

Научная статья

## Взаимодействие механического, температурного и диффузионного полей в сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарного нагрева

А.В. Земсков<sup>1,2</sup>, Д.О. Казимиров<sup>1</sup>, А.В. Малашкин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

В статье рассматриваются явления, обусловленные взаимодействием механического, температурного и диффузионного полей в сплошном ортотропном многокомпонентном цилиндре, находящемся под действием нестационарных внешних возмущений, заданных на поверхности цилиндра. Объёмные возмущения отсутствуют. Предполагается, что физико-механические процессы, происходящие в цилиндре, зависят только от радиальной координаты. Математическая постановка задачи включает систему связанных уравнений нестационарной термоупругой диффузии, записанных в полярной системе координат. Используемая модель тепломассопереноса учитывает конечную скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений. Кинематические соотношения для тепловых и диффузионных потоков строятся на базе обобщённой теории Лорда–Шульмана. Предложен алгоритм решения полярно-симметричной задачи, основанный на представлении искомого поля в интегральной форме в виде свёрток по времени функций Грина и функций, описывающих поверхностные термомеханодиффузионные возмущения. Для нахождения функций Грина применяются интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение по функциям Бесселя (ряд Фурье–Бесселя), что позволяет свести исходную начально-краевую задачу к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда Фурье. Решения этой системы являются рациональными функциями, поэтому обратное преобразование Лапласа осуществляется аналитически с помощью теории вычетов и таблиц операционного исчисления. На примере цилиндра, состоящего из трёхкомпонентного материала, проведён численный анализ связанности механических, температурных и диффузионных полей при внешнем нестационарном тепловом воздействии, а также выполнено сравнение полученных результатов с решениями известных задач термоупругости и механодиффузии. Исследовано влияние конечной скорости распространения тепловых и диффузионных потоков на кинетику тепломассопереноса в сплошных средах при различных видах внешней тепловой нагрузки.

**Ключевые слова:** термомеханодиффузия, конечная скорость распространения тепломассопереноса, релаксация тепловых и диффузионных потоков, нестационарные задачи, функции Грина, преобразование Лапласа, ряд Фурье–Бесселя

Получение: 22.10.2025 / Публикация онлайн: 04.04.2026

УДК 539.3; 539.8

### 1. Введение

Работа посвящена моделированию нестационарного взаимодействия механического, температурного и диффузионного полей в цилиндрических телах. Исследование процессов, возникающих при взаимосвязи этих полей, является важным не только с теоретической, но и с практической точки зрения, так как цилиндры служат основой различных технических систем, таких как трубопроводы, нефте- и газопроводы, системы отопления, валы и втулки, и другого.

Вопрос о влиянии друг на друга полей различной физической природы имеет длинную историю. Эффекты, обусловленные взаимодействием механического и температурного полей, обсуждались ещё в конце 19-го века [1], но содержательная теория связанной термоупругости, включающая уравнение движения, принадлежащее гиперболическому типу, и параболическое уравнение теплопроводности, была построена только в середине 20-го века [2]. Первые работы по изучению связи механических и диффузионных полей появились в первой половине 20-го века [3, 4] и носили преимущественно экспериментальный характер. Во второй половине 20-го века были построены математические модели тепломассопереноса в сплошных средах [5–7], в которых уравнение диффузии также являлось параболическим. В то же время исследования второй половины 20-го века показали, что классическая модель термомеханодиффузии, о которой сказано выше, обладала существенным недостатком, так как предписывала разную скорость распространения: конечную — для упругой волны и бесконечную — для теплового и диффузионного импульсов. В итоге были предложены различные модификации классической теории термоупругой диффузии, основанные на волновом характере распространения тепла и массы, подразумевающие конечную скорость распространения тепловых и диффузионных потоков.

Достаточно подробный обзор публикаций, посвящённых современным теориям теплопередачи и массопереноса, приведён в работах [8, 9], где отмечается значительный интерес к проблеме, связанной с учётом конечной скорости распространения тепловых и диффузионных возмущений. В этих статьях даются ссылки на экспериментальные исследования, подтверждающие существование (пусть и при очень малых временах) волновых процессов тепломассопереноса в металлах, кристаллах, полимерах, биологических тканях и смесях. Приводятся данные о временах релаксации для ряда материалов. Подробно обсуждаются границы применимости различных моделей тепломассопереноса.

Среди первых моделей, использующих для описания теплопереноса уравнение гиперболического типа, можно отметить модели Катганею, Лорда–Шульмана, Грина–Линдси и другие [10–14]. В дальнейшем с их помощью представлялся массоперенос в сплошных средах, и в настоящее время практически все модели тепломассопереноса учитывают конечную скорость распространения тепловых и диффузионных возмущений

[15–32]. Здесь подобраны работы, в которых рассматриваются задачи термомехано-диффузии в цилиндрических и сферических координатах. И таких публикаций существенно меньше, чем посвящённых задачам в прямоугольной (декартовой) системе координат.

При решении нестационарных задач для сплошных сред в криволинейных координатах используются, как правило, интегральные преобразования Лапласа по времени, Фурье и Ганкеля по координате, что продемонстрировано в работах [15, 18, 19, 21–25]. Учитывая сложность, обусловленную обращением преобразования Лапласа в связанных задачах механики, для нахождения оригиналов применяются приближённые численно-аналитические методы, такие как метод Дурбина (и его модификации) [18, 19, 22–24], алгоритм Gaver–Stehfast [25], а также квадратурные формулы, имеющие в основе суммы Римана [15].

Не вдаваясь в обсуждение достоинств и недостатков данных подходов, следует отметить только, что изображения Лапласа, получающиеся при решении связанных задач термомехано-диффузии, являются настолько громоздкими, что практически проверить истинность того или иного метода нахождения их оригиналов далеко не всегда представляется возможным. Вопрос о корректности приближённых методов обращения преобразования Лапласа достаточно подробно рассматривается в работе [33].

С другой стороны, при определённых граничных условиях для решения связанных задач термомехано-диффузии возможно использование метода разделения переменных, что позволяет свести обращение преобразования Лапласа исходной задачи к обращению рациональной функции. В этом случае оригиналы устанавливаются аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления [34–36], что, вообще говоря, не требует какой-либо дополнительной верификации.

В данной работе предлагается модель, описывающая одномерные нестационарные термомехано-диффузионные процессы в сплошном многокомпонентном цилиндре, которая является обобщением моделей механо-диффузии, рассмотренных ранее [34, 35]. Она позволяет анализировать взаимодействие механических, температурных и диффузионных процессов в сплошных средах.

## 2. Общая постановка задачи

Рассматривается задача нестационарной термомехано-диффузии в многокомпонентном сплошном цилиндре радиусом  $R_0$ , находящемся под действием приложенной к его поверхности внешней нагрузки. Поверхностные нагрузки приводят к возникновению деформационного нагрева и сопутствующей диффузии, то есть к перераспределению концентрации компонентов вещества под действием термоупругих деформаций. Для описания физико-механических процессов в сплошной среде используется линейная модель связанной термоупругой диффузии, представляемая в виде следующей системы уравнений [37–39]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} &= \nabla_j \sigma^{ij}, & \rho T_0 \frac{\partial S}{\partial t} &= -\nabla_i q^i, & \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} &= -\nabla_i J^{i(q)}, \\ \eta^{(N+1)} &= -\sum_{q=1}^N \eta^{(q)} \quad (i, j = \overline{1, 3}, \quad q = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время;  $T_0$  — начальная температура сплошной среды;  $\nabla_i$  — оператор ковариантного дифференцирования;  $u^i$  — компоненты вектора механических перемещений;  $\sigma^{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $n_0^{(q)}$  и  $n^{(q)}$  — начальная и текущая концентрации (массовые доли)  $q$ -го вещества в составе  $(N+1)$ -компонентной сплошной среды;  $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$  — приращение концентрации;  $\rho$  — плотность среды;  $q^i$  — компоненты вектора теплового потока;  $J^{i(q)}$  — компоненты вектора диффузионного потока  $q$ -го вещества;  $S$  — удельная энтропия.

Замыкают систему уравнений (1) нулевые начальные условия, соответствующие невозмущённому состоянию цилиндра в начальный момент времени  $t = 0$ , и краевые условия на перемещения, температурные и диффузионные потоки на поверхности цилиндра  $\Pi$ :

$$u^i \Big|_{\Pi} = U^i, \quad q^i \nu_i \Big|_{\Pi} = Q_0, \quad J^{i(q)} \nu_i \Big|_{\Pi} = I^{(q)},$$

где  $U^i, Q_0, I^{(q)}$  — заданные поверхностные возмущения,  $\nu^i$  — компоненты вектора нормали к поверхности.

Используемая в работе модель учитывает конечную скорость распространения тепловых и диффузионных потоков и является обобщением теории термоупругости Лорда–Шульмана, которая в свою очередь базируется на модифицированном законе Фурье в форме Вернотта–Каттанео–Лыкова. Применительно к термомехано-диффузионным процессам физические соотношения для энтропии и компонент тензора напряжений, а также законы Фурье и Фика записываются так [19, 21, 23, 25, 26, 37]:

$$\begin{aligned}
\sigma^{ij} &= C^{ijkl} \nabla_k u_l - b^{ij} \vartheta - \sum_{p=1}^N \alpha^{(p)ij} \eta^{(p)}, \\
S &= \frac{c_0}{T_0} \vartheta + \frac{b^{ij}}{\rho} \nabla_i u_j + R \sum_{j=1}^N \frac{\ln(n_0^{(j)} \gamma^{(j)})}{m^{(j)}} \eta^{(j)}, \quad \sum_{k=0}^K \frac{(\tau_\vartheta)^k}{k!} \frac{\partial^k q^i}{\partial t^k} = -\kappa^{ij} \nabla_j \vartheta, \\
\sum_{k=0}^M \frac{(\tau_\eta^{(q)})^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} J^{i(q)}}{\partial t^{k+1}} &= \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D^{(q)ij}}{\rho R T_0} \nabla_j \left( \alpha^{(q)kl} \nabla_k u_l \right) + \\
&+ \frac{n_0^{(q)} D^{(q)ij}}{T_0} \ln \left( n_0^{(q)} \gamma^{(q)} \right) \nabla_j \vartheta - \sum_{p=1}^N D^{(p)ij} g^{(qp)} \nabla_j \eta^{(p)}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $\vartheta = T - T_0$  — приращение температуры;  $T$  — актуальная температура сплошной среды;  $\tau_\vartheta$  — время релаксации тепловых потоков;  $\tau_\eta^{(q)}$  — время релаксации диффузионных потоков;  $D^{(q)ij}$  — коэффициенты диффузии;  $\kappa^{ij}$  — компоненты тензора теплопроводности;  $m^{(q)}$  — молярная масса  $q$ -го вещества в составе  $(N+1)$ -компонентной сплошной среды;  $g^{(qr)}$  — термодинамический множитель Даркена;  $\gamma^{(q)}$  — коэффициент активности;  $c_0$  — коэффициент теплоемкости в начальном состоянии;  $C^{ijkl}$ ,  $b^{ij}$  и  $\alpha^{(r)ij}$  — компоненты тензоров упругих, тепловых и диффузионных постоянных;  $R$  — универсальная газовая постоянная.

При  $K = 0$ ,  $M = 0$  имеем классические законы Фурье и Фика с учётом связанности механического, температурного и диффузионного полей. Случай  $K = 1$ ,  $M = 1$  соответствует приближению Вернотта–Каттанео–Лькова. Существуют и более сложные модификации законов Фурье и Фика, так называемые многофазные теории тепломассопереноса (теории Грина–Нагди, Мура–Гибсона–Томпсона и другие), содержащие в качестве параметров два и более времени релаксации.

Не претендуя на оценку достоинств или недостатков тех или иных подходов к описанию волновых процессов тепломассопереноса в сплошных средах, отметим только, что многофазные модели являются недостаточно изученными, так как нет достоверных данных о величине входящих в них параметров. Даже для используемой в данной работе однофазной модели (2) имеются весьма приближённые оценки времён релаксации. Например, в книге [14] время релаксации теплового потока  $\tau_\vartheta$  рассматривается в интервале  $10^{-14} \div 10^{-7}$  с, в статье [40] —  $\tau_\vartheta = 10^{-12} \div 10^{-10}$  с, в [41] —  $\tau_\vartheta = 10^{-12} \div 10^{-6}$  с. Там же, со ссылкой на работу [42], сказано, что время релаксации диффузионных потоков  $\tau_\eta^{(q)}$  в полимерах «составляет несколько секунд». Экспериментальные данные в статье [43] указывают на значения  $\tau_\vartheta = 20$  с для песка и  $\tau_\vartheta = 28.7$  с для соды. При этом в работе [44] значения для песка определяются как  $\tau_\vartheta = 2.26$  с, а для соды как  $\tau_\vartheta = 0.66$  с (разница на два порядка по отношению к предыдущей оценке).

В предлагаемом вниманию читателя исследовании остановимся на неких средних значениях времён релаксации, наиболее часто используемых при моделировании связанных термомеханодиффузионных процессов с конечной скоростью распространения тепломассопереноса. Следуя [19, 20, 22, 23, 26], время релаксации теплового потока примем порядка сотых долей секунды, времена релаксации диффузионных потоков — порядка десятых долей секунды.

### 3. Одномерная модель в цилиндрической системе координат

Полагаем, что материал цилиндра является ортотропным (для записи физических постоянных нотацию Фойгта) и представляет собой идеальный твёрдый раствор, в котором не учитываются перекрёстные диффузионные эффекты, обусловленные взаимным влиянием диффузионных потоков различных компонентов раствора. В этом случае в (2) коэффициент активности и термодинамический множитель Даркена становятся следующими:  $\gamma^{(q)} = 1$ ,  $g^{(qr)} = \delta_{qr}$ , где  $\delta_{qr}$  — символ Кронекера. Кроме того, все физические поля сохраняют зависимость лишь от одной пространственной координаты. Тогда  $\mathbf{u} = \{u_r(r, t), 0, 0\}$ ,  $\vartheta = \vartheta(r, t)$ ,  $\eta^{(q)} = \eta^{(q)}(r, t)$ .

С учётом указанных допущений и выражений (2) система уравнений (1) в цилиндрических координатах принимает следующий вид (здесь и далее уравнение относительно  $\eta^{(N+1)}$  вследствие его громоздкости опускается):

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= C_{11} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) - b_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \frac{\partial \eta^{(j)}}{\partial r}, \\
\left( \sum_{k=0}^K \frac{\tau_\vartheta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} \right) \left[ \rho c_0 \vartheta + T_0 b_1 \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + \rho R T_0 \sum_{j=1}^N \frac{\ln(n_0^{(j)} \gamma^{(j)})}{m^{(j)}} \eta_j \right] &= \kappa_1 \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right), \\
\sum_{k=0}^M \frac{(\tau_\eta^{(q)})^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} \eta^{(q)} &= -A_{11}^{(q)} \left( \frac{\partial^3 u_r}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r^3} \right) + D_1^{(q)} \left( \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r} \right) - M_1^{(q)} \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right),
\end{aligned}$$

где

$$C_{11} = C_{1111}, \quad b_1 = b_{11}, \quad D_1^{(q)} = D_{11}^{(q)}, \quad \alpha_1^{(q)} = \alpha_{11}^{(q)}, \quad A_{11}^{(q)} = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_1^{(q)} \alpha_1^{(q)}}{\rho R T_0}, \quad M_1^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} D_1^{(q)}}{T_0} \ln(n_0^{(q)} \gamma^{(q)}).$$

Начально-краевые условия запишем так:

$$u_r \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^k \vartheta}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial^m \eta^{(q)}}{\partial t^m} \Big|_{t=0} = 0 \quad (k = \overline{0, K}, m = \overline{0, M}),$$

$$u_r \Big|_{r=R_0} = f_1(t), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = f_2(t), \quad \left[ A_{11}^{(q)} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + M_1^{(q)} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - D_1^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial r} \right] \Big|_{r=R_0} = f_{q+2}(t).$$

Перейдем к безразмерным величинам (при одинаковом начертании с размерными аналогами они обозначаются символом «\*», который в дальнейшем изложении опускается):

$$r^* = \frac{r}{R_0}, \quad \tau = \frac{ct}{R_0}, \quad u = \frac{u_r}{R_0}, \quad \vartheta^* = \frac{\vartheta}{T_0}, \quad \eta_q = \eta^{(q)}, \quad c^2 = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad b = \frac{T_0}{\rho c^2} b_1, \quad \alpha_q = \frac{\alpha_1^{(q)}}{C_{11}}, \quad \kappa = \frac{\kappa_1}{\rho c_0 R_0 c},$$

$$\tau_0 = \frac{c}{R_0} \tau_\vartheta, \quad \tau_q = \frac{c}{R_0} \tau_\eta^{(q)}, \quad A_q = \frac{A_{11}^{(q)}}{c R_0}, \quad \beta_i = \frac{R \ln(n_0^{(i)} \gamma^{(i)})}{c_0 m^{(i)}}, \quad B = \frac{b_1}{\rho c_0}, \quad D_q = \frac{D_1^{(q)}}{c R_0}, \quad M_q = \frac{T_0}{c R_0} M_1^{(q)},$$

$$C_{ij}^* = \frac{C_{ij}}{C_{11}}, \quad f_1^*(\tau) = \frac{f_1(R_0 \tau / c)}{R_0}, \quad f_2^*(\tau) = \frac{f_2(R_0 \tau / c)}{T_0}, \quad f_{q+2}^*(\tau) = \frac{f_{q+2}(R_0 \tau / c)}{c}.$$

В результате математическая постановка задачи принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \left( u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) - b \vartheta' - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j',$$

$$\left( \sum_{k=0}^K \frac{\tau_0^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial \tau^{k+1}} \right) \left[ \vartheta + B \left( u' + \frac{u}{r} \right) + \sum_{j=1}^N \beta_j \eta_j \right] = \kappa \left( \vartheta'' + \frac{\vartheta'}{r} \right), \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^M \frac{\tau_q^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \eta_q}{\partial \tau^{k+1}} = -A_q \left( u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + D_q \left( \eta_q'' + \frac{\eta_q'}{r} \right) - M_q \left( \vartheta'' + \frac{\vartheta'}{r} \right) \quad (q = \overline{1, N}),$$

$$u \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial^k \vartheta}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial^m \eta_q}{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (k = \overline{0, K}, m = \overline{0, M}),$$

$$u \Big|_{r=1} = f_1(\tau), \quad \vartheta' \Big|_{r=1} = f_2(\tau), \quad \left[ A_q \left( u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) + M_q \vartheta' - D_q \eta_q' \right] \Big|_{r=1} = f_{q+2}(\tau), \quad (4)$$

где штрих обозначает производную по пространственной координате  $r$ .

#### 4. Алгоритм решения

Решение начально-краевой задачи (3), (4) запишем в виде свёрток по времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(r, \tau) \\ \vartheta(r, \tau) \\ \eta_q(r, \tau) \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{N+2} \int_0^\tau \left\{ \begin{array}{l} G_{1m}(r, \tau-t) \\ G_{2m}(r, \tau-t) \\ G_{q+2,m}(r, \tau-t) \end{array} \right\} f_m(t) dt. \quad (5)$$

Здесь  $f_m(t)$  — поверхностные возмущения;  $G_{ij}(r, \tau)$  ( $\forall i, j = \overline{1, N+2}$ ) — поверхностные функции Грина, определяемые из решения следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G_{1m}}{\partial \tau^2} &= G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} - bG'_{2m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+2,m}, \\
\sum_{k=0}^K \frac{\tau_0^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}}{\partial \tau^{k+1}} \left[ G_{2m} + B \left( G'_{1m} + \frac{1}{r} G_{1m} \right) + \sum_{j=1}^N \beta_j G_{j+2,m} \right] &= \kappa \left( G''_{2m} + \frac{1}{r} G'_{2m} \right), \\
\sum_{k=0}^M \frac{\tau_q^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} G_{q+2,m}}{\partial \tau^{k+1}} &= D_q \left( G''_{q+2,m} + \frac{G'_{q+2,m}}{r} \right) - \Lambda_q \left( G'''_{1m} + \frac{2}{r} G''_{1m} - \frac{G'_{1m}}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) - M_q \left( G''_{2m} + \frac{G'_{2m}}{r} \right), \\
G_{1m} \Big|_{\tau=0} &= 0, \quad \frac{\partial G_{1m}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial^k G_{2m}}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial^m G_{q+2,m}}{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = 0, \\
G_{1m} \Big|_{r=1} &= \delta_{1m} \delta(\tau), \quad G'_{2m} \Big|_{r=1} = \delta_{2m} \delta(\tau), \quad \left[ \Lambda_q \left( G''_{1m} + \frac{G'_{1m}}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) + M_q G'_{2m} - D_q G'_{q+2,m} \right] \Big|_{r=1} = \delta_{q+2,m} \delta(\tau),
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $\delta(\tau)$  — дельта-функция Дирака. Таким образом, решение задачи (3), (4) сводится к нахождению поверхностных функций Грина.

Применение преобразования Лапласа по времени к задаче (6) приводит к системе дифференциальных уравнений ( $s$  — параметр интегрального преобразования, индекс  $L$  обозначает трансформанту Лапласа):

$$\begin{aligned}
s^2 G_{1m}^L &= G''_{1m}^L + \frac{G'_{1m}^L}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} - bG'_{2m}^L - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+2,m}^L, \\
\left( \sum_{k=0}^K \frac{\tau_0^k}{k!} s^{k+1} \right) \left[ G_{2m}^L + B \left( G'_{1m}^L + \frac{1}{r} G_{1m}^L \right) + \sum_{j=1}^N \beta_j G_{j+2,m}^L \right] &= \kappa \left( G''_{2m}^L + \frac{1}{r} G'_{2m}^L \right), \\
G_{q+2,m}^L \sum_{k=0}^M \frac{\tau_q^k}{k!} s^{k+1} &= D_q \left( G''_{q+2,m}^L + \frac{G'_{q+2,m}^L}{r} \right) - \Lambda_q \left( G'''_{1m}^L + \frac{2}{r} G''_{1m}^L - \frac{G'_{1m}^L}{r^2} + \frac{G_{1m}^L}{r^3} \right) - M_q \left( G''_{2m}^L + \frac{G'_{2m}^L}{r} \right), \\
G_{1m}^L \Big|_{r=1} &= \delta_{1m}, \quad G'_{2m}^L \Big|_{r=1} = \delta_{2m}, \quad \left[ \Lambda_q \left( G''_{1m}^L + \frac{G'_{1m}^L}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} \right) + M_q G'_{2m}^L - D_q G'_{q+2,m}^L \right] \Big|_{r=1} = \delta_{q+2,m}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для дальнейших преобразований поверхностные функции Грина представим как разложения в ряд Фурье по собственным функциям:

$$G_{1m}(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1mn}(\tau) J_1(\lambda_n r), \quad G_{q+1,m}(r, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{q+1,mn}(\tau) J_0(\lambda_n r) \quad (q = \overline{1, N}), \tag{8}$$

где  $J_\nu(z)$  — функции Бесселя 1-го рода порядка  $\nu$ , а  $\lambda_n$  — нули характеристического уравнения  $J_1(\lambda_n) = 0$ . Коэффициенты разложения  $G_{qmn}^L(\tau)$  будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
G_{1mn}^L(s) &= \frac{2}{J_0(\lambda_n)^2} \int_0^1 r G_{1m}^L(r, s) J_1(\lambda_n r) dr, \\
G_{q+1,mn}^L(s) &= \frac{2}{J_0(\lambda_n)^2} \int_0^1 r G_{q+1,m}^L(r, s) J_0(\lambda_n r) dr, \quad G_{q+1,m0}^L(s) = \int_0^1 r G_{q+1,m}^L(r, s) dr.
\end{aligned} \tag{9}$$

Исходя из этого первое уравнение системы (7) умножаем на  $r J_1(\lambda_n r)$ , а второе и третье — на  $r J_0(\lambda_n r)$ . После интегрирования по  $r$  в пределах от 0 до 1 и учёта граничных условий и формул (9) краевая задача (7) сводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$k_0(s) G_{2m0}^L(s) + k_0(s) \sum_{j=1}^N \beta_j G_{j+2,m0}^L(s) = -(B k_0(s) \delta_{1m} - \kappa \delta_{2m}), \quad k_{q+2,0}(s) G_{q+2,m0}^L(s) = -\delta_{q+2,m}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
k_{1n}(s)G_{1mn}^L(s) - b\lambda_n G_{2mn}^L(s) - \lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+2,mn}^L(s) &= -\frac{2\lambda_n \delta_{1m}}{J_0(\lambda_n)}, \\
Bk_0(s)\lambda_n G_{1mn}^L(s) + k_{2n}(s)G_{2mn}^L(s) + k_0(s) \sum_{j=1}^N \beta_j G_{j+2,mn}^L(s) &= -\frac{2(Bk_0(s)\delta_{1m} - \kappa\delta_{2m})}{J_0(\lambda_n)}, \\
\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1mn}^L(s) + M_q \lambda_n^2 G_{2mn}^L(s) - k_{q+2,n}(s)G_{q+2,mn}^L(s) &= -\frac{2(\Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1m} - \delta_{q+2,m})}{J_0(\lambda_n)},
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$k_{1n}(s) = s^2 + \lambda_n^2, \quad k_{2n}(s) = k_0(s) + \kappa\lambda_n^2, \quad k_0(s) = \sum_{k=0}^K \frac{\tau_0^k}{k!} s^{k+1}, \quad k_{q+2,n}(s) = \sum_{k=0}^M \frac{\tau_q^k}{k!} s^{k+1} + \lambda_n^2 D_q.$$

Из равенств (10) определяем  $G_{2m0}^L(s)$ ,  $G_{q+2,m0}^L(s)$ , а решение системы (11) находим по правилу Крамера:

$$\begin{aligned}
G_{2m0}^L(s) &= -B\delta_{1m} + \frac{\kappa\delta_{2m}}{k_0(s)} + \sum_{j=1}^N \frac{\beta_j \delta_{j+2,m}}{k_{q+2,0}(s)}, \quad G_{q+2,m0}^L(s) = -\frac{\delta_{q+2,m}}{k_{q+2,0}(s)}, \\
G_{jmn}^L(s) &= \frac{P_{jmn}(s)}{P_n(s)}, \quad G_{q+2,mn}^L(s) = \frac{P_{q+2,mn}(s)}{Q_{qn}(s)} + \frac{2(\delta_{q+2,m} - \Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1m})}{J_0(\lambda_n)k_{q+2,n}(s)},
\end{aligned}$$

где многочлены  $P_n(s)$  и  $P_{imn}(s)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
P_n(s) &= (k_{1n}k_{2n} + Bb\lambda_n^2 k_0) \Pi_n - \lambda_n^6 k_0 \sum_{i=1}^N \Lambda_i \sum_{j=1}^N M_j \Pi_{ijn} + \\
&+ \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N [k_0 (B\lambda_n^2 \alpha_j M_j + b\lambda_n^2 \beta_j \Lambda_j + k_{1n} \beta_j M_j) - k_{2n} \lambda_n^2 \alpha_j \Lambda_j] \Pi_{jn}, \\
P_{1mn}(s) &= \frac{2}{J_0(\lambda_n)} \left[ (-\delta_{1m} \lambda_n (k_{2n} + Bbk_0) + \delta_{2m} \kappa b \lambda_n) \Pi_n + \sum_{j=1}^N [\delta_{1m} \lambda_n^3 (k_{2n} \alpha_j \Lambda_j - k_0 [\beta_j M_j + B\alpha_j M_j + b\beta_j \Lambda_j]) + \right. \\
&+ \delta_{2m} \kappa \lambda_n^3 \alpha_j M_j + \delta_{j+2,m} \lambda_n (k_0 b \beta_j - k_{2n} \alpha_j)] \Pi_{jn} - k_0 \lambda_n^3 \left( \delta_{1m} \lambda_n^2 \sum_{i=1}^N \Lambda_i \sum_{j=1}^N M_j \Pi_{ijn} + \sum_{i=1}^N M_i \sum_{j=1}^N \delta_{j+2,m} \Pi_{ijn} \right) \left. \right], \\
P_{2mn}(s) &= \frac{2}{J_0} \left[ (\delta_{1m} k_0 B (\lambda_n^2 - k_{1n}) + \delta_{2m} \kappa k_{1n}) \Pi_n + \sum_{j=1}^N [\delta_{1m} k_0 \lambda_n^2 (\lambda_n^2 - k_{1n}) \beta_j \Lambda_j - \delta_{2m} \kappa \lambda_n^4 \alpha_j \Lambda_j + \right. \\
&+ \delta_{j+2,m} k_0 (k_{1n} \beta_j + B\lambda_n^2 \alpha_j)] \Pi_{jn} + k_0 \lambda_n^4 \left( \delta_{1m} \lambda_n^2 \sum_{i=1}^N \Lambda_i \sum_{j=1}^N \Lambda_j \Pi_{ijn} + \sum_{i=1}^N \Lambda_i \sum_{j=1}^N \delta_{j+2,m} \Pi_{ijn} \right) \left. \right], \\
P_{q+2,mn}(s) &= \lambda_n^2 (\Lambda_q \lambda_n P_{1mn}(s) + M_q P_{2mn}(s)), \quad Q_{qn}(s) = P_n(s) k_{q+2,n}(s), \\
\Pi_n &= \prod_{q=1}^N k_{q+2,n}(s), \quad \Pi_{jn} = \prod_{q=1, q \neq j}^N k_{q+2,n}(s), \quad \Pi_{ijn} = (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) \prod_{q=1, q \neq i,j}^N k_{q+2,n}(s).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что функции  $G_{qmn}^L(s)$  являются рациональными функциями параметра  $s$ , их оригиналы находим с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления [45] (производные берём по переменной  $s$ ):

$$\begin{aligned}
G_{2m0}(\tau) &= -B\delta_{1m} \delta(\tau) + \kappa\delta_{2m} \left( 1 + \sum_{k=1}^K \frac{\exp(s k_0 \tau)}{k'_0(s k_0)} \right) + \sum_{i=1}^N \beta_i \delta_{i+2,m} \left( 1 + \sum_{k=1}^M \frac{\exp(\chi_{ik_0} \tau)}{k'_{i+2,0}(\chi_{ik_0})} \right), \\
G_{q+2,m0}(\tau) &= -\delta_{q+2,m} \left( 1 + \sum_{k=1}^M \frac{\exp(\chi_{qk_0} \tau)}{k'_{q+2,0}(\chi_{qk_0})} \right), \\
G_{jmn}(\tau) &= \sum_{i=1}^{\Sigma} A_{jmn}^i \exp(s_i \tau), \quad A_{jmn}^i = \frac{P_{jmn}(s_i)}{P'_n(s_i)} \quad (j=1,2, \Sigma=(M+1)N+K+3), \\
G_{q+2,mn}(\tau) &= \sum_{i=1}^{\Sigma+M+1} A_{q+2,mn}^i \exp(s_i \tau) - \frac{2(\delta_{1m} \lambda_n^2 \Lambda_q - \delta_{q+2,m})}{J_0(\lambda_n)} \sum_{i=1}^{M+1} \frac{\exp(\chi_{qin} \tau)}{k'_{q+2,n}(\chi_{qin})}, \quad A_{q+2,mn}^i = \frac{P_{q+2,mn}(s_i)}{Q'_{qn}(s_i)}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь  $s_{in}$  — нули полинома  $P_n(s)$ ,  $s_{i0}$  — нули полинома  $k_0(s)$ , а  $\chi_{qin}$  — нули полинома  $k_{q+2,n}(s)$ .

Наконец, подставляя найденные функции Грина (8), (12) в свёртки (5), получаем искомые функции перемещений и приращений температуры и концентраций.

## 5. Примеры

В качестве расчётного примера рассмотрим сплошной трёхкомпонентный ( $N=2$ ) дюралюминиевый цилиндр радиусом  $r=1$ , в котором компонент 1 — цинк (1%), и компонент 2 — медь (4.5%), диффундируют в алюминиевой основе. Материал характеризуется следующими физическими параметрами [46]:

$$\begin{aligned} C_{12} &= 6.93 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, & C_{66} &= 2.56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, & T_0 &= 700 \text{ К}, & \rho &= 2700 \text{ кг/м}^3, & c_0 &= 920 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}, \\ \alpha_1^{(1)} &= 6.55 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}, & \alpha_1^{(2)} &= 6.14 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}, & D_1^{(1)} &= 2.62 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}, & D_1^{(2)} &= 2.89 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}, \\ b_1 &= 4.94 \cdot 10^6 \text{ Н/(К}\cdot\text{м}^2), & \kappa_1 &= 240 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}, & m^{(1)} &= 0.065 \text{ кг/моль}, & m^{(2)} &= 0.064 \text{ кг/моль}, \\ C_{11} &= C_{22} = C_{12} + 2C_{66}, & n_0^{(1)} &= 0.0084, & n_0^{(2)} &= 0.045. \end{aligned}$$

Принимаем, что механические воздействия и массоперенос на границах отсутствуют ( $f_1(\tau) = f_{q+2}(\tau) = 0$ ). Используемые для расчётов времена релаксации тепловых и диффузионных потоков указаны в подписях к графикам.

**Пример 1.** Поверхностные возмущения создаёт нестационарный теплообмен по закону:

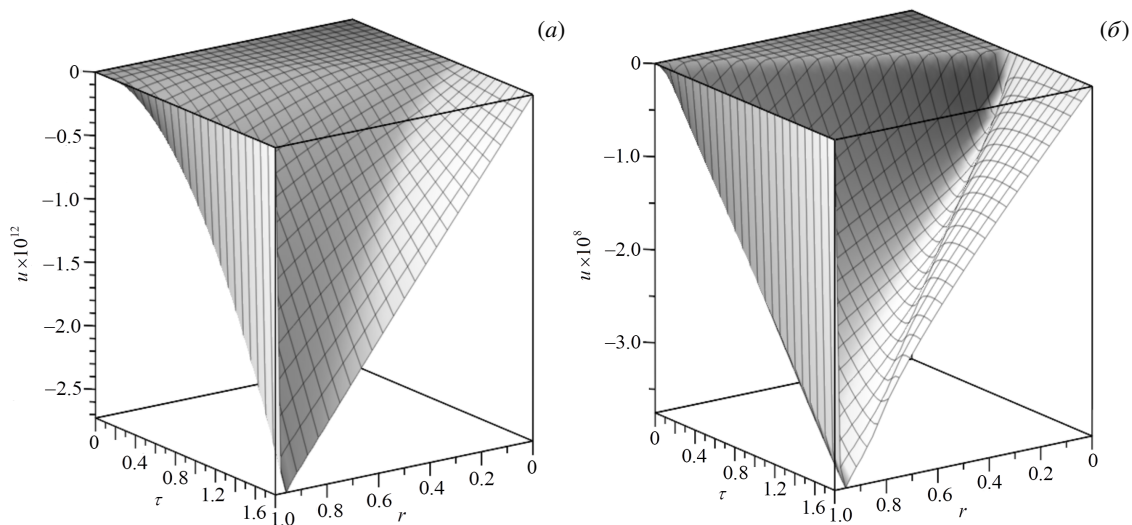
$$f_2(\tau) = H(\tau). \quad (13)$$

Подставляя выражения (12), (13) в свёртки (5), получаем:

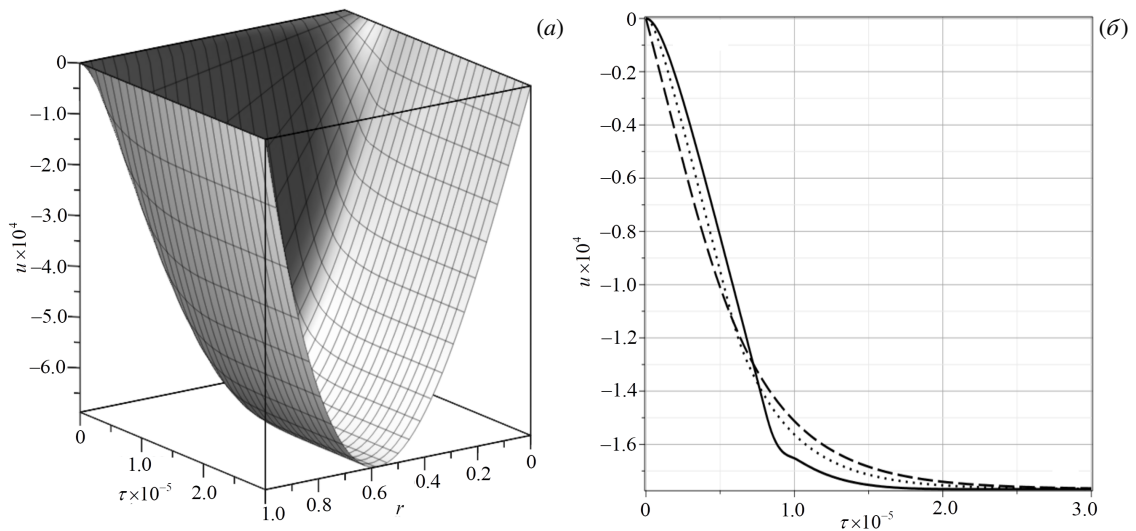
$$\begin{aligned} u(r, \tau) &= \int_0^\tau G_{12}(r, \tau-t) f_2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\Sigma} A_{12n}^i \frac{\exp(s_{in}\tau) - 1}{s_{in}} J_1(\lambda_n r), \\ \vartheta(r, \tau) &= \int_0^\tau G_{22}(r, \tau-t) f_2(t) dt = \kappa \left( \tau + \sum_{k=1}^K \frac{\exp(s_{k0}\tau) - 1}{s_{k0} k_0'(s_{k0})} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\Sigma} A_{22n}^i \frac{\exp(s_{in}\tau) - 1}{s_{in}} J_0(\lambda_n r), \\ \eta_q(r, \tau) &= \int_0^\tau G_{q+2,2}(r, \tau-t) f_2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\Sigma+M+1} A_{q+2,2n}^i \frac{\exp(s_{in}\tau) - 1}{s_{in}} J_0(\lambda_n r). \end{aligned}$$

Результаты вычислений показаны на рисунках 1–5. Для расчёта использовалось 100 членов ряда Фурье. Дальнейшее увеличение количества гармоник не приводит к заметным изменениям результатов.

На рисунках 1, 2 представлены поля перемещений в нагреваемом цилиндре, рассчитанные по модели, учитывающей конечную скорость теплопереноса (Рис. 1а, 2а, сплошная и пунктирные линии на рисунке 2б) и по классической модели без релаксации (Рис. 1б и штриховая линия на рисунке 2б). Как видно, волновой характер распространения тепла и массы существенно влияет на поле перемещений лишь в начальные моменты



**Рис. 1.** Радиальные перемещения  $u(r, \tau)$  при малых временах с учётом (а) и без учёта (б) конечной скорости распространения теплопереноса



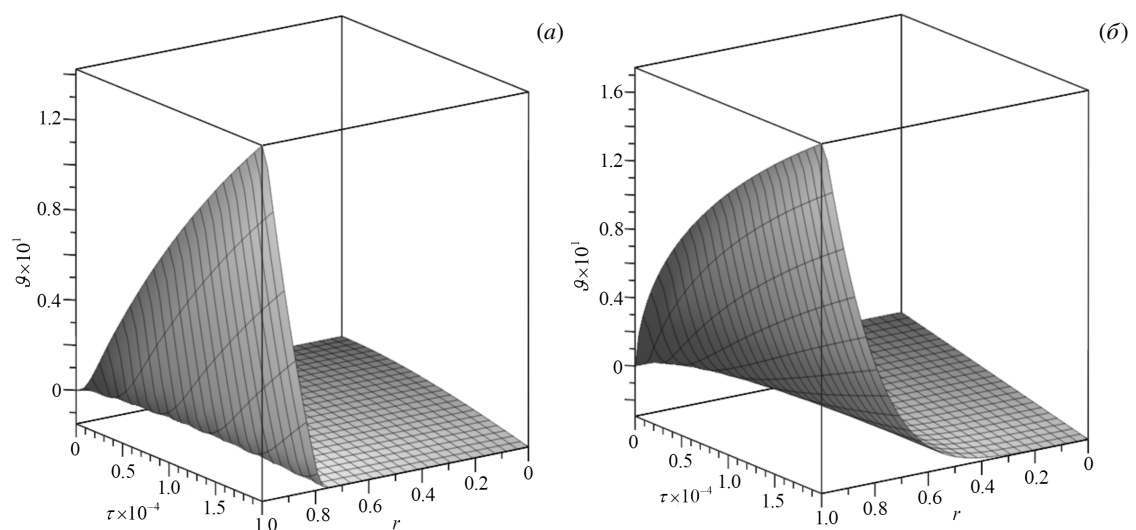
**Рис. 2.** Радиальные перемещения  $u(r, \tau)$ , рассчитанные при больших временах: пространственно-временное распределение (а) и в точке  $r = 0.1$  с использованием разных моделей (б); модель без релаксации,  $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с (штриховая линия); модель с релаксацией при  $\tau_\vartheta = 0.01$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.1$  с (пунктирная линия) и при  $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.2$  с (сплошная линия)

времени (из сравнения графиков на рисунках 1а и 1б следует, что они отличаются на несколько порядков). С течением времени различия постепенно нивелируются, при временах  $\tau > 8 \cdot 10^4$  становятся несущественными, а при  $\tau > 2.5 \cdot 10^5$  графики практически совпадают (Рис. 2б).

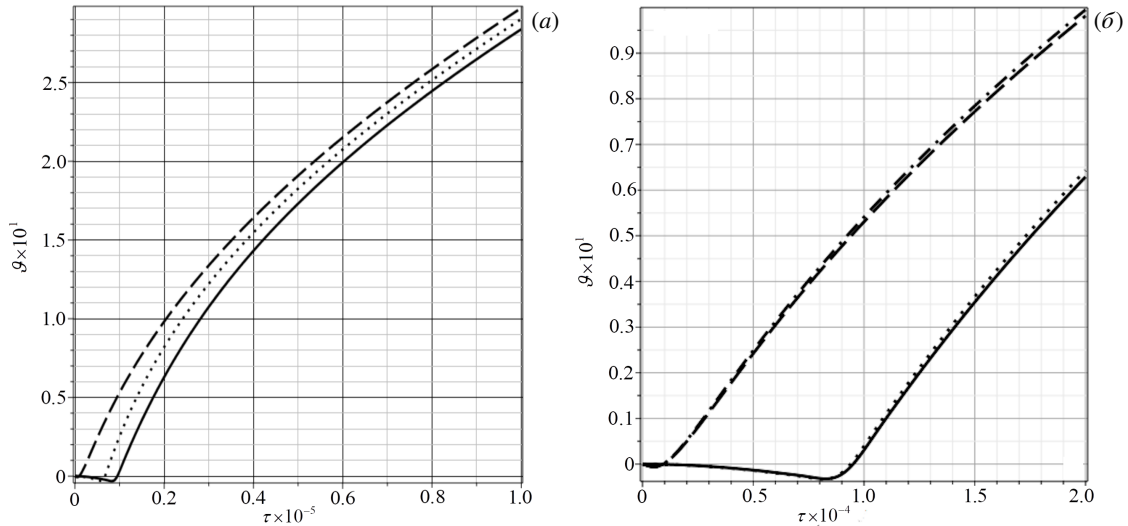
На рисунках 3а и 3б показаны температурные поля, рассчитанные также по разным моделям (Рис. 3а — с учётом релаксации тепловых и диффузионных потоков, Рис. 3б — без её учёта). Для сравнительного анализа эти результаты представлены на рисунке 4а, где штриховой линией изображено решение, полученное по классической модели теплопереноса без учёта релаксации, а остальные линии — это решения при различных временах релаксации тепловых и диффузионных потоков. Как и в случае с перемещениями, релаксационные эффекты со временем затухают, и при  $\tau > 2 \cdot 10^4$  исследуемые модели дают похожие результаты.

Для расчёта использовались времена релаксации тепловых потоков, равные 0.01 с (пунктирные линии на рисунках 2б и 4а) и 0.02 с (сплошные линии на рисунках 2б и 4а) [19, 20, 22, 23, 26], что при переводе в безразмерные величины, соответственно, равно  $6.198 \cdot 10^3$  и  $1.240 \cdot 10^4$ . Таким образом, указанные выше пороговые значения времён, на которых проявляются эффекты, обусловленные конечной скоростью распространения тепловых потоков, соизмеримы с временами релаксации этих потоков.

Исходя из полученных расчётных данных можно сделать вывод: поле перемещений, вызванное нагревом цилиндра, слабо влияет на процесс теплопереноса. На рисунке 4б для сравнения приведены результаты, полученные по связанной модели термомеханодиффузии (3), (4) (сплошная и штриховая линии) и по классической



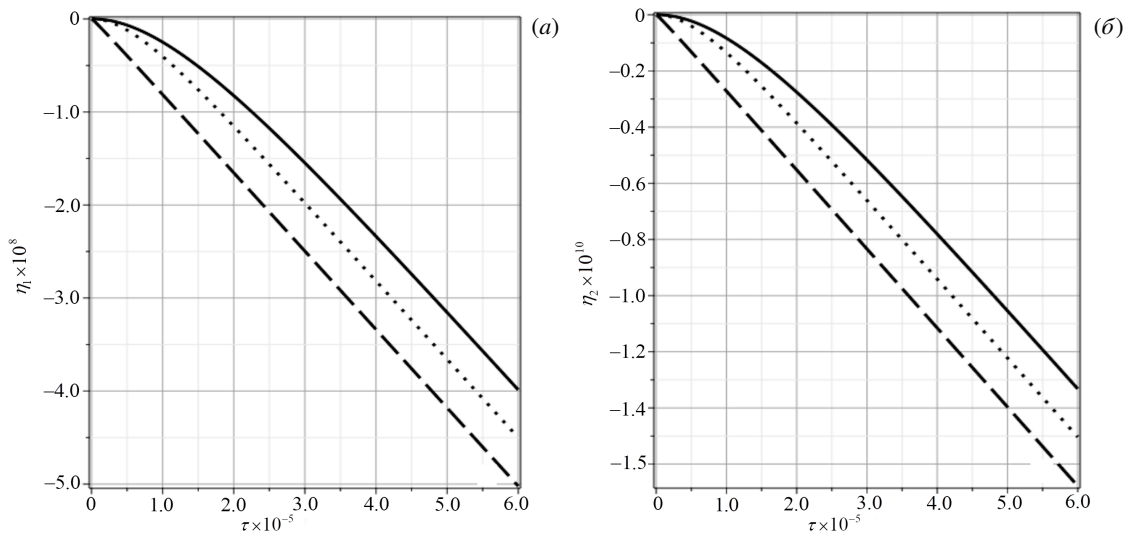
**Рис. 3.** Температурное поле  $\vartheta(r, \tau)$  с учётом (а) и без учёта (б) конечной скорости распространения тепловых и диффузионных потоков



**Рис. 4.** Температурное поле  $\vartheta(r, \tau)$ , вычисленное по разным моделям: модель без релаксации ( $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с – штриховая линия), модель с релаксацией ( $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.2$  с – сплошная линия, и  $\tau_\vartheta = 0.01$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.1$  с – пунктирная линия) (а); связанная модель ( $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.2$  с – сплошная линия), несвязанная модель ( $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.2$  с – пунктирная линия), связанная модель без учёта релаксации ( $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с – штриховая линия), классическая модель (результат решения задачи теплопроводности без учёта релаксации,  $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с – штрихпунктирная линия) (б)

модели теплопроводности (пунктирная и штрихпунктирная линии). Здесь же следует отметить, что возникающее вследствие нагрева диффузионное поле практически не оказывает никакого влияния ни на поле перемещений, ни на поле температур; графики на рисунках 1–4 одинаковы как при наличии диффузии, так и при её отсутствии.

При этом температурное поле само инициирует массоперенос цинка и меди, что показано на рисунке 5. На характер массопереноса в начальные моменты времени, соизмеримые с  $\tau_\eta^{(q)}$ , существенно влияет учёт релаксационных эффектов. Видно, что сплошная и пунктирная линии, соответствующие модели с релаксацией, отличаются от штриховой линии, отвечающей классической модели теплопереноса. При этом поле перемещений, вызванное нагревом цилиндра, уже практически не оказывает никакого влияния на массоперенос.



**Рис. 5.** Приращения концентраций 1-го (а) и 2-го (б) веществ, полученные по разным моделям; модель без релаксации ( $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с – штриховая линия), модель с релаксацией ( $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.2$  с – сплошная линия, и  $\tau_\vartheta = 0.01$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.1$  с – пунктирная линия)

**Пример 2.** Рассмотрим цилиндр при воздействии на его поверхность импульсной температурной нагрузки вида:

$$f_2(\tau) = \tau \exp(-\varepsilon\tau), \quad \varepsilon = 0.01. \tag{14}$$

Примем также, что механические воздействия и источники массообмена на границах отсутствуют.

Подставляя выражения (12), (14) в свёртки (5), получаем:

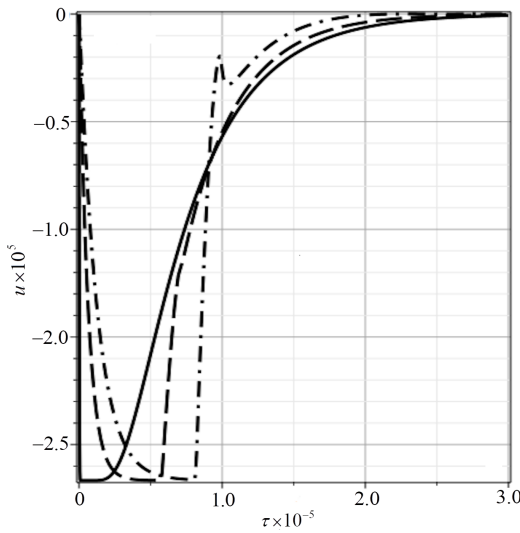
$$u(r, \tau) = \int_0^\tau G_{12}(r, \tau - t) f_2(t) dt = \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\Sigma A_{12n}^i \frac{[\exp(s_{in}\tau) - (1 + (\varepsilon + s_{in})\tau)\exp(-\varepsilon\tau)]}{(\varepsilon + s_{in})^2} J_1(\lambda_n r),$$

$$\vartheta(r, \tau) = \int_0^\tau G_{22}(r, \tau - t) f_2(t) dt = \kappa \left[ \frac{1 - (1 + \varepsilon\tau)\exp(-\varepsilon\tau)}{\varepsilon^2} + \sum_{k=1}^K \frac{\exp(s_{k0}\tau) - (1 + (\varepsilon + s_{k0})\tau)\exp(-\varepsilon\tau)}{k_0'(s_{k0})(\varepsilon + s_{k0})^2} \right] +$$

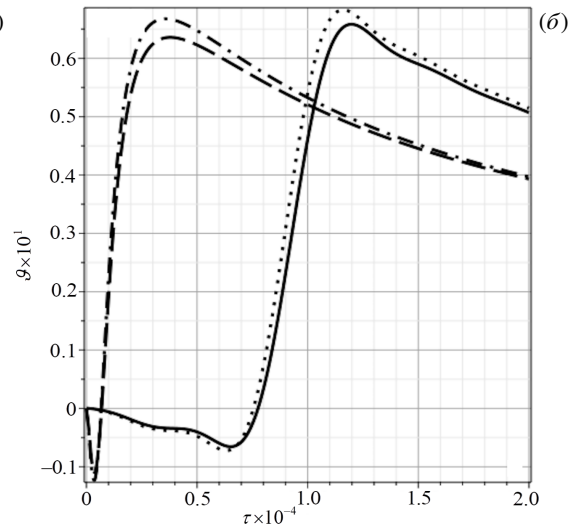
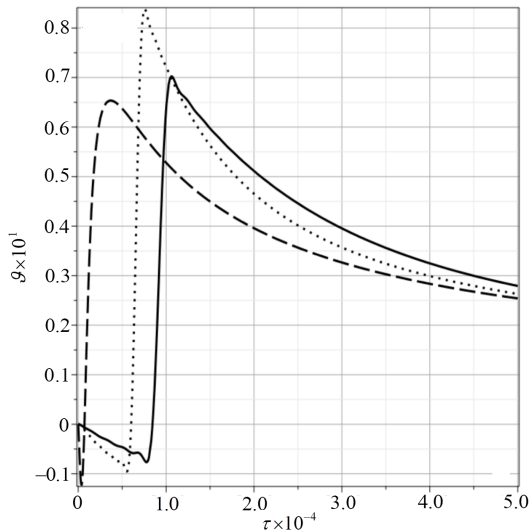
$$+ \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\Sigma A_{22n}^i \frac{[\exp(s_{in}\tau) - (1 + (\varepsilon + s_{in})\tau)\exp(-\varepsilon\tau)]}{(\varepsilon + s_{in})^2} J_0(\lambda_n r),$$

$$\eta_q(r, \tau) = \int_0^\tau G_{q+2,2}(r, \tau - t) f_2(t) dt = \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^{\Sigma+M+1} A_{q+2,2n}^i \frac{[\exp(s_{in}\tau) - (1 + (\varepsilon + s_{in})\tau)\exp(-\varepsilon\tau)]}{(\varepsilon + s_{in})^2} J_0(\lambda_n r).$$

Результаты, установленные по разным моделям термомехано-диффузии, показаны на рисунках 6, 7. В целом можно отметить, что модификация формы теплового импульса не приводит к качественному изменению характера взаимодействия механического, температурного и диффузионного полей. Релаксационные эффекты по-прежнему

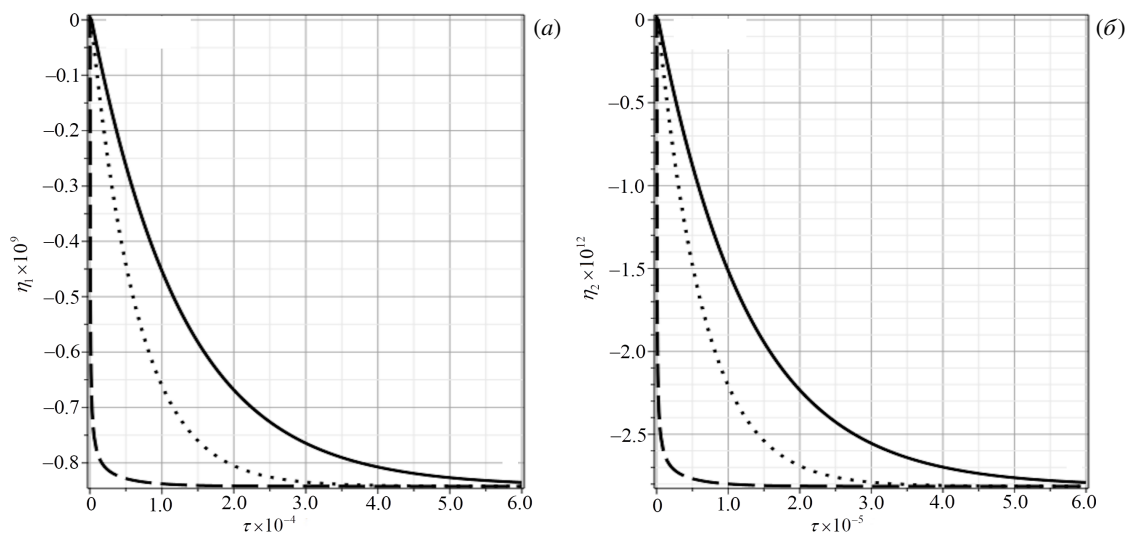


**Рис. 6.** Зависимости от времени  $\tau$  перемещений  $u(r, \tau)$  в точке  $r = 0.1$ : модель без релаксации ( $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с – штриховая линия); модель с релаксацией ( $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.2$  с – сплошная линия, и  $\tau_\vartheta = 0.01$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.1$  с – пунктирная линия)



**Рис. 7.** Зависимости от времени  $\tau$  температуры  $\vartheta(r, \tau)$  в точке  $r = 0.9$ : модель без релаксации ( $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с – штриховая линия), модель с релаксацией ( $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.2$  с – сплошная линия, и  $\tau_\vartheta = 0.01$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.1$  с – пунктирная линия) (а); связанная модель ( $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.2$  с – сплошная линия), несвязанная модель ( $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.2$  с – пунктирная линия), связанная модель без учёта релаксации ( $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с – штриховая линия), классическая модель (результаты решения задачи теплопроводности без учёта релаксации,  $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с) (штрихпунктирная линия) (б)

существенно проявляются только на начальных стадиях развития процесса (Рис. 6, 7а и 8), на временах, соизмеримых с временами релаксации тепловых и диффузионных потоков. Обратное влияние механического и диффузионного полей на поле температуры, как и в предыдущем примере, является крайне малым (Рис. 7а)



**Рис. 8.** Приращения концентраций 1-го (а) и 2-го (б) веществ, полученные по модели без релаксации ( $\tau_\vartheta = 0$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0$  с – штриховая линия) и по модели с релаксацией ( $\tau_\vartheta = 0.02$  с,  $\tau_\eta^{(a)} = 0.2$  с – сплошная линия, и  $\tau_\vartheta = 0.01$  с,  $\tau_\eta^{(q)} = 0.1$  с – пунктирная линия)

## 6. Заключение

Таким образом, в рамках линейной модели термомехано-диффузии с учётом конечных скоростей распространения тепловых и диффузионных потоков исследовано взаимодействие температурного, механического и диффузионного полей в деформируемых цилиндрических телах и показано влияние связанности полей на напряжённо-деформированное состояние рассмотренной конструкции. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1) Нестационарный поверхностный нагрев инициирует в цилиндре упругие деформации и массоперенос. При этом перемещения, вызванные нагревом, являются столь малыми, что оказывают весьма незначительное обратное влияние на температурное поле цилиндра. Что касается диффузионных процессов, то и они практически не сказываются на поле температуры.

2) С конечной скоростью распространения тепловых и диффузионных потоков связаны как кинетика тепломассопереноса, так и перемещения внутри цилиндра. Причём наиболее существенно фактор конечной скорости распространения тепла и массы проявляется в начальные, соизмеримые с временами релаксации, моменты времени, а затем его значимость сходит на нет.

3) Форма теплового импульса на поверхности цилиндра не меняет качественный и количественный характер связи механического, температурного и диффузионного полей. В работе рассмотрено два вида тепловой нагрузки и обоих случаях взаимодействие полей одинаково в смысле закономерностей, изложенных в пунктах 1 и 2.

Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ имени М.В. Ломоносова.

## Литература

1. Maxwell J.C. IV. On the dynamical theory of gases // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1867. Vol. 157. P. 49–88. DOI: 10.1098/rstl.1867.0004
2. Biot M.A. Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics // Journal of Applied Physics. 1956. Vol. 27, no. 3. P. 240–253. DOI: 10.1063/1.1722351
3. Горский В.С. Исследование упругого последствия в сплаве Си-Ау с упорядоченной решеткой // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1936. Т. 6, № 3. С. 272–276.
4. Данков П.Д., Чураев П.В. Эффект деформации поверхностного слоя металла при окислении // Доклады Академии наук СССР. 1950. Т. 73, № 6. С. 1221–1125.
5. Nowacki W. Dynamical problems of thermodiffusion in elastic solids // Proceedings on Vibration Problems. 1974. P. 105–128.
6. Подстригач Я.С., Павлина В.С. Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в n-компонентном твёрдом растворе // Физико-химическая механика материалов. 1965. № 4. С. 383–389.
7. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1984. 182 с.

8. Kovács R. Heat equations beyond Fourier: From heat waves to thermal metamaterials // *Physics Reports*. 2024. Vol. 1048. P. 1–75. DOI: 10.1016/j.physrep.2023.11.001
9. Астанов А.Н., Жаворонок С.И., Курбатов А.С., Рабинский Л.Н., Тушавина О.В. Основные проблемы при создании систем тепловой защиты на базе структурно-неоднородных материалов и методы их решения // *Теплофизика высоких температур*. 2021. Т. 59, № 2. С. 248–279. DOI: 10.31857/S0040364421020010
10. Cataneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation // *Comptes Rendus*. 1958. Vol. 247. P. 431–433.
11. Vernotte F. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1958. Vol. 246, no. 22. P. 3154–3155.
12. Lord H.W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1967. Vol. 15. P. 299–309. DOI: 10.1016/0022-5096(67)90024-5
13. Green A.E., Lindsay K.A. Thermoelasticity // *Journal of Elasticity*. 1972. Vol. 2, no. 1. P. 1–7. DOI: 10.1007/BF00045689
14. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
15. Abbas I.A. Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity // *Applied Mathematical Modelling*. 2015. Vol. 39, no. 20. P. 6196–6206. DOI: 10.1016/j.apm.2015.01.065
16. Abbas I.A., elmaboud Y.A. Analytical solutions of thermoelastic interactions in a hollow cylinder with one relaxation time // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 22, no. 2. P. 210–223. DOI: 10.1177/1081286515579308
17. Abo-Dahab S.M. Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories // *Applied Mathematics & Information Sciences*. 2019. Vol. 13, no. 2. P. 317–337. DOI: 10.18576/AMIS/130221
18. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2006. Vol. 2006. P. 1–15. DOI: 10.1155/IJMMS/2006/25976
19. Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 5711–5722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.01.019
20. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect // *International Journal of Computer Sciences and Engineering*. 2019. Vol. 7, no. 1. P. 148–156. DOI: 10.26438/ijcse/v7i1.148156
21. Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction // *Physica B: Condensed Matter*. 2016. Vol. 496. P. 57–68. DOI: 10.1016/j.physb.2016.05.008
22. Elhagary M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 218. P. 205–215. DOI: 10.1007/s00707-010-0415-5
23. Elhagary M.A. Generalized Thermoelastic Diffusion Problem for an Infinite Medium with a Spherical Cavity // *International Journal of Thermophysics*. 2012. Vol. 33. P. 172–183. DOI: 10.1007/s10765-011-1138-0
24. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // *CMST*. 2019. Vol. 25, no. 4. P. 167–176. DOI: 10.12921/cms.t.2018.0000034
25. Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C. Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions // *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 226. P. 3263–3274. DOI: 10.1007/s00707-015-1383-6
26. Xia R.-h., Tian X.-g., Shen Y.-p. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity // *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. P. 669–679. DOI: 10.1016/J.IJENGSCI.2009.01.003
27. Минов А.В. Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра, подверженного термодиффузионному воздействию углерода в осесимметричном тепловом поле, переменном по длине // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2008. № 10. С. 21–26.
28. Hwang C.C., Huang I.B. Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state conditions // *IOSR Journal of Engineering*. 2012. Vol. 2, no. 8. P. 166–182. DOI: 10.9790/3021-0281166182
29. Lee S., Wang W.L., Chen J.R. Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder: Constant surface stresses // *Materials Chemistry and Physics*. 2000. Vol. 64, no. 2. P. 123–130. DOI: 10.1016/S0254-0584(99)00255-2
30. Soares J.S. Diffusion of a fluid through a spherical elastic solid undergoing large deformations // *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. P. 50–63. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2008.07.001
31. Tartibi M., Guccione J.M., Steigmann D.J. Diffusion and swelling in a bio-elastic cylinder // *Mechanics Research Communications*. 2019. Vol. 97. P. 123–128. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2018.08.014
32. Yang F. Effect of diffusion-induced bending on diffusion-induced stress near the end faces of an elastic hollow cylinder // *Mechanics Research Communications*. 2013. Vol. 51. P. 72–77. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2013.05.006
33. Порошина Н.И., Рябов В.М. О методах обращения преобразования Лапласа // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия*. 2011. № 3. С. 55–64.
34. Зверев Н.А., Земсков А.В. Моделирование нестационарных механо-диффузионных процессов в полом цилиндре с учетом релаксации диффузионных потоков // *Математическое моделирование*. 2023. Т. 35, № 1. С. 95–112. DOI: 10.20948/mm-2023-01-07

35. *Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование одномерных механодиффузионных процессов в ортотропном сплошном цилиндре, находящемся под действием нестационарных объемных возмущений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2022. Т. 26, № 1. С. 62–78. DOI: 10.14498/vsgtu1880
36. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Задача Штурма-Лиувилля для одномерного термоупругого оператора в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64, № 3. С. 424–442. DOI: 10.31857/S0044466924030051
37. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование механодиффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами. М.: Физматлит, 2021. 288 с.
38. *Князева А.Г.* Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях. Томск: Иван Федоров, 2014. 172 с.
39. *Tarlovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Dynamic Processes in Thermo-Electro-Magneto-Elastic and Thermo-Elasto-Diffusive Media // Encyclopedia of Thermal Stresses. 2014. Vol. 7. P. 1064–1071. DOI: 10.1007/978-94-007-2739-7\_609
40. *Tzou D.Y.* The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1995. Vol. 38, no. 17. P. 3231–3240. DOI: 10.1016/0017-9310(95)00052-b
41. *Полянин А.Д., Вязьмин А.В.* Уравнения теплопроводности и диффузии с конечным временем релаксации. Постановки задач и некоторые решения // Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология. 2013. Т. 56, № 9. С. 102–108.
42. *Kalospiros N.S., Edwards B.J., Berist A.N.* Internal variables for relaxation phenomena in heat and mass transfer // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1993. Vol. 36. P. 1191–1200. DOI: 10.1016/s0017-9310(05)80089-4
43. *Kaminski W.* Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials With a Nonhomogeneous Inner Structure // Journal of Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 555–560. DOI: 10.1115/1.2910422
44. *Roetzel W., Putra N., Das S.K.* Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure // International Journal of Thermal Sciences. 2003. Vol. 42. P. 541–552. DOI: 10.1016/S1290-0729(03)00020-6
45. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 466 с.
46. *Физические величины: Справочник / под ред. И.С. Григорьева, И.З. Мейлихова.* М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

### Сведения об авторах:

*Земсков Андрей Владимирович (корр.)*, дфмн, проф., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4; e-mail: [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru); ORCID: 0000-0002-2653-6378

*Казимиров Данила Олегович*, студ., МАИ; e-mail: [dkvtvtdb@gmail.com](mailto:dkvtvtdb@gmail.com); ORCID: 0009-0004-2794-2134

*Малашкин Анатолий Владимирович*, кфмн, доц., МАИ; e-mail: [malashkin\\_a\\_v@mail.ru](mailto:malashkin_a_v@mail.ru); ORCID: 0009-0006-1391-564X

### Research article

## Interaction of mechanical, temperature and diffusion fields in a solid cylinder subjected to transient heating

*A.V. Zemskov<sup>1,2</sup>, D.O. Kazimirov<sup>1</sup>, A.V. Malashkin<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

The article examines the phenomena caused by the mutual influence of mechanical, temperature and diffusion fields in a continuous orthotropic multicomponent cylinder under the action of unsteady external perturbations set on the cylinder surface. The cylinder does not experience volumetric perturbations. It is assumed that the physico-mechanical processes occurring in the cylinder depend only on the radial coordinate. The mathematical formulation involves a system of coupled nonstationary thermodiffusion equations in a cylindrical coordinate system. The employed heat and mass transfer model accounts for the finite velocity of thermal and diffusion wave propagation. The kinematic relations for thermal and diffusion flows are constructed based on the generalized Lord–Shulman theory. The proposed algorithm for solving a polar-symmetric problem is based on the integral representation of the desired fields in the form of time-dependent convolutions of Green’s functions and the functions, describing surface thermomechanodiffusion perturbations. The Green’s functions are found by applying the time-domain Laplace transform and the Fourier–Bessel series expansion, which makes it possible to reduce the initial boundary value problem to a system of linear algebraic equations with respect to the coefficients of the Fourier series. The solutions of this system are rational functions, and therefore the inverse Laplace transformation is carried out analytically using the theory of residues and tables of operational calculus. Using a three-component cylinder as an example, a numerical analysis of the interaction between mechanical, temperature and diffusion fields under external unsteady thermal action is performed and the obtained results are compared with the solutions to known problems of thermoelasticity and mechanodiffusion. The effect of the finite velocity of propagation of thermal and diffusion fluxes on the kinetics of heat and mass transfer in continuous media under different types of external thermal load is investigated.

**Keywords:** thermomechanodiffusion, phase-lag effects, relaxation of heat and diffusion flows, unsteady problems, Green’s functions, Laplace transform, Fourier series, Bessel functions

*Received:* 22.10.2025 / *Published online:* 04.04.2026

## Acknowledgements

The research was made in the framework of the government task of Lomonosov Moscow State University.

## References

1. *Maxwell J.C.* IV. On the dynamical theory of gases. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1867. Vol. 157. P. 49–88. DOI: 10.1098/rstl.1867.0004
2. *Biot M.A.* Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics. *Journal of Applied Physics*. 1956. Vol. 27, no. 3. P. 240–253. DOI: 10.1063/1.1722351
3. *Gorskiy V.S.* Issledovaniye uprugogo posledeystviya v splave Si-Au s uporyadochennoy reshetkoy. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1936. Vol. 6, no. 3. P. 272–276.
4. *Dankov P.D., Churaev P.V.* Effekt deformatsii poverkhnostnogo sloya metalla pri okislenii. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1950. Vol. 73, no. 6. P. 1221–1125.
5. *Nowacki W.* Dynamical problems of thermodiffusion in elastic solids. *Proceedings on Vibration Problems*. 1974. P. 105–128.
6. *Podstrigach, Ya. S., Pavlina V.S.* Differential'nyye uravneniya termodinamicheskikh protsessov v n-komponentnom tverdom rastvore. *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov*. 1965. No. 4. P. 383–389.
7. *Yeremeyev V.S.* Diffuziya i napryazheniya. Moscow: Energoatomizdat, 1984. 182 p.
8. *Kovács R.* Heat equations beyond Fourier: From heat waves to thermal metamaterials. *Physics Reports*. 2024. Vol. 1048. P. 1–75. DOI: 10.1016/j.physrep.2023.11.001
9. *Astapov A.N., Zhavaronok S.I., Kurbatov A.S., Rabinskiy L.N., Tushavina O.V.* Main Problems in the Creation of Thermal-Protection Systems Based on Structurally Heterogeneous Materials and the Methods of Their Solution. *High Temperature*. 2021. Vol. 59, no. 2. P. 346–372. DOI: 10.1134/S0018151X21020012
10. *Cataneo C.* A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. *Comptes Rendus*. 1958. Vol. 247. P. 431–433.
11. *Vernotte F.* Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1958. Vol. 246, no. 22. P. 3154–3155.
12. *Lord H.W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1967. Vol. 15. P. 299–309. DOI: 10.1016/0022-5096(67)90024-5
13. *Green A.E., Lindsay K.A.* Thermoelasticity. *Journal of Elasticity*. 1972. Vol. 2, no. 1. P. 1–7. DOI: 10.1007/BF00045689
14. *Lykov A.V.* Teoriya teploprovodnosti. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p.
15. *Abbas I.A.* Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity. *Applied Mathematical Modelling*. 2015. Vol. 39, no. 20. P. 6196–6206. DOI: 10.1016/j.apm.2015.01.065
16. *Abbas I.A., elmagboud Y.A.* Analytical solutions of thermoelastic interactions in a hollow cylinder with one relaxation time. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 22, no. 2. P. 210–223. DOI: 10.1177/1081286515579308
17. *Abo-Dahab S.M.* Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories. *Applied Mathematics & Information Sciences*. 2019. Vol. 13, no. 2. P. 317–337. DOI: 10.18576/AMIS/130221
18. *Aouadi M.* A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2006. Vol. 2006. P. 1–15. DOI: 10.1155/IJMMS/2006/25976
19. *Aouadi M.* A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 5711–5722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.01.019
20. *Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M.* Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect. *International Journal of Computer Sciences and Engineering*. 2019. Vol. 7, no. 1. P. 148–156. DOI: 10.26438/ijcse/v7i1.148156
21. *Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S.* Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction. *Physica B: Condensed Matter*. 2016. Vol. 496. P. 57–68. DOI: 10.1016/j.physb.2016.05.008
22. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times. *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 218. P. 205–215. DOI: 10.1007/s00707-010-0415-5
23. *Elhagary M.A.* Generalized Thermoelastic Diffusion Problem for an Infinite Medium with a Spherical Cavity. *International Journal of Thermophysics*. 2012. Vol. 33. P. 172–183. DOI: 10.1007/s10765-011-1138-0
24. *Kumar R., Devi S.* Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources. *CMST*. 2019. Vol. 25, no. 4. P. 167–176. DOI: 10.12921/cms.t.2018.0000034
25. *Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C.* Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions. *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 226. P. 3263–3274. DOI: 10.1007/s00707-015-1383-6

26. Xia R.-h., Tian X.-g., Shen Y.-p. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity. *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. P. 669–679. DOI: 10.1016/J.IJENGSCI.2009.01.003
27. Minov A.V. Issledovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya pologo tsilindra, podverzhennogo termodiffuzionnomu vozdeystviyu ugleroda v osesimmetrichnom teplovom pole, peremennom po dline. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2008. No. 10. P. 21–26.
28. Hwang C.C., Huang I.B. Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state conditions. *IOSR Journal of Engineering*. 2012. Vol. 2, no. 8. P. 166–182. DOI: 10.9790/3021-0281166182
29. Lee S., Wang W.L., Chen J.R. Diffusion-induced stresses in a hollow cylinder: Constant surface stresses. *Materials Chemistry and Physics*. 2000. Vol. 64, no. 2. P. 123–130. DOI: 10.1016/S0254-0584(99)00255-2
30. Soares J.S. Diffusion of a fluid through a spherical elastic solid undergoing large deformations. *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. P. 50–63. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2008.07.001
31. Tartibi M., Guccione J.M., Steigmann D.J. Diffusion and swelling in a bio-elastic cylinder. *Mechanics Research Communications*. 2019. Vol. 97. P. 123–128. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2018.08.014
32. Yang F. Effect of diffusion-induced bending on diffusion-induced stress near the end faces of an elastic hollow cylinder. *Mechanics Research Communications*. 2013. Vol. 51. P. 72–77. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2013.05.006
33. Poroshina N.I., Ryabov V.M. Methods for laplace transform inversion. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*. 2011. Vol. 44. P. 214–222. DOI: 10.3103/S1063454111030071
34. Zverev N.A., Zemskov A.V. Modeling Unsteady Elastic Diffusion Processes in a Hollow Cylinder Taking into Account the Relaxation of Diffusion Fluxes. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023. Vol. 15. P. 686–697. DOI: 10.1134/S2070048223040208
35. Zverev N.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Modelling of one-dimensional elastic diffusion processes in an orthotropic solid cylinder under unsteady volumetric perturbations. *Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26, no. 1. P. 62–78.
36. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Sturm–Liouville Problem for a One-Dimensional Thermoelastic Operator in Cartesian, Cylindrical, and Spherical Coordinate Systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024. Vol. 64, no. 3. P. 401–415. DOI: 10.1134/S0965542524030175
37. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Modelirovaniye mekhanodiffuzionnykh protsessov v mnogokomponentnykh telakh s ploskimi granitsami. Moscow: Fizmatlit, 2021. 288 p.
38. Knyazeva A.G. Vvedeniye v termodinamiku neobratimyykh protsessov. *Lektsii o modelyakh*. Tomsk: Ivan Fedorov, 2014. 172 p.
39. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic Processes in Thermo-Electro-Magneto-Elastic and Thermo-Elasto-Diffusive Media. *Encyclopedia of Thermal Stresses*. 2014. Vol. 7. P. 1064–1071. DOI: 10.1007/978-94-007-2739-7\_609
40. Tzou D.Y. The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1995. Vol. 38, no. 17. P. 3231–3240. DOI: 10.1016/0017-9310(95)00052-b
41. Polyinin A.D., Vyaz'min A.V. Uravneniya teploprovodnosti i diffuzii s konechnym vremenem relaksatsii. *Postanovki zadach i nekotoryye resheniya*. The Journal ChemChemTech. 2013. Vol. 56, no. 9. P. 102–108.
42. Kalospiros N.S., Edwards B.J., Berist A.N. Internal variables for relaxation phenomena in heat and mass transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1993. Vol. 36. P. 1191–1200. DOI: 10.1016/s0017-9310(05)80089-4
43. Kaminski W. Hyperbolic Heat Conduction Equation for Materials With a Nonhomogeneous Inner Structure. *Journal of Heat Transfer*. 1990. Vol. 112. P. 555–560. DOI: 10.1115/1.2910422
44. Roetzel W., Putra N., Das S.K. Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure. *International Journal of Thermal Sciences*. 2003. Vol. 42. P. 541–552. DOI: 10.1016/S1290-0729(03)00020-6
45. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operationnomu ischisleniyu*. Moscow: Vysshaya shkola, 1965. 466 p.
46. *Fizicheskiye velichiny: Spravochnik* / ed. by I.S. Grigoriev, I.Z. Meilikhov. Moscow: Energoatomizdat, 1991. 1232 p.