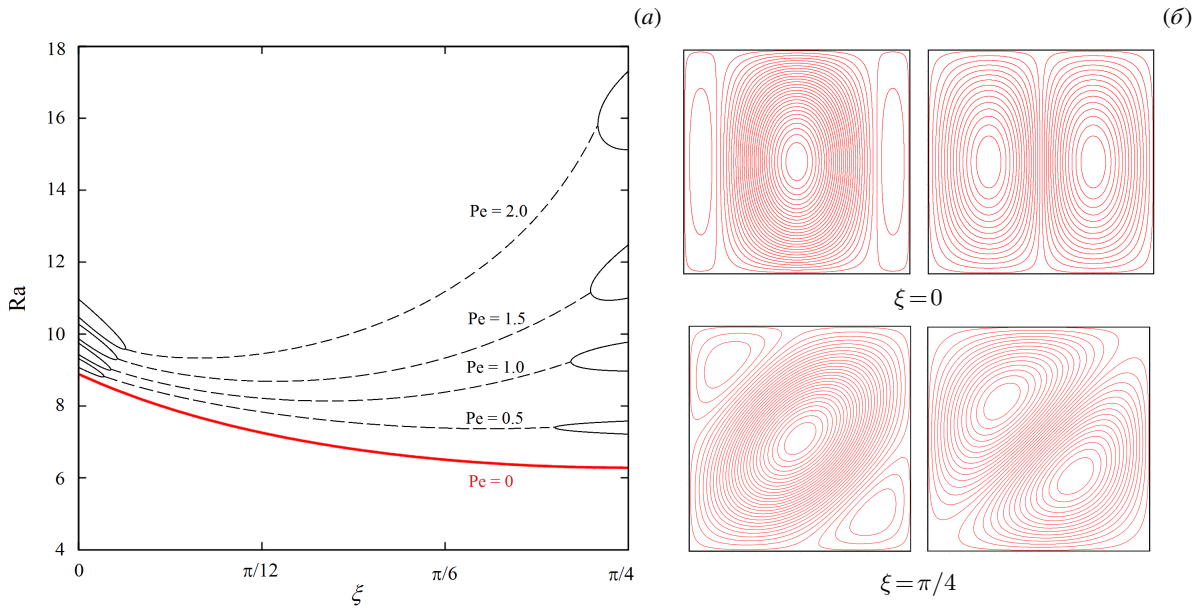

Рис. 2. Нейтральные кривые, выше которых основное состояние неустойчиво, на плоскости числа Рэлея Ra и угла наклона чипа ξ при разных значениях числа Пекле Pe: тонкие сплошные и штриховые линии соответствуют монотонной и колебательной неустойчивости, сплошная толстая линия – двукратно вырожденная нейтральная кривая для задачи с косимметрией (19) (*а*); линии равного уровня критических возмущений функции тока (*б*) и температуры (*в*), построенные на основе аналитического решения (24), (25) для двух значений параметра поворота ξ при отсутствии прокачки ($\mathrm{Pe}=0$)

$\xi=\pi/4$), взаимодействующие моды расщепляются, течение утрачивает устойчивость монотонно (сплошные линии на рисунке). Отметим также, что в этом случае проявляется существенный эффект стабилизации, возникающий при $\xi=\pi/4$, что объясняется смещением возмущений в верхний угол ромба, из которого раскачивать конвекцию сложнее. В сильно несимметричной области потеря устойчивости происходит колебательным образом (см. штриховые линии).

4. Уравнение ветвления слабо нелинейных решений на медленном многообразии

Рассмотрим вопрос о ветвлении решений вблизи точки первой бифуркации $\mathrm{Ra}_0(\xi)$, где основное состояние (8), (9) при слабом возмущении сменяется конвективным движением как в косимметричной, так и в симметричной задаче. Для определённости будем возмущать течение в чипе квадратной формы, полагая $\xi \ll 1$ (см. Рис. 2*а*). В этом случае полная нелинейная задача (11)–(13) упрощается и сводится к следующей:

$$\Delta\psi-\mathrm{Ra}\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\mathrm{Ra}\xi\frac{\partial\theta}{\partial y},$$

$$\Delta\theta+\mathrm{Ra}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+J(\psi,\theta)-\mathrm{Pe}\,\mathrm{Ra}\,y\frac{\partial\psi}{\partial x}+\mathrm{Ra}\xi\frac{\partial\psi}{\partial y}+\mathrm{Pe}\frac{\partial\theta}{\partial y}, \tag{26}$$

$$\psi|_G=0,\quad \theta|_G=0.$$

Для анализа слабо нелинейных решений воспользуемся методом многих временных масштабов [26], который позволяет находить определяющие уравнения на медленном многообразии, всегда существующее в малой окрестности точки бифуркации. Следуя идее метода, будем искать решение задачи (26) в виде разложений по малым отклонениям ε от основного состояния:

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Ra}\\ \mathrm{Pe}\\ \xi\\ \psi(x,y)\\ \theta(x,y)\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\pi\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ \end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}\mathrm{Ra}_1\\ \mathrm{Pe}_1\\ \xi_1\\ \psi_1(x,y)\\ \theta_1(x,y)\\ \dfrac{\partial}{\partial t_1}\end{pmatrix}+\varepsilon^2\begin{pmatrix}\mathrm{Ra}_2\\ \mathrm{Pe}_2\\ \xi_2\\ \psi_2(x,y)\\ \theta_2(x,y)\\ \dfrac{\partial}{\partial t_2}\end{pmatrix}+\varepsilon^3\begin{pmatrix}\mathrm{Ra}_3\\ \mathrm{Pe}_3\\ \xi_3\\ \psi_3(x,y)\\ \theta_3(x,y)\\ \dfrac{\partial}{\partial t_3}\end{pmatrix}+O(\varepsilon^4). \tag{27}$$

Как видно из (27), разложению в ряд подвергаются не только функции, но и параметры задачи, а также производная по времени. Последнее является ключевой особенностью метода. Так как заранее не известно, как течёт время на медленном многообразии, то для нахождения в ходе анализа нужного масштаба необходимо

определить иерархию времен. Для медленных времен в (27) введём обозначение: $t_n = \varepsilon^n t$, где формальный малый параметр ε характеризует степень надкритичности. Подставляя (27) в (26) и собирая слагаемые одного порядка малости n, приходим к серии задач, каждая из которых уточняет своё решение с предыдущего шага. Краевая задача о критических возмущениях в квадратном чипе, подогреваемом строго снизу, с порядком приближения решения $O(\varepsilon)$, приобретает вид:

$$\Delta\psi_1 - 2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\theta_1}{\partial x} = 0, \quad \Delta\theta_1 + 2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = 0, \quad \psi_1|_{x=\pm\frac{1}{2},y=\pm\frac{1}{2}} = 0, \quad \theta_1|_{x=\pm\frac{1}{2},y=\pm\frac{1}{2}} = 0. \tag{28}$$

Как показано выше (см. выражения (23)–(25)), решением (28) служат две пары собственных функций:

$$\begin{aligned} {\psi_1}^{(1)}(x,y) &= \varphi(x,y) = \cos(\sqrt{2}\pi x)\cos(\pi x)\cos(\pi y), \\ {\theta_1}^{(1)}(x,y) &= \vartheta(x,y) = -\sin(\sqrt{2}\pi x)\cos(\pi x)\cos(\pi y), \end{aligned} \tag{29}$$

и

$$\begin{aligned} {\psi_1}^{(2)}(x,y) &= \vartheta(x,y) = -\sin(\sqrt{2}\pi x)\cos(\pi x)\cos(\pi y), \\ {\theta_1}^{(2)}(x,y) &= -\varphi(x,y) = -\cos(\sqrt{2}\pi x)\cos(\pi x)\cos(\pi y). \end{aligned} \tag{30}$$

Поэтому правильным шагом является представление общего решения (28) в виде линейной комбинации (29) и (30) с амплитудами возмущений, зависящими от масштабов медленных времён:

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y) &= \alpha(t_1,t_2,...)\varphi(x,y) + \beta(t_1,t_2,...)\vartheta(x,y), \\ \theta_1(x,y) &= \alpha(t_1,t_2,...)\vartheta(x,y) - \beta(t_1,t_2,...)\varphi(x,y). \end{aligned} \tag{31}$$

Задачи со следующими порядками малости погрешности решения теперь выглядят как неоднородные версии задачи (28):

$$\Delta\psi_n - 2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\theta_n}{\partial x} = F_n, \quad \Delta\theta_n + 2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\psi_n}{\partial x} = G_n, \quad \psi_n|_{x=\pm\frac{1}{2},y=\pm\frac{1}{2}} = 0, \quad \theta_n|_{x=\pm\frac{1}{2},y=\pm\frac{1}{2}} = 0, \tag{32}$$

где порядок малости $n > 1$, а функции F_n и G_n определяются из задач с порядком, меньшим n. Понятно, что эти функции должны иметь специальный вид, чтобы задачи (32) были разрешимы.

Введём в рассмотрение скалярное произведение двух произвольных векторных функций, состоящих из двух компонент:

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \langle A_1,B_1\rangle + \langle A_2,B_2\rangle. \tag{33}$$

Чтобы для (28) получить сопряжённую задачу относительно скалярного произведения (33), представим (32) в операторном виде:

$$\hat{\mathbf{L}}U = 0, \quad \hat{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \Delta & -2\sqrt{2}\pi\dfrac{\partial}{\partial x} \\ 2\sqrt{2}\pi\dfrac{\partial}{\partial x} & \Delta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = (\psi_1,\theta_1). \tag{34}$$

Тогда сопряжённый оператор должен удовлетворять соотношению:

$$[\mathbf{U}^*,\hat{\mathbf{L}}\mathbf{U}] = [\hat{\mathbf{L}}^*\mathbf{U}^*,\mathbf{U}]. \tag{35}$$

Подставляя (34) в (35) и используя (28), (33), легко убедиться, что оператор является самосопряжённым. Следовательно, неоднородные задачи (32) имеют нетривиальное решение тогда и только тогда, когда вектор неоднородности ортогонален решению сопряжённой задачи в смысле произведения (33). Так как у задачи (28) существует два линейно независимых решения, то и условий разрешимости тоже два:

$$\langle\varphi,F_n\rangle + \langle\vartheta,G_n\rangle = 0, \qquad \langle\vartheta,F_n\rangle - \langle\varphi,G_n\rangle = 0. \tag{36}$$

После формулировки условий разрешимости (36) запишем в явном виде неоднородные задачи следующих порядках малости. Так, при $O(\varepsilon^2)$ имеем:

$$\begin{gathered} \Delta\psi_2 - 2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\theta_2}{\partial x} = \mathrm{Ra}_1\frac{\partial\theta_1}{\partial x} - 2\sqrt{2}\pi\xi_1\frac{\partial\theta_1}{\partial y}, \\ \Delta\theta_2 + 2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = \frac{\partial\theta_1}{\partial t_1} + J(\psi_1,\theta_1) - 2\sqrt{2}\pi\mathrm{Pe}_1 y\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + 2\sqrt{2}\pi\xi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial y} - \mathrm{Ra}_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \mathrm{Pe}_1\frac{\partial\theta_1}{\partial y}, \\ \psi_2|_{x=\pm\frac{1}{2},y=\pm\frac{1}{2}} = 0, \quad \theta_2|_{x=\pm\frac{1}{2},y=\pm\frac{1}{2}} = 0. \end{gathered} \tag{37}$$

При порядке $O(\varepsilon^3)$ в правой части содержится довольно много слагаемых, которые выглядят так:

$$\begin{gathered}\Delta\psi_3-2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\theta_3}{\partial x}=\mathrm{Ra}_1\frac{\partial\theta_2}{\partial x}+\mathrm{Ra}_2\frac{\partial\theta_1}{\partial x}-2\sqrt{2}\pi\left(\xi_1\frac{\partial\theta_2}{\partial y}+\xi_2\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\right)-\mathrm{Ra}_1\xi_1\frac{\partial\theta_1}{\partial y},\\ \Delta\theta_3,+2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\psi_3}{\partial x}=\frac{\partial\theta_1}{\partial t_2}+\frac{\partial\theta_2}{\partial t_1}+J(\psi_1,\theta_2)+J(\psi_2,\theta_1)-2\sqrt{2}\pi y\left(\mathrm{Pe}_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\mathrm{Pe}_2\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)-\mathrm{Ra}_1\mathrm{Pe}_1 y\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\\ +2\sqrt{2}\pi\left(\xi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\xi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)-\mathrm{Ra}_1\frac{\partial\psi_2}{\partial x}-\mathrm{Ra}_2\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\mathrm{Ra}_1\xi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\mathrm{Pe}_1\frac{\partial\theta_2}{\partial y}+\mathrm{Pe}_2\frac{\partial\theta_1}{\partial y},\\ \psi_3|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0,\quad \theta_3|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0.\end{gathered}\tag{38}$$

Условия разрешимости (36) для задачи 2-го порядка приводят к следующим динамическим уравнениям на медленном многообразии при изменении времени с масштабом t_1:

$$\begin{gathered}\langle\vartheta,\vartheta\rangle\frac{d\alpha}{dt_1}=2\alpha\left(\mathrm{Ra}_1\left\langle\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle-2\sqrt{2}\pi\xi_1\left\langle\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\rangle+\sqrt{2}\pi\mathrm{Pe}_1\left\langle y\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle\right)+\beta\mathrm{Pe}_1\left\langle\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\rangle,\\ \langle\varphi,\varphi\rangle\frac{d\beta}{dt_1}=2\beta\left(\mathrm{Ra}_1\left\langle\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle-2\sqrt{2}\pi\xi_1\left\langle\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\rangle+\sqrt{2}\pi\mathrm{Pe}_1\left\langle y\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle\right)-\alpha\mathrm{Pe}_1\left\langle\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\rangle.\end{gathered}\tag{39}$$

Уравнения (39) стали линейными, поэтому они не могут полноценно описывать ветвление решений. Чтобы удовлетворить (39), положим в левой части производные по t_1 равными нулю. Так как собственные функции задачи для квадратной полости известны (см. (29)), то в уравнениях (39) можно оценить значения интегралов. Важно, что функции (29) в случае квадратного чипа имеют различную чётность по отношению к отражению вдоль оси x (см. Рис. 2*б*). Поэтому часть интегралов в (39) обнуляется, а оставшиеся определяют сдвиг порога наступления конвекции благодаря прокачке:

$$\mathrm{Ra}_1=\zeta\mathrm{Pe}_1=-\mathrm{Pe}_1\sqrt{2}\pi\left\langle y\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle\Big/\left\langle\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle.$$

Перейдём к задаче порядка $O(\varepsilon^2)$. Для неё получаем:

$$\begin{gathered}\Delta\psi_2-2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\theta_2}{\partial x}=\zeta\mathrm{Pe}_1\left(\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-\beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-2\sqrt{2}\pi\xi_1\left(\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial y}-\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),\\ \Delta\theta_2+2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=(\alpha^2+\beta^2)J(\varphi,\vartheta)+2\sqrt{2}\pi\xi_1\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\beta\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)+\\ +\alpha\mathrm{Pe}_1\left(-\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial x}-2\sqrt{2}\pi y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)-\beta\mathrm{Pe}_1\left(\zeta\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+2\sqrt{2}\pi y\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),\\ \psi_2|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0,\quad \theta_2|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0.\end{gathered}\tag{40}$$

Как видно из (40), решение неоднородной задачи можно искать в виде:

$$\psi_2(x,y)=(\alpha^2+\beta^2)\Phi_1(x,y)+\alpha\xi_1\Omega_1(x,y)+\beta\xi_1\Sigma_1(x,y)+\alpha\mathrm{Pe}_1\Theta_1(x,y)+\beta\mathrm{Pe}_1\Psi_1(x,y),\tag{41}$$

$$\theta_2(x,y)=(\alpha^2+\beta^2)\Phi_2(x,y)+\alpha\xi_1\Omega_2(x,y)+\beta\xi_1\Sigma_2(x,y)+\alpha\mathrm{Pe}_1\Theta_2(x,y)+\beta\mathrm{Pe}_1\Psi_2(x,y),\tag{42}$$

где искомые функции в правой части должны удовлетворять соответствующим краевым задачам:

$$\begin{gathered}\Delta\Phi_1-2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}=0,\quad \Delta\Phi_2+2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=J(\varphi,\vartheta),\quad \Phi_1|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0,\quad \Phi_2|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0;\\ \Delta\Omega_1-2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}=-2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial y},\quad \Delta\Omega_2+2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}=2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \Omega_1|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0,\quad \Omega_2|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0;\\ \Delta\Sigma_1-2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Sigma_2}{\partial x}=2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \Delta\Sigma_2+2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Sigma_1}{\partial x}=2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\vartheta}{\partial y},\ \Sigma_1|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0,\ \Sigma_2|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0;\\ \Delta\Theta_1-2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Theta_2}{\partial x}=0,\quad \Delta\Theta_2+2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}-2\sqrt{2}\pi y\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \Theta_1|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0,\quad \Theta_2|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0;\\ \Delta\Psi_1-2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}=0,\quad \Delta\Psi_2+2\sqrt{2}\pi\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}-2\sqrt{2}\pi y\frac{\partial\vartheta}{\partial x},\quad \Psi_1|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0,\quad \Psi_2|_{x=\pm\frac12,y=\pm\frac12}=0.\end{gathered}\tag{43}$$

Перейдём к задаче с порядком малости $O(\varepsilon^3)$, подставим решения (41), (42) в (38) и наложим условия разрешимости (36). Часть слагаемых будет равняться нулю из-за свойств чётности собственных функций (29),

остальные интегралы вычислим с помощью системы компьютерной алгебры Maple. Приведём здесь лишь финальный результат — вид нормальной формы, задающей эволюцию с временным масштабом порядка t_2:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \alpha(R - \alpha^2 - \beta^2) + P\alpha\beta + P\xi\,\beta, \tag{44}$$

$$L\frac{d\beta}{d\tau} = \beta(R + DP^2 - \alpha^2 - \beta^2) + P(B\alpha^2 + M\beta^2) - P\xi\,\alpha, \tag{45}$$

где

$$\tau \equiv \frac{t_2}{\langle\vartheta,\vartheta\rangle}, \quad L \equiv \frac{\langle\varphi,\varphi\rangle}{\langle\vartheta,\vartheta\rangle}, \quad R \equiv 2\mathrm{Ra}_2\left\langle\vartheta,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle + \mathrm{Pe}_1^2\left(\left\langle\zeta\, y\vartheta + (y+\zeta)\Psi_1,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle + \zeta\left\langle\Psi_2,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right\rangle + \left\langle(\Theta_2-\Psi_1),\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\rangle\right),$$

$$B \equiv \frac{\left\langle\Phi_1,(1+2\sqrt{2}\pi\, y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle - \langle\Theta_1, J(\varphi,\vartheta)\rangle - \left\langle\Phi_2,\zeta\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right\rangle}{\langle(\Psi_2-\Theta_1), J(\varphi,\vartheta)\rangle}, \quad D \equiv \frac{\left\langle(\Theta_2-\Psi_1),\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x}\right\rangle - \left\langle\Psi_2,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right\rangle}{\langle(\Psi_2-\Theta_1), J(\varphi,\vartheta)\rangle^2}, \tag{46}$$

$$M \equiv \frac{\left\langle\Phi_1,(1+2\sqrt{2}\pi\, y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle + \langle\Psi_2, J(\varphi,\vartheta)\rangle - \left\langle\Phi_2,\zeta\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right\rangle}{\langle(\Psi_2-\Theta_1), J(\varphi,\vartheta)\rangle},$$

$$P \equiv \mathrm{Pe}_1\langle(\Psi_2-\Theta_1), J(\varphi,\vartheta)\rangle, \quad \xi \equiv \xi_1\frac{2\sqrt{2}\pi\left(\left\langle\Psi_1,\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\rangle + \left\langle\Psi_2,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right\rangle - \left\langle y\Sigma_1,\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x}\right\rangle\right) + \left\langle\Sigma_2,\dfrac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\rangle}{\langle(\Psi_2-\Theta_1), J(\varphi,\vartheta)\rangle}.$$

Отметим, что в уравнениях (44), (45) и в результатах, которые приводятся далее, параметр несовершенства симметрии представлен своим ведущим членом разложения ξ_1 (46) без изменения обозначения. Замечания о методиках решения краевых задач (43) и вычисления интегралов (46) приведены в Приложении 2.

Рассмотрим для системы (44), (45) два предельных случая. При прокачивании жидкости через чип с симметричным по горизонтали отражением ($\xi = 0$) получаем уравнения:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \alpha(R - \alpha^2 - \beta^2) + P\alpha\beta,$$

$$L\frac{d\beta}{d\tau} = \beta(R + DP^2 - \alpha^2 - \beta^2) + P(B\alpha^2 + M\beta^2),$$

аналогичные рассмотренным ранее в работе [23]. Отражательная симметрия физической задачи проявляет себя в инвариантности как уравнений, так и фазового пространства относительно преобразования $\alpha \to -\alpha$.

В сильно несимметричном чипе $\xi \gg 0$ и небольших скоростях прокачивания жидкости уравнения на плоскости имеют вид:

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \alpha(R - \alpha^2 - \beta^2) + P\xi\,\beta,$$

$$L\frac{d\beta}{d\tau} = \beta(R - \alpha^2 - \beta^2) - P\xi\,\alpha,$$

и, по-сути, совпадают с нормальной формой бифуркации Андронова–Хопфа для ответвления предельного цикла. Таким образом, модельные уравнения (44), (45) описывают переход между этими двумя предельными случаями.

5. Бифуркационный анализ

Хотя динамическая система (44), (45) имеет всего лишь 2-й порядок точности, изучение её бифуркационной структуры требует применения компьютера. Удобно использовать подходящую систему аналитических вычислений, например, Maple. В общем случае, когда параметры ξ и P отличны от нуля, система не имеет симметрий и косимметрий. Многочисленные состояния равновесия произвольно перемещаются по фазовой плоскости и сталкиваются друг с другом. В этом случае бифуркационные диаграммы лучше всего строить методом продолжения, который подразумевает движение по параметру с небольшим шагом. Для вычисления новых положений фиксированных точек в качестве начальных значений для поиска следует брать их координаты на предыдущем шаге. Смену устойчивости тривиального равновесия теперь возможно исследовать аналитически.

Рисунок 3 представляет собой карту устойчивости конвективного течения, составленную для динамической системы, описываемой уравнениями (44), (45), при следующих значениях интегралов и параметров (46):

$$L \approx 1.6, \quad M \approx 2.4, \quad B \approx 1.4, \quad D \approx 1.8, \quad P = 1. \tag{47}$$

Вариация числа Пекле качественно не меняет сценарий ветвления, а приводит лишь к масштабированию карты устойчивости, поэтому в (47) она была зафиксирована. Для лучшего понимания ветвления решений при изменении

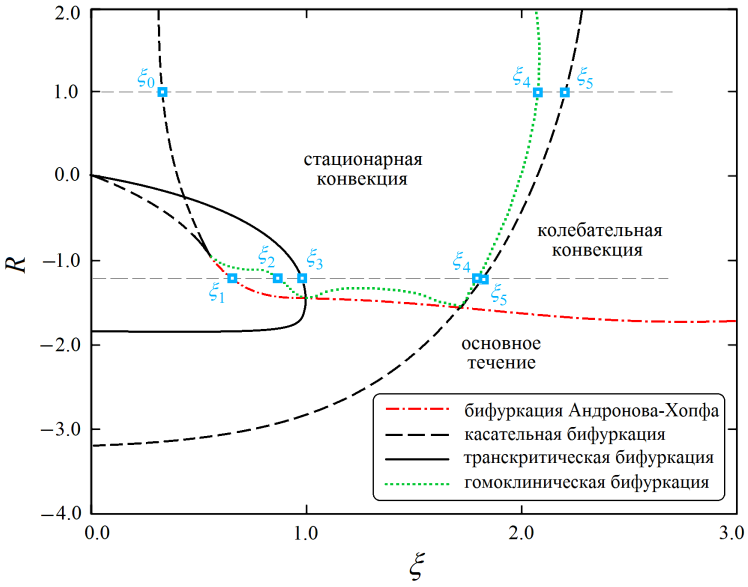

Рис. 3. Карта устойчивости на плоскости параметров «несовершенство симметрии ξ–надкритичность R» при фиксированном значении параметра прокачивания P=1 и разных типах бифуркаций; штриховыми горизонтальными линиями показаны положения двух характерных срезов карты устойчивости

угла наклона, выполняющего роль параметра несовершенства отражательной симметрии чипа, на рисунке 4 показаны бифуркационные диаграммы в двух характерных горизонтальных разрезах карты устойчивости. Как видно из рисунка, бифуркационная структура системы, полученная вблизи точки первой бифуркации, выглядит нестандартно усложнённой. Здесь можно встретить множественность стационарных решений и их ветвление (толстые сплошные и штриховые линии), мягкое ответвление предельных циклов через бифуркацию Андронова–Хопфа (толстые сплошные линии со стрелками), а также гомоклинические бифуркации (см. точечные линии, Рис. 3). Причина такого поведения заключается в свойстве косимметрии, которое имеется у системы при отсутствии прокачивания жидкости через пористый блок ($\mathrm{Pe}=0$). В этом случае в надкритической области от тривиального равновесия ответвляется цикл равновесий:

$$\alpha^2+\beta^2=R. \tag{48}$$

В условиях прокачивания жидкости косимметрия системы разрушается. Сначала рассмотрим последовательность ветвления решения в идеально симметричном относительно своего отражения по горизонтали чипе ($\xi=0$). Рисунок 4 показывает, что фазовый портрет системы включает четыре нетривиальных равновесия, каждое из которых отвечает определённому виду стационарной конвекции:

$$O_{1,2}:\quad \alpha_{1,2}=0,\quad \beta_{1,2}=MP/2\pm\sqrt{(M^2+4D)P^2+4R}; \tag{49}$$

$$O_{3,4}:\quad \alpha_{3,4}=\pm\sqrt{R-\beta_{3,4}^2+P(M-B)\beta_{3,4}},\quad \beta_{3,4}=-\frac{BR}{P(D+B(M-B))}. \tag{50}$$

Как видно из формулы (49), пара равновесий $O_{1,2}$ появляется в подкритической области параметра R благодаря касательной бифуркации при $R^*=-P^2(M^2+4D)/4$.

Вертикальное течение стимулирует возникновение решений определённой симметрии, в данном случае двухвихревой конвекции (30), управляемой амплитудой β. Из двух точек решение устойчиво лишь в одной, а именно то решение, направление центральной струи которого совпадает с направлением основного течения. На карте устойчивости эта ветвь начинается в левом нижнем углу (штриховая линия, Рис. 3). С ростом надкритичности одно из решений (49) пересекает тривиальное равновесие при $R^{**}=-DP^2$ и обменивается с ним устойчивостью (сплошная толстая линия на рисунке 3).

При $R=0$ от тривиального равновесия за счёт вилочной бифуркации ответвляется пара решений (50), отвечающих движению другой чётности. Решения (29), управляемые амплитудой α, представляют собой трёхвихревые течения. Вертикальное прокачивание подавляет их, поэтому они неустойчивы. Фазовый портрет системы для квадратного чипа представлен на рисунке 4*a* слева для случая $R=1$, когда решения во всех четырёх фиксированных точках уже ответвились. Как видно из рисунка, пара точек (49) притягивает к себе все траектории, которые делят фазовое пространство.

Проследим теперь, как происходит ветвление решений при постепенном нарушении симметрии чипа. Как видно из диаграммы (Рис. 4*a*), при наклоне полости нетривиальные решения (49) и (50) начинают попарно сближаться. Этот момент показан также на фазовом портрете на рисунке 5. При $\xi=\xi_0$ пара равновесий O_2 и

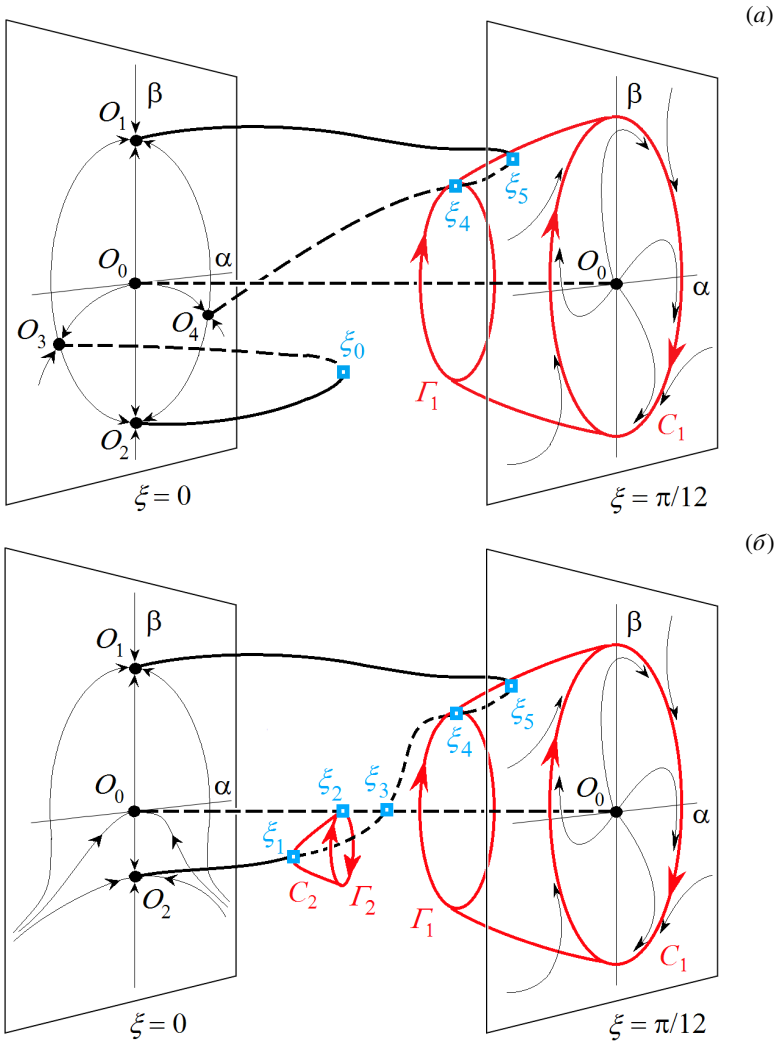

Рис. 4. Бифуркационные диаграммы в характерных срезах карты устойчивости на рисунке 3 при разном угле наклона чипа ξ и различных значениях параметра надкритичности R: 1.0 (*а*), -1.2 (*б*)

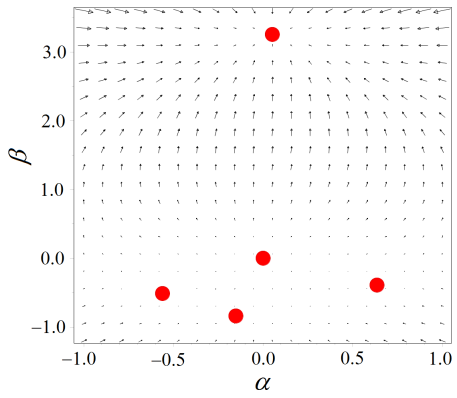

Рис. 5. Векторное поле и фиксированные точки аттракторы динамической системы (44), (45) при $R = 1.0$, $P = 1.0$, $\xi = 0.1$, вычисленные с помощью пакета Maple; программа для анализа бифуркационной структуры динамической системы на языке Maple доступна по ссылке https://journal.permsc.ru/index.php/ccm/ru/article/view/CCMv19n1a4

O_3 сливается и исчезает за счёт касательной бифуркации. Вторая пара O_1 и O_4 смещается в первый квадрант, который описывает конвективные движения с предпочтительной закруткой. При $\xi = \xi_4$ у седлового равновесия O_4 формируется гомоклиническая траектория Γ_1, при разрушении которой жёстким образом возникает предельный цикл C_1. При дальнейшем движении в область асимметрии равновесия O_1 и O_4 сливаются и исчезают при $\xi = \xi_5$. В фазовом пространстве системы остаётся лишь предельный цикл C_1, который притягивает к себе все траектории.

В другом срезе карты устойчивости ($R = -1.2$) на бифуркационной диаграмме в симметричной кювете ($\xi = 0$) имеется только два нетривиальных равновесия, которые начинают смещаться в первый квадрант при вариации параметра несовершенства симметрии. Тип решения при этом меняется. Точка равновесия O_2 вместо узла становится фокусом. При $\xi = \xi_1$ происходит бифуркация Андронова–Хопфа и мягко рождается устойчивый предельный цикл C_2. Существует это экзотичное решение лишь в узкой области карты устойчивости между штрихпунктирной и и пунктирной линиями (см. Рис. 3). Очень быстро цикл натыкается на седловое тривиальное равновесие и исчезает посредством обратной гомоклинической бифуркации при $\xi = \xi_2$. Меняясь с нулевым равновесием устойчивостью при $\xi = \xi_3$, точка O_2 входит в первый квадрант, где дальнейшем повторяется сценарий, описанный выше для диаграммы на рисунке 4*а*.

6. Обсуждение

В последние годы постановка задачи об устойчивости неизотермической жидкости, просачивающейся через пористую среду, вновь приобрела актуальность в связи с бурным развитием микрожидкостных устройств и появлением технологий выращивания клеточных тканей. Как правило, перфузионный биореактор включает каркас (scaffold), предназначенный для поддержки роста клеток, который, по-сути, выглядит как пористый чип определённой структуры, через который прокачивается питательный раствор для клеток. Клетки засеиваются в пористую матрицу, где они прикрепляются к стенкам пор, затем под действием течения делятся и постепенно заполняют пространство пор. Для поддержания комфортных условий размножения клеток система определённым образом подогревается. При применении таких устройств акцент делается на поиске способов управления потоками веществ внутри каркасов (scaffold), так как клетки чувствительны к изменению поля касательных напряжений и факторам роста. Класс пористых чипов, допускающих в математической постановке задачи присутствие свойств косимметрии/симметрии, интересен тем, что незначительные вариации их геометрических параметров приводят к резким изменениям характеристик течения. В данной работе показано, что малые (в пределах нескольких градусов) изменения ориентации квадратного чипа по отношению к направлению прокачивания жидкости вызывают в них сложную перестройку течения — от стационарного к колебательному. Таким образом, путём вариации параметра несовершенства симметрии задачи можно переключать режимы работы перфузионного биореактора.

Заметим, что в исходной математической постановке задачи (2)–(6) роль чипа исполнял бесконечно протяжённый цилиндр. Это требовалось для того, чтобы в задаче появилась трансляционная симметрия в направлении оси цилиндра. С математической точки зрения это позволило формально рассматривать класс только двумерных решений, которые не зависят от осевой координаты. Казалось бы, это противоречит используемой в данной работе области прокачки в виде конечного чипа (см. Рис. 1), однако с физической точки зрения двумерные течения могут создавать угрозу именно в коротких цилиндрах. Например, в работе [27] показано, что в цилиндре квадратного сечения трёхмерные возмущения становятся более опасными, если длина цилиндра начинает превышать значение, равное 0.23 от стороны квадрата. Если же цилиндр более короткий, то трёхмерные возмущения в нём стабилизируются, и задача устойчивости совпадает с задачей, представленной в данной работе.

7. Заключение

В работе исследованы конвективные движения в подогреваемом снизу пористом цилиндре квадратного сечения, который слегка наклонён по отношению к силе тяжести в плоскости сечения (чипе). Пористая среда включена в твёрдый массив высокой теплопроводности, в вертикальном направлении производится однородное прокачивание жидкости через систему. Построена карта устойчивости, изучена структура ветвления слабо нелинейных решений в малой окрестности точки первой бифуркации.

Автор благодарен профессорам Д.В. Любимову и В.И. Юдовичу, с которыми в своё время имел счастливую возможность обсуждать вопросы, связанные с косимметрией, а также признателен ученикам В.И. Юдовича — профессорам Л.Г. Куракину, В.Г. Цибулину и В.Н. Говорухину, поскольку недавнее общение с ними послужило стимулом к написанию этой статьи.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 25-11-00338) https://rscf.ru/project/25-11-00338/.

Приложение 1

Будем рассматривать задачу о конвективных движениях (11)–(13) в квадратной полости $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ с находящейся в ней квадратной мембраной, закреплённой по краям. Учитывая пространственную симметрию и граничные условия, в качестве базиса для аппроксимации искомых переменных задачи выберем собственные функции механических колебаний мембраны:

$$f_i(x,y) = 2\sin(k\pi x)\sin(m\pi y) \quad (i,k,m = 1,2,3...), \tag{51}$$

нормированные следующим образом:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle f_i, \Delta f_j \rangle = -\omega_i \delta_{ij}, \quad \omega_i = -(k^2+m^2)\pi^2.$$

Представим возмущения функции тока и температуры в виде разложений:

$$\psi(t,x,y) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t) f_n(x,y), \quad \theta(t,x,y) = \sum_{n=1}^{N} b_n(t) f_n(x,y), \tag{52}$$

где a_n, b_n — искомые коэффициенты, в общем случае зависящие от времени. Согласно методу Галёркина, они определяются из требования ортогональности системе пробных функций (51) задаваемых, соответственно, уравнениями (11) и (12), дифференциальных операторов L_ψ и L_θ:

$$\langle f_i(x,y), L_\psi(x,y) \rangle = 0, \quad \langle f_i(x,y), L_\theta(x,y) \rangle = 0. \tag{53}$$

Подставляя разложения (52) в уравнения (11), (12) и производя интегрирование выражений (53), приходим к системе из N автономных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. В общем случае построенная система является нелинейной и может быть использована для изучения нелинейной динамики исходной задачи (11)–(13) на высоких закритичностях. В данной работе ставилась более скромная задача: исследовать устойчивость основного течения (8), (9) в линейном приближении. Пренебрегая в (53) нелинейными слагаемыми и считая коэффициенты a_n, b_n независимыми от времени, получаем следующую систему однородных линейных уравнений:

$$-\omega_i^2 b_i + \frac{\mathrm{Ra}^2\mathrm{Pe}}{2\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Pe}\right)}\left(\cos(\xi)\sin(\xi)\sum_{n,l=1}^{N}\frac{L_{in}D_{nl}+N_{in}B_{nl}}{\omega_n^2}b_l - \cos^2(\xi)\sum_{n,l=1}^{N}\frac{L_{in}B_{nl}}{\omega_n^2}b_l - \sin^2(\xi)\sum_{n,l=1}^{N}\frac{N_{in}D_{nl}}{\omega_n^2}b_l\right) -$$

$$-\mathrm{Pe}\left(\sin(\xi)\sum_{n=1}^{N}B_{in}b_n + \cos(\xi)\sum_{n=1}^{N}D_{in}b_n\right) = 0. \tag{54}$$

Здесь ненулевые элементы матриц имеют вид:

$$B_{ij} = B_{(k,m),(l,n)} = \frac{4kl}{k^2-l^2}, \quad \text{если } m=n,\ k+l=odd,$$

$$D_{ij} = D_{(k,m),(l,n)} = \frac{4mn}{m^2-n^2}, \quad \text{если } k=l,\ m+n=odd, \tag{55}$$

$$L_{ij} = L_{(k,m),(l,n)} = \frac{16\pi^2 nklm\mathrm{Pe}\cos(\xi)(\cos((m+n)\pi)e^{\mathrm{Pe}\cos(\xi)}-1)}{(k^2-l^2)(\mathrm{Pe}^2\cos^2(\xi)+\pi^2(m-n)^2)(\mathrm{Pe}^2\cos^2(\xi)+\pi^2(m+n)^2)}, \quad \text{если } k+l=odd,$$

$$N_{ij} = N_{(k,m),(l,n)} = \frac{16\pi^2 nklm\mathrm{Pe}\sin(\xi)(\cos((k+l)\pi)e^{\mathrm{Pe}\sin(\xi)}-1)}{(m^2-n^2)(\mathrm{Pe}^2\sin^2(\xi)+\pi^2(k-l)^2)(\mathrm{Pe}^2\sin^2(\xi)+\pi^2(k+l)^2)}, \quad \text{если } m+n=odd.$$

Процедура исследования линейной устойчивости основного состояния включает расчёт собственных значений матрицы, задаваемой выражениями (54), (55), и фиксирование момента, когда при варьировании управляющих параметров задачи инкремент впервые пересекает мнимую ось. Так как коэффициенты матрицы (55) получаются в общем виде, то процедура уточнения критического значения может быть организована за счёт автоматического добавления новых базисных функций до тех пор, пока найденное значение не выйдет на насыщение в рамках заданной точности решения.

Приложение 2

Краевые задачи (43) и интегральные соотношения (46) реализуются с помощью системы аналитических вычислений Maple. При этом для упрощения работы полезно использовать интегральные преобразования. Первая краевая задача в списке (46) решается сравнительно просто, поскольку удовлетворяющее граничным условиям частное решение имеет следующий вид:

$$\Phi_1(x,y) = \frac{1}{16}\sin(2\pi x)\sin(2\pi y), \quad \Phi_2(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{16}(\sin(2\pi y)+\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)). \tag{56}$$

Решение остальных краевых задач является весьма громоздким. Можно заметить, однако, что из-за определённой чётности интегралов (46) необходимо решать не все краевые задачи. Например, функции Σ_1 и Σ_2 требуются только в интегралах, входящих в перемасшабированный параметр несовершенства. Функции Ω_1 и Ω_2 вообще не входят в выражения (46). При этом активно используются функции Θ_i, Ψ_i.

Рассмотрим, для примера, коэффициент M. Для его определения требуется вычислить значение интеграла $\langle\Theta_1, J(\varphi,\vartheta)\rangle$. Покажем, что это можно сделать, не решая краевую задачу для Θ_1 и Θ_2 из списка (43). Умножаем уравнение для Φ_2 на Θ_1 и интегрируем по квадратной области. Одновременно умножаем уравнение для Θ_2 на Φ_1 и также интегрируем по области. Тогда, соответственно, получаем:

$$\langle\Theta_1,\Delta\Phi_2\rangle + 2\sqrt{2}\pi\left\langle\Theta_1, \frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right\rangle = \langle\Theta_1, J(\varphi,\vartheta)\rangle, \tag{57}$$

$$\langle\Phi_1,\Delta\Theta_2\rangle + 2\sqrt{2}\pi\left\langle\Phi_1, \frac{\partial\Theta_1}{\partial x}\right\rangle = \left\langle\Phi_1, \frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right\rangle - 2\sqrt{2}\pi\left\langle\Phi_1, y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\rangle. \tag{58}$$

В правой части (57) появился искомый интеграл. Интегралы в правой части (58) легко вычисляются, так как все подынтегральные функции уже известны. Выполняя интегрирование по частям и учитывая граничные условия в (43), произведём следующие преобразования с интегралами в левой части (58):

$$\langle\Phi_1,\Delta\Theta_2\rangle = \langle\Theta_2,\Delta\Phi_1\rangle = 2\sqrt{2}\pi\left\langle\Theta_2, \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right\rangle = -2\sqrt{2}\pi\left\langle\Phi_2, \frac{\partial\Theta_2}{\partial x}\right\rangle = -\langle\Phi_2,\Delta\Theta_1\rangle = -\langle\Theta_1,\Delta\Phi_2\rangle; \tag{59}$$

$$2\sqrt{2}\pi\left\langle \Phi_1, \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} \right\rangle = -2\sqrt{2}\pi\left\langle \Theta_1, \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right\rangle.$$

При преобразованиях в (59) были использованы уравнения для Φ_1 и Θ_1. Сравнивая выражения (57) и (58), видим, что их правые части равны по модулю и противоположны по знаку. Окончательно получаем:

$$\langle \Theta_1, J(\varphi,\vartheta)\rangle = 2\sqrt{2}\pi\left\langle \Phi_1, y\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \Phi_1, \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right\rangle.$$

Таким образом, искомый интеграл выражается через интеграл от уже известных функций. Подобным образом можно вычислить все интегралы в (46).

Литература

1. *Nield D.A.*, *Bejan A.* Convection in Porous Media. Springer International Publishing, 2017. 988 p. DOI: 10.1007/978-3-319-49562-0
2. *Сираев Р.Р.* Фильтрация жидкости в пористой среде Форцгеймера с пространственно неоднородными пористостью и проницаемостью // Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т. 12, № 3. С. 281–292. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.3.24
3. *Maryshev B.S.*, *Lyubimova T.P.*, *Lyubimov D.V.* Stability of homogeneous seepage of a liquid mixture through a closed region of the saturated porous medium in the presence of the solute immobilization // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 102. P. 113–121. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.016
4. *Kolchanova E.A.*, *Kolchanov N.V.* Convective solute transport in a sloping two-layered active porous medium with a pore clogging effect // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2025. Vol. 161. P. 108526. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2024.108526
5. *De Wit A.* Chemo-Hydrodynamic Patterns and Instabilities // Annual Review of Fluid Mechanics. 2020. Vol. 52, no. 1. P. 531–555. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010719-060349
6. *Varma M.V.*, *Kandasubramanian B.*, *Ibrahim S.M.* 3D printed scaffolds for biomedical applications // Materials Chemistry and Physics. 2020. Vol. 255. P. 123642. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2020.123642
7. *Zhianmanesh M.*, *Varmazyar M.*, *Montazerian H.* Fluid Permeability of Graded Porosity Scaffolds Architectured with Minimal Surfaces // ACS Biomaterials Science &; Engineering. 2019. Vol. 5, no. 3. P. 1228–1237. DOI: 10.1021/acsbiomaterials.8b01400
8. *Krasnyakov I.*, *Bratsun D.* Cell-Based Modeling of Tissue Developing in the Scaffold Pores of Varying Cross-Sections // Biomimetics. 2023. Vol. 8. P. 562. DOI: 10.3390/biomimetics8080562
9. *Bratsun D.*, *Elenskaya N.*, *Siraev R.*, *Tashkinov M.* Numerical Analysis of Permeability of Functionally Graded Scaffolds // Fluid Dynamics & Materials Processing. 2024. Vol. 20, no. 7. P. 1463–1479. DOI: 10.32604/fdmp.2024.047928
10. *Bratsun D.*, *Kostarev K.* Phase Transition in a Dense Swarm of Self-Propelled Bots // Fluid Dynamics & Materials Processing. 2024. Vol. 20, no. 8. P. 1785–1798. DOI: 10.32604/fdmp.2024.048206
11. *Lapwood E.R.* Convection of a fluid in a porous medium // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1948. Vol. 44, no. 4. P. 508–521. DOI: 10.1017/S030500410002452X
12. *Riley D.S.*, *Winters K.H.* Modal exchange mechanisms in Lapwood convection // Journal of Fluid Mechanics. 1989. Vol. 204. P. 325–358. DOI: 10.1017/S0022112089001771
13. *Гершуни Г.З.*, *Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
14. *Любимов Д.В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикладная механика и техническая физика. 1975. Т. 16, № 2. С. 131–137.
15. *Глухов А.Ф.*, *Любимов Д.В.*, *Путин Г.Ф.* Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости равновесия // Доклады Академии наук СССР. 1978. Т. 238, № 3. С. 549–551.
16. *Юдович В.И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Математические заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.
17. *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1995. Vol. 5, no. 2. P. 402–411. DOI: 10.1063/1.166110
18. *Govorukhin V.N.*, *Yudovich V.I.* Bifurcations and selection of equilibria in a simple cosymmetric model of filtrational convection // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1999. Vol. 9, no. 2. P. 403–412. DOI: 10.1063/1.166417
19. *Юдович В.И.* О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // Доклады Академии наук. 2004. Т. 398, № 1. С. 57–61.
20. *Tsybulin V.G.*, *Karasözen B.*, *Ergenç T.* Selection of steady states in planar Darcy convection // Physics Letters A. 2006. Vol. 356, no. 3. P. 189–194. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.03.043
21. *Karasözen B.*, *Trofimova A.V.*, *Tsybulin V.G.* Natural convection in porous annular domains: Mimetic scheme and family of steady states // Journal of Computational Physics. 2012. Vol. 231, no. 7. P. 2995–3005. DOI: 10.1016/j.jcp.2012.01.004

ISSN: 1999-6691, e-ISSN: 2782-3709 DOI: 10.7242/1999-6691/2026.19.1.4

22. *Kurakin L.G.*, *Kurdoglyan A.V.* Semi-Invariant Form of Equilibrium Stability Criteria for Systems with One Cosymmetry // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, no. 4. P. 525–531. DOI: 10.20537/nd190411

23. *Bratsun D.A.*, *Lyubimov D.V.*, *Roux B.* Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1995. Vol. 82. P. 398–417. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00045-6

24. *Nilsen T.*, *Storesletten L.* An Analytical Study on Natural Convection in Isotropic and Anisotropic Porous Channels // Journal of Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 396–401. DOI: 10.1115/1.2910390

25. *Storesletten L.*, *Tveitereid M.* Natural convection in a horizontal porous cylinder // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1991. Vol. 34. P. 1959–1968. DOI: 10.1016/0017-9310(91)90207-U

26. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

Сведения об авторах:

Брацун Дмитрий Анатольевич, дфмн, доц., зав. каф., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29; e-mail: DABracun@pstu.ru; ORCID: 0000-0002-3229-2330

Research article

Analysis of the bifurcation structure near the excitation threshold of convection during uniform fluid infiltration through a slightly asymmetric porous chip

D.A. Bratsun

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

Fluid-saturated porous scaffolds are crucial components of flow perfusion bioreactors, which act as microfluidic chips. These devices are used to grow cell cultures in a constant, steady-state environment through maintaining a continuous flow of nutrient-rich solution. Cell proliferation often occurs in non-isothermal conditions, which under gravity can lead to the onset of thermal convection. In this paper, we consider the problem of convection excitation in a porous chip heated from below, across which uniform pumping of an incompressible fluid is carried out. It has been known that incorporating a fluid-saturated porous structure into highly conductive impermeable medium leads to the fact that the boundary value problem takes on the cosymmetry property for any simply connected 2-D shape of the domain. This causes branching of one-parameter families of heterogeneous equilibrium states. Note however that even weak fluid pumping across the porous medium leads to cosymmetry breaking and the type of dynamic behavior of the system in this case depends on the domain symmetry. If under reflection the pumping domain is symmetric about the vertical axis, the resulting convection will be stationary. In the asymmetric domain, periodic oscillations are excited. In this paper, we investigate the bifurcation structure near the convection excitation threshold occurring in a weakly asymmetric domain. The main focus is on the transition from stationary to oscillatory convection. The study of the system includes the following issues: finding the basic state of the system analytically; linear analysis of its stability using the Galerkin method; analysis of weakly nonlinear solutions near the first bifurcation point using the method of multiple time scales. It has been shown that branching of solutions near the excitation threshold of convection in a weakly non-cosymmetric system of equations defined in a weakly asymmetric domain is of surprisingly complex nature. The transition process includes the Andronov–Hopf bifurcation, the birth and death of limiting cycles at the backward and forward tangential bifurcations of a pair of equilibria, respectively; and the formation of homoclinic trajectories. Stability maps are constructed on the planes of control parameters of the problem: the Rayleigh number for the porous medium, the thermal Péclet number, and the chip tilt angle, which acts as a symmetry imperfection parameter. Bifurcation diagrams of a dynamic system on its slow manifold are presented.

Keywords: porous medium, convective instability, bifurcation, symmetry, cosymmetry

Received: 13.10.2025 / *Published online*: 01.06.2026

Acknowledgements

The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-11-00338).

References

1. *Nield D.A.*, *Bejan A.* Convection in Porous Media. Springer International Publishing, 2017. 988 p. DOI: 10.1007/978-3-319-49562-0

©Authors 2026 Translation of the original article in Russian This is an open access article under the CC BY 4.0 license

2. *Siraev R.R.* Fluid transport in Forchheimer porous medium with spatially varying porosity and permeability. Computational Continuum Mechanics. 2019. Vol. 12, no. 3. P. 281–292. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.3.24
3. *Maryshev B.S.*, *Lyubimova T.P.*, *Lyubimov D.V.* Stability of homogeneous seepage of a liquid mixture through a closed region of the saturated porous medium in the presence of the solute immobilization. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 102. P. 113–121. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.016
4. *Kolchanova E.A.*, *Kolchanov N.V.* Convective solute transport in a sloping two-layered active porous medium with a pore clogging effect. International Communications in Heat and Mass Transfer. 2025. Vol. 161. P. 108526. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2024.108526
5. *De Wit A.* Chemo-Hydrodynamic Patterns and Instabilities. Annual Review of Fluid Mechanics. 2020. Vol. 52, no. 1. P. 531–555. DOI: 10.1146/annurev-fluid-010719-060349
6. *Varma M.V.*, *Kandasubramanian B.*, *Ibrahim S.M.* 3D printed scaffolds for biomedical applications. Materials Chemistry and Physics. 2020. Vol. 255. P. 123642. DOI: 10.1016/j.matchemphys.2020.123642
7. *Zhianmanesh M.*, *Varmazyar M.*, *Montazerian H.* Fluid Permeability of Graded Porosity Scaffolds Architectured with Minimal Surfaces. ACS Biomaterials Science &; Engineering. 2019. Vol. 5, no. 3. P. 1228–1237. DOI: 10.1021/acsbiomaterials.8b01400
8. *Krasnyakov I.*, *Bratsun D.* Cell-Based Modeling of Tissue Developing in the Scaffold Pores of Varying Cross-Sections. Biomimetics. 2023. Vol. 8. P. 562. DOI: 10.3390/biomimetics8080562
9. *Bratsun D.*, *Elenskaya N.*, *Siraev R.*, *Tashkinov M.* Numerical Analysis of Permeability of Functionally Graded Scaffolds. Fluid Dynamics & Materials Processing. 2024. Vol. 20, no. 7. P. 1463–1479. DOI: 10.32604/fdmp.2024.047928
10. *Bratsun D.*, *Kostarev K.* Phase Transition in a Dense Swarm of Self-Propelled Bots. Fluid Dynamics & Materials Processing. 2024. Vol. 20, no. 8. P. 1785–1798. DOI: 10.32604/fdmp.2024.048206
11. *Lapwood E.R.* Convection of a fluid in a porous medium. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1948. Vol. 44, no. 4. P. 508–521. DOI: 10.1017/S030500410002452X
12. *Riley D.S.*, *Winters K.H.* Modal exchange mechanisms in Lapwood convection. Journal of Fluid Mechanics. 1989. Vol. 204. P. 325–358. DOI: 10.1017/S0022112089001771
13. *Gershuni G.Z.*, *Zhuhovitsky E.M.* Convective Stability of Incompressible Fluids. Jerusalem: Keter Publishing House, 1976. 330 p.
14. *Lyubimov D.V.* Convective motions in a porous medium heated from below. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1975. Vol. 16, no. 2. P. 257–261. DOI: 10.1007/BF00858924
15. *Glukhov A.F.*, *Lyubimov D.V.*, *Putin G.F.* Konvektivnyye dvizheniya v poristoy srede vblizi poroga neustoychivosti ravnovesiya. Doklady Akademii nauk SSSR. 1978. Vol. 238, no. 3. P. 549–551.
16. *Yudovich V.I.* Cosymmetry, degeneration of solutions of operator equations, and onset of a filtration convection. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1991. Vol. 49. P. 540–545. DOI: 10.1007/BF01142654
17. *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1995. Vol. 5, no. 2. P. 402–411. DOI: 10.1063/1.166110
18. *Govorukhin V.N.*, *Yudovich V.I.* Bifurcations and selection of equilibria in a simple cosymmetric model of filtrational convection. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1999. Vol. 9, no. 2. P. 403–412. DOI: 10.1063/1.166417
19. *Yudovich V.I.* Bifurcations under perturbations violating cosymmetry. Doklady Physics. 2004. Vol. 49. P. 522–526. DOI: 10.1134/1.1810578
20. *Tsybulin V.G.*, *Karasözen B.*, *Ergenç T.* Selection of steady states in planar Darcy convection. Physics Letters A. 2006. Vol. 356, no. 3. P. 189–194. DOI: 10.1016/j.physleta.2006.03.043
21. *Karasözen B.*, *Trofimova A.V.*, *Tsybulin V.G.* Natural convection in porous annular domains: Mimetic scheme and family of steady states. Journal of Computational Physics. 2012. Vol. 231, no. 7. P. 2995–3005. DOI: 10.1016/j.jcp.2012.01.004
22. *Kurakin L.G.*, *Kurdoglyan A.V.* Semi-Invariant Form of Equilibrium Stability Criteria for Systems with One Cosymmetry. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, no. 4. P. 525–531. DOI: 10.20537/nd190411
23. *Bratsun D.A.*, *Lyubimov D.V.*, *Roux B.* Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium. Physica D: Nonlinear Phenomena. 1995. Vol. 82. P. 398–417. DOI: 10.1016/0167-2789(95)00045-6
24. *Nilsen T.*, *Storesletten L.* An Analytical Study on Natural Convection in Isotropic and Anisotropic Porous Channels. Journal of Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 396–401. DOI: 10.1115/1.2910390
25. *Storesletten L.*, *Tveitereid M.* Natural convection in a horizontal porous cylinder. International Journal of Heat and Mass Transfer. 1991. Vol. 34. P. 1959–1968. DOI: 10.1016/0017-9310(91)90207-U
26. *Nayfeh A.H.* Introduction in perturbation techniques. New York: Wiley-VCH, 1981. 533 p.