

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.40

УДК 539.3

## ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЭЛЕКТРОВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ С ВНЕШНИМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ЦЕПЯМИ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЕЕ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В.П. Матвеевко, Д.А. Ошмарин, Н.А. Севодина, Н.А. Юрлова

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

В работе предлагается новая математическая постановка задачи о собственных колебаниях кусочно-однородных электровязкоупругих тел с внешними пассивными электрическими цепями различной архитектуры. Результатом решения являются комплексные собственные частоты колебаний, характеризующие собственные частоты колебаний тел и скорости их затухания. Данные характеристики могут эффективно применяться для анализа динамических процессов в smart-системах – системах, в частности использующих материалы, обладающие пьезоэффектом. В последнее время такого рода системы нашли широкое распространение в различных областях науки и техники. Их возможности в контроле и управлении динамическим поведением конструкций могут быть существенно расширены за счет присоединения к пьезоэлементам электрических цепей, представляющих различные комбинации из резистивных, емкостных и индуктивных элементов. Поиск оптимальных вариантов smart-систем связан с выбором компоновки пьезоэлементов, схем электрических цепей и входящих в них элементов. При рассмотрении задач с большим числом параметров моделирование – один из эффективных подходов к поиску оптимальных решений. Существующие прикладные пакеты программ не позволяют напрямую получить решение задачи о собственных колебаниях в предложенной постановке. В связи с этим в работе приводятся конечно-элементные соотношения (в том числе соотношения для нового конечного элемента, моделирующего электрическую цепь), которые с учетом известных типов конечных элементов для представления сплошных сред служат основой при построении численных алгоритмов. Приводится пример расчета комплексных собственных частот колебаний полуцилиндра с присоединенным к нему пьезоэлементом и внешней последовательной  $RL$ -цепью.

*Ключевые слова:* собственные колебания, электровязкоупругость, пьезоэлементы, внешние электрические цепи, метод конечных элементов

## PROBLEM ON NATURAL VIBRATIONS OF ELECTROVISCOELASTIC BODIES WITH EXTERNAL ELECTRIC CIRCUITS AND FINITE ELEMENT RELATIONS FOR ITS IMPLEMENTATION

V.P. Matveenko, D.A. Oshmarin, N.V. Sevodina and N.A. Yurlova

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

In this paper the mathematical statement for solving of the problem of natural vibrations of piecewise homogeneous electro-viscoelastic bodies with a passive external circuit of different configurations is proposed. The results of the problem solution are complex natural vibration frequencies, which characterize the natural vibration frequencies of bodies and their damping rates. These characteristics can be efficiently used to analyze dynamic processes in smart systems, i.e. materials exhibiting a piezoelectric effect. Recently these systems have found many applications in different branches of science and industry. Their capability to control and govern the dynamic behavior of structures can be greatly expanded by connecting external circuits of different combinations of resistive, capacitive and inductive elements to piezoelectric elements. The search for the optimal parameters of smart-systems is based on the appropriate choice of piezoelectric element arrangements, electric circuit schemes and circuit elements. When considering problems with a large number of parameters, the modeling is one of the efficient approaches for finding the optimal solution. Application software packages currently available for solving natural vibration problems do not provide direct solution to the problem formulated here. Therefore, this study involves finite-element relations, including those for the original finite element representing an external circuit, which, taking into account the well-known types of finite elements for continuous media description, form the basis for constructing numerical algorithms. As an example, calculations of the complex natural vibration frequencies of a half cylinder with an attached piezoelectric element and an external series  $RL$ -circuit are performed.

*Key words:* natural vibrations, electroviscoelasticity, piezoelectric elements, external electric circuits, finite element method

### 1. Введение

В работе [1] показана возможность демпфирования колебаний конструкции с помощью так называемых шунтирующих цепей — внешних электрических цепей, присоединенных к электродированным поверхностям элементов конструкции, выполненных из пьезоэлектрических материалов. В настоящее время подобное внешнее шунтирование, как способ демпфирования колебаний, — очень популярная методика для тех технических приложений, где малые размеры и вес играют решающую роль, и где практически нет доступа к источникам электроэнергии.

В литературе встречается несколько подходов к моделированию динамического поведения конструкций с пьезоэлементами и внешними электрическими цепями. Так, в некоторых работах [2, 3, 5] делается попытка нахождения решения аналитически. При этом в качестве объекта исследования выступают балки [4, 5] и пластинки [2], для которых решается задача исследования собственных колебаний [2, 4]. Но в этих работах внешние электрические цепи как объект не рассматриваются. Однако

их влияние учитывается в граничных условиях путем задания приложенного напряжения [2–6]. Так как напряжение, подаваемое на пьезоэлемент, может вызвать его изгиб и локальные деформации в силу обратного пьезоэффекта, то это влияет на изгибную жесткость и, следовательно, на собственные частоты колебаний тела. В [3] получено аналитическое выражение для разности потенциалов, которую необходимо подвести к пьезоэлементу для компенсации неизвестной механической нагрузки, определяемой по показанию сенсора. Однако при таком подходе параметры внешних электрических цепей не могут быть установлены.

Другой подход основывается на построении для пьезоэлемента эквивалентных схем замещения. Здесь по известным из электротехники формулам записываются уравнения колебаний электрической цепи, находится электрический импеданс системы, и затем по коэффициенту электромеханической связи вычисляются частоты колебаний и оптимальные параметры внешних электрических цепей [6].

Следующий подход связан с решением вариационного уравнения движения электроупругого или электровязкоупругого тела [7–13]. Он позволяет изучать конструкции произвольной формы, в том числе и пространственные [9, 11, 12, 14, 15]. При этом внешние электрические цепи также не являются самостоятельным объектом исследований [9–13]. Влияние электрических цепей учитывается как приложенная на границе тела разность потенциалов, вид же цепей и их параметры, которые обеспечивают генерацию заданной электрической величины, не конкретизируются.

При моделировании динамических процессов в конструкциях демпфирующие свойства оцениваются по величине амплитуды, отвечающей резонансному режиму, или по скорости переходных процессов. В первом случае решается задача вынужденных установившихся колебаний [3, 14–16], во втором — динамическая задача с начальными условиями. Для этих задач следует отметить два обстоятельства: нахождение амплитуды при резонансном режиме требует многократного решения задачи вынужденных установившихся колебаний при различных частотах внешних воздействий; решение динамических задач с начальными условиями позволяет оценить скорость затухания колебаний только для конкретной нагрузки. То и другое снижает эффективность оптимизационных алгоритмов, в которых они присутствуют.

В настоящей статье осуществляется математическая постановка задачи, в которой исследуются собственные колебания пространственных электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями, и строятся конечно-элементные соотношения для ее численной реализации. Результаты решения могут служить удобным инструментом для анализа динамического поведения аналогичных электровязкоупругих конструкций, а также оценки влияния внешней цепи на динамические характеристики и эффективность работы пьезоэлементов в smart-конструкциях. При этом получаемые динамические характеристики имеют интегральный характер и не зависят от вида внешнего воздействия. Применение алгоритма решения данной задачи эффективно при оптимизационном анализе, ставящем целью поиск параметров внешней цепи, обеспечивающих наилучшие демпфирующие свойства системы, так как искомые параметры входят в разрешающую систему уравнений в явном виде. Кроме того, приведенная постановка позволяет изучать конструкции произвольной геометрии.

## 2. Математическая постановка задачи о собственных колебаниях электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями

Рассматривается кусочно-однородное тело объемом  $V = V_1 + V_2$ , где часть  $V_1 = \sum_k^N V_1^k$  состоит из  $N$

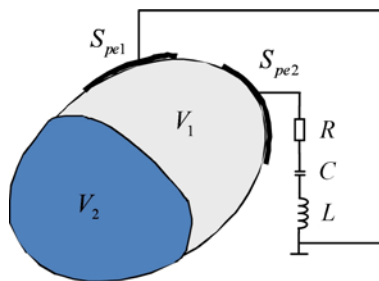


Рис. 1. Электровязкоупругое тело с внешней электрической цепью

однородных упругих или вязкоупругих тел, а часть  $V_2$  — из пьезоэлектрических элементов (Рис. 1). Вариационное уравнение движения тела формулируется на основе соотношений линейной теории упругости и квазистатических уравнений Максвелла [17–19]:

$$\sum_{k=1}^N \left( \int_{V_1^k} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_k \ddot{u}_i \delta u_i) dV \right) + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) dV = \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS + \int_{S_p} q_e \delta \varphi dS. \quad (1)$$

Здесь:  $D_i, E_i$  — компоненты вектора электрической индукции и напряженности электрического поля;  $\sigma_{ij}$  — компоненты симметричного тензора напряжений Коши;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора линейных деформаций;  $u_i$  — компоненты вектора перемещений;  $\rho_k$  — удельная плотность материала  $k$ -й составляющей кусочно-однородного тела объемом  $V_1^k$ ;  $\rho$  — удельная плотность пьезоэлектрического материала;  $S_\sigma$  — часть поверхности тела объемом  $V$ ,

на которой заданы поверхностные усилия  $p_i$ ;  $S_p = S_{p1} + S_{p2}$  — поверхность пьезоэлектрического тела объемом  $V_2$ ;  $q_e$  — поверхностная плотность свободных зарядов;  $\varphi$  — электрический потенциал.

Для электрического поля выполняется условие потенциальности:

$$\varphi_{,i} = -E_i.$$

При изотермических процессах в линейных электровязкоупругих средах справедливы следующие физические соотношения:

– для упругих частей  $V_1$

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G_k \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij} \right), \quad \sigma = B_k \vartheta;$$

– для вязкоупругих частей  $V_1$  [20]

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2G_k^0 \left( e_{ij} - \int_0^t R_k(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right), \\ \sigma &= B_k^0 \left( \vartheta - \int_0^t K_k(t-\tau) \vartheta(\tau) d\tau \right); \end{aligned} \quad (2)$$

– для пьезоэлектрического элемента объемом  $V_2$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ijk} E_k \\ D_k &= \beta_{ijk} \varepsilon_{ij} + e_{ki} E_i \end{aligned} \right\}$$

Здесь:  $G_k, B_k$  — упругие сдвиговые и объемные модули;  $G_k^0, B_k^0$  — мгновенные сдвиговые и объемные модули;  $R_k, K_k$  — ядра релаксации;  $\sigma$  — среднее напряжение;  $\vartheta$  — объемная деформация;  $s_{ij}, e_{ij}$  — компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций;  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих констант пьезоэлемента;  $\beta_{ijk}$  и  $e_{ki}$  — компоненты тензоров пьезоэлектрических и диэлектрических коэффициентов.

В рассматриваемой задаче электровязкоупругости граничные условия можно разделить на два типа: механические и электрические:

– механические условия имеют тот же вид, что и в аналогичных задачах теории упругости и вязкоупругости:

$$\mathbf{x} \in S_\sigma, \quad \sigma_{ij} n_j = p_i; \quad \mathbf{x} \in S_u, \quad u_i = U_i,$$

где  $\mathbf{x}$  — радиус-вектор точек тела  $V$ ,  $S_u$  — часть поверхности тела, где заданы перемещения  $U_i$ ;

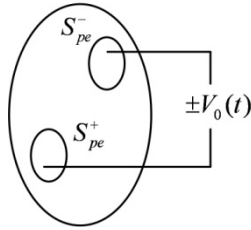
– электрические:

а) на неэлектродированных частях поверхности пьезоэлектрического тела, в силу того, что они непроводящие и на них отсутствуют свободные заряды, граничные условия являются нулевыми. Это выражается соответствующими уравнениями Максвелла:

$$\int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) dS = 0 \quad \text{или} \quad \text{div} \mathbf{D} = 0;$$

б) на электродированных частях поверхности пьезоэлектрического тела граничные условия зависят от способа передачи пьезоэлементу электрической энергии.

Подведение и снятие электрической энергии с деформированного пьезоэлектрического тела осуществляется с помощью электродных покрытий, нанесенных на части его поверхности. В дальнейшем полагается, что электродные покрытия — это тонкие идеальные проводники с пренебрежимо малой массой. Наличие покрытия токопроводящим слоем части поверхности пьезоэлектрического тела  $S_{pe}$  делает ее эквипотенциальной.



**Рис. 2.** Схема подачи на электродированные поверхности электрического потенциала через генератор напряжения

Конкретный вид граничных условий по электрической компоненте вектора состояния зависит от того, что служит источником энергии. В качестве модельных источников электрической энергии могут использоваться широко применяемые в электротехнике генераторы тока и напряжения.

**Вид 1.** Если электродированная поверхность питается генератором напряжения с выходной разностью потенциалов  $V_0$  (Рис. 2), то

$$\mathbf{x} \in S_{pe}, \quad \varphi = \pm V_0(t), \quad S_{pe} = S_{pe}^+ + S_{pe}^-.$$

**Вид 2.** При возбуждении колебаний пьезоэлектрического тела с помощью генератора тока с заданным значением силы тока  $I_0(t)$  разность потенциалов  $V(t)$  на электродах неизвестна. В этом случае

из условия непрерывности тока в цепи, включающей пьезоэлектрическое тело, получается интегральное условие для вектора электрической индукции:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_{pe}} q_e dS = \frac{d}{dt} \int_{S_{pe}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) dS = -I_0(t), \tag{3}$$

Интегральное условие (3) нельзя использовать непосредственно как граничное условие. Поэтому вводится заранее неизвестное значение разности потенциалов на электродированной поверхности

$$\mathbf{x} \in S_{pe}, \quad \varphi = \pm V(t). \tag{4}$$

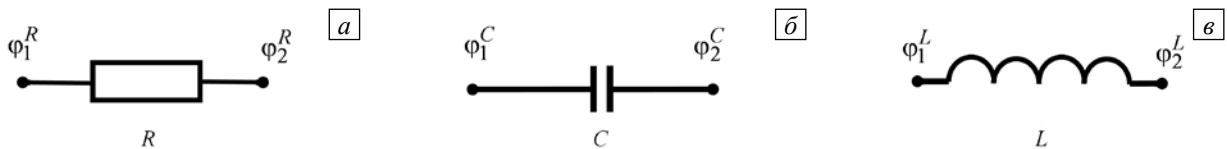
Присутствующая в (4) разность потенциалов  $V(t)$  входит в уравнение (3) неявно через решение краевой задачи электроупругости.

Через электродированные поверхности к рассматриваемой системе могут быть присоединены электрические цепи, включающие элементы сопротивления ( $R$ ), емкости ( $C$ ) и индуктивности ( $L$ ). Если к этим цепям не подведены внешние источники энергии, то они будут являться внутренними элементами системы, и тогда в уравнение (1) должно быть добавлено слагаемое

$$\sum \delta A = \delta A_L + \delta A_R + \delta A_C, \tag{5}$$

которое учитывает всю работу по перемещению любого возможного заряда  $q$ , совершенную электрическим полем с разностью потенциалов  $U$ , образующейся во внешней электрической цепи в результате прямого пьезоэффекта:

$$\delta A = q \delta \varphi. \tag{6}$$



**Рис. 3.** Элементы внешней электрической цепи: сопротивление  $R$  (а), емкость  $C$  (б), индуктивность  $L$  (в)

Выразим в уравнении (6) заряд через электрический потенциал соответствующих элементов сопротивления, емкости и индуктивности (Рис. 3), используя известные из электротехники соотношения [21, 22]. Проведем преобразования, позволяющие получить выражение для работы электрического поля с разностью потенциалов  $U$  по перемещению заряда в элементе цепи:

– в резисторе сопротивлением  $R$  :

$$U_R = RI_R, \quad I_R = \frac{dq_R}{dt}, \quad U_R = \varphi_1^R - \varphi_2^R, \tag{7}$$

$$q_R = \frac{1}{R} \int (\varphi_1^R - \varphi_2^R) dt, \quad \delta A_R = \frac{1}{R} \int (\varphi_1^R - \varphi_2^R) \delta \varphi dt;$$

– в конденсаторе емкостью  $C$  :

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{q_C}{C}, \quad q_C = CU_C, \quad U_C = \varphi_1^C - \varphi_2^C, \\ q_C &= C \cdot (\varphi_1^C - \varphi_2^C), \quad \delta A_C = C(\varphi_1^C - \varphi_2^C)\delta\varphi; \end{aligned} \quad (8)$$

– в катушке индуктивности индуктивностью  $L$  :

$$\begin{aligned} U_L &= L \frac{dI_L}{dt}, \quad I_L = \frac{dq_L}{dt}, \quad U_L = \varphi_1^L - \varphi_2^L, \\ q_L &= \frac{1}{L} \iint (\varphi_1^L - \varphi_2^L) dt dt, \quad \delta A_L = \frac{1}{L} \iint (\varphi_1^L - \varphi_2^L) \delta\varphi dt dt. \end{aligned} \quad (9)$$

После подстановки в (5) соответствующих слагаемых из (7)–(9) вариационное уравнение движения для электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями примет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left( \int_{V_k^k} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_k \ddot{u}_i \delta u_i) dV \right) + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho \ddot{u}_i \delta u_i) dV - \int_{S_\sigma} p_i \delta u_i dS - \int_{S_p} q_e \delta \varphi dS + \\ + \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{L_p} \iint (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) \delta\varphi dt dt + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{R_q} \int (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta\varphi dt + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta\varphi = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $n_L, n_R, n_C$  — количество индуктивных, резистивных и емкостных элементов соответственно.

В задаче о собственных колебаниях при однородных граничных условиях будем искать решение в виде:

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \quad \varphi(x, t) = \bar{\varphi}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}. \quad (11)$$

Здесь:  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  — комплексная собственная частота колебаний, где  $\omega_R$  соответствует собственной частоте, а  $\omega_I$  характеризует скорость затухания колебаний;  $\bar{u}_i(\mathbf{x}), \bar{\varphi}(\mathbf{x})$  — собственные формы колебаний. Физические уравнения (2) заменим их комплексными аналогами:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2(G_k^R + iG_k^I) e_{ij}, \\ \sigma &= (B_k^R + iB_k^I) \vartheta, \end{aligned}$$

где  $G_k^R, G_k^I, B_k^R, B_k^I$  — действительные и мнимые составляющие сдвигового и объемного комплексных динамических модулей [23]. С учетом решения (11) вариационное уравнение (10) для обсуждаемой задачи о собственных колебаниях в случае электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left( \int_{V_k^k} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho_k \omega^2 u_i \delta u_i) dV \right) + \int_{V_2} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i + \rho \omega^2 u_i \delta u_i) dV - \\ - \sum_{p=1}^{n_L} \frac{1}{\omega^2 L_p} \iint (\varphi_1^{L_p} - \varphi_2^{L_p}) \delta\varphi dt dt + \sum_{q=1}^{n_R} \frac{1}{i\omega R_q} \int (\varphi_1^{R_q} - \varphi_2^{R_q}) \delta\varphi dt + \sum_{r=1}^{n_C} C_r (\varphi_1^{C_r} - \varphi_2^{C_r}) \delta\varphi = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

### 3. Конечно-элементные соотношения для электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями

Внешние электрические цепи, независимо от их архитектуры, характеризуются числом узловых точек  $p$ , каждая из которых имеет собственное значение электрического потенциала  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, p$ ), и количеством групп  $\Gamma$  из электрических элементов в цепях, соединяющих две узловые точки с потенциалами  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  ( $i \neq j$ ). Отдельная группа может состоять из набора элементов, представленных на рисунке 4. Именно группу, включающую в себя сопротивление, емкость и индуктивность будем рассматривать при численной реализации как конечный элемент внешней электрической цепи.

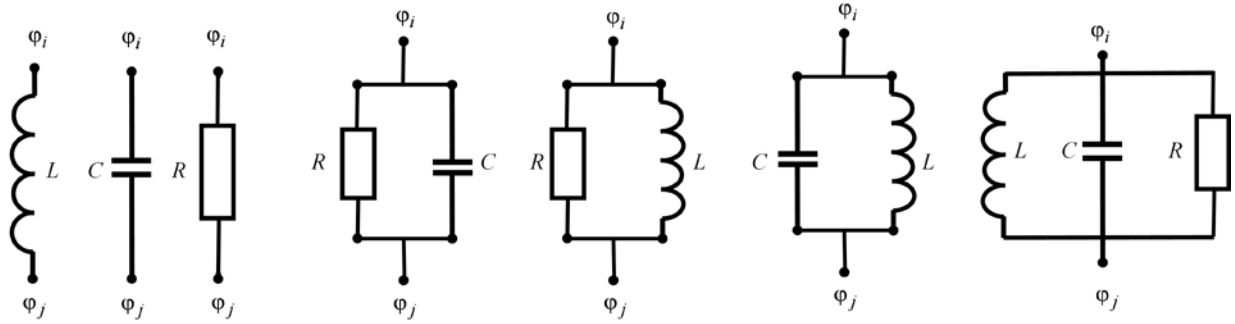


Рис. 4. Примеры одно-, двух- и трехэлементных групп из сопротивлений, емкостей, индуктивностей

В предыдущем разделе показано, что задача исследования собственных колебаний электровязкоупругого тела с внешними электрическими цепями описывается вариационным уравнением (12). С учетом введенного электрического конечного элемента оно может быть преобразовано к следующему матричному виду:

$$\sum_{k=1}^N \int_{V_k^k} \left( \delta \{ \varepsilon_1 \}^T [D_1] \{ \varepsilon_1 \} - \omega^2 \delta \{ u^{V_k} \}^T [\rho_k] \{ u^{V_k} \} \right) dV + \int_{V_2} \left( \delta \{ \varepsilon_2 \}^T [D_2] \{ \varepsilon_2 \} - \omega^2 \delta \{ u^{V_2} \}^T [\rho] \{ u^{V_2} \} \right) dV + \sum_{g=1}^{\Gamma} \delta \{ \varphi \}^T [k_g] \{ \varphi \} = 0. \tag{13}$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \{ u^{V_k} \} &= \{ u_1, u_2, u_3 \}^T, \\ \{ \varepsilon_1 \} &= \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23} \}^T, \\ \{ \sigma_1 \} &= \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} \}^T, \\ \{ \rho_k \} &= \{ \rho_k, \rho_k, \rho_k \}^T, \\ \{ u^{V_2} \} &= \{ u_1, u_2, u_3, \varphi \}^T, \\ \{ \varepsilon_2 \} &= \{ \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, E_1, E_2, E_3 \}^T, \\ \{ \sigma_2 \} &= \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, D_1, D_2, D_3 \}^T, \\ \{ \rho \} &= \{ \rho, \rho, \rho, 0 \}. \end{aligned}$$

Матрица  $[D_1]$  из (13) определяет вид физических соотношений для упругих и вязкоупругих частей тела

$$\{ \sigma_1 \} = [D_1] \{ \varepsilon_1 \} = (2G_k [A_1] + B_k [A_2]) \{ \varepsilon_1 \},$$

где

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & -2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad [A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

при этом для вязкоупругих частей сдвиговой и объемный модули  $G_k$  и  $B_k$  заменяются на соответствующие комплексные.

Матрица  $[D_2]$  из (13) соответствует виду физических соотношений для пьезоэлектрических элементов

$$\{ \sigma_2 \} = [D_2] \{ \varepsilon_2 \} = \begin{bmatrix} [C_p] & [\beta] \\ [\beta]^T & [e] \end{bmatrix} \{ \varepsilon_2 \}.$$

Здесь

$$[C_p] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}; \quad [\beta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{31} \\ 0 & 0 & \beta_{31} \\ 0 & 0 & \beta_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{15} & 0 \\ \beta_{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [e] = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix}.$$

С учетом соотношений (7)–(9) входящие в (13) матрица  $[k_s]$  и вектор  $\{\varphi\}$  примут следующий вид:

$$\{\varphi\} = \{\varphi_i, \varphi_j\}^T, \quad [k_s] = [k_L] + [k_R] + [k_C],$$

где

$$[k_L] = \begin{bmatrix} -1/(\omega^2 L) & 0 \\ 0 & 1/(\omega^2 L) \end{bmatrix}, \quad [k_R] = \begin{bmatrix} i/(\omega R) & 0 \\ 0 & i/(\omega R) \end{bmatrix}, \quad [k_C] = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -C \end{bmatrix}.$$

Типовые процедуры метода конечных элементов приводят задачу о собственных колебаниях электровязкоупругого тела с внешними цепями к частичной алгебраической проблеме собственных значений

$$([K] - \omega^2 [M] + [C(\omega)])\{\delta\} = 0,$$

которая решается с использованием алгоритма, построенного на основе метода Мюллера [24, 25].

#### 4. Результаты численных расчетов.

В качестве иллюстрации применения предложенной математической постановки задачи и алгоритма ее решения была проведена серия вычислительных экспериментов на пространственной тонкостенной оболочечной конструкции в форме полуцилиндра с присоединенным к ней пьезоэлементом и внешней последовательной  $RL$ -цепью (Рис. 5). Оболочка имела геометрические размеры  $r = 152$  мм,  $l = 600$  мм,  $h = 1$  мм и была выполнена из вязкоупругого изотропного материала со следующими физико-механическими характеристиками:  $G^o = 0,76 \cdot 10^{11}$  Па;  $G_I/G_R = B_I/B_R = 0,01$ ;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>. Оболочка жестко защемлялась по образующим поверхностям и по одному из торцов. Пьезоэлемент в форме сектора кольца (в цилиндрической системе координат) размерами  $l_p = 50$  мм,  $\varphi = 15,08^\circ$ ,  $h = 1,2$  мм из пьезокерамики

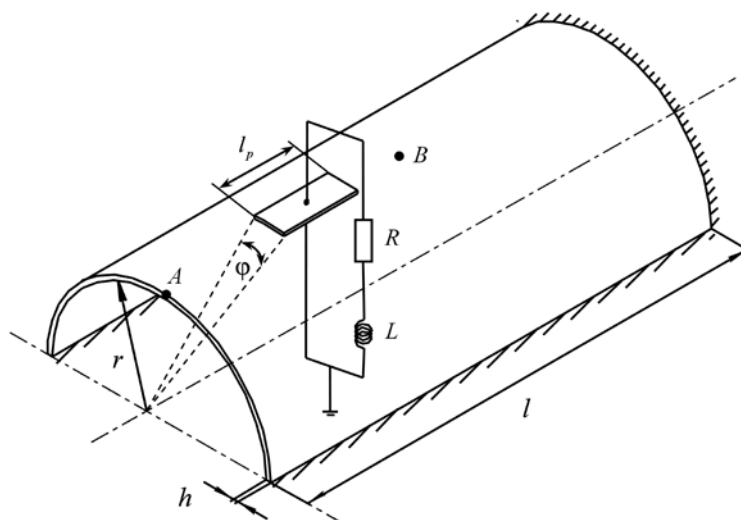


Рис. 5. Оболочка с пьезоэлементом и внешней последовательной  $RL$ -цепью

PZT-4 с физико-механическими характеристиками  $C_{11} = 11,5 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{12} = C_{13} = 7,43 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{23} = 7,78 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{22} = C_{33} = 13,9 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{44} = C_{66} = 2,56 \cdot 10^{10}$  Па,  $C_{55} = 3,06 \cdot 10^{10}$  Па,  $\beta_{11} = 15,2$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\beta_{21} = \beta_{31} = -5,2$  Кл/м<sup>2</sup>,  $\beta_{42} = \beta_{63} = 12,7$  Кл/м<sup>2</sup>,  $e_{11} = 5,62 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $e_{22} = e_{33} = 6,45 \cdot 10^{-9}$  Ф/м,  $\rho = 7500$  кг/м<sup>3</sup> располагался на внешней поверхности оболочки симметрично относительно ее закрепленных краев на расстоянии 175 мм от заземленного торца.

С целью тестирования алгоритма определялись комплексные собственные частоты колебаний конструкции без внешних электрических цепей, то есть с пьезоэлементом, работающим в режиме холостого хода (open circuit). Это соответствовало электрическим граничным условиям, когда одна электродированная поверхность пьезоэлемента заземлена (электрический потенциал на ней равен нулю), а вторая — свободна от нагрузок. Результаты сравнения с решением аналогичной задачи для электровязкоупругой конструкции без внешних электрических цепей в ANSYS (Лицензия Academic Research Mechanical and CFD № 1064623) показали на одинаковых конечно-элементных сетках совпадение значений собственных частот до пятого знака.

Реализованное в модуле гармонического анализа пакета ANSYS стандартное решение задачи о вынужденных установившихся колебаниях электровязкоупругих конструкций с внешними электрическими цепями дает возможность построить амплитудно-частотные характеристики и сравнить отвечающие им резонансные частоты с собственными частотами колебаний. Для конструкции с внешней последовательной  $RL$ -цепью (Рис. 5), выполненной из материала с характеристиками  $G_I^{(k)}/G_R^{(k)} = B_I^{(k)}/B_R^{(k)} = 0,01$ , при решении задачи о собственных колебаниях были получены первые 4 собственные частоты при  $R = 40$  Ом и  $L = 20$  Гн (Табл.).

Таблица. Частоты колебаний электровязкоупругой конструкции в виде оболочки с присоединенным пьезоэлементом и внешней цепью при  $R = 40$  Ом и  $L = 20$  Гн

№ частоты	Собственные частоты колебаний	Частоты, соответствующие резонансным пикам АЧХ
1	206,668 – 1,031i	206,668
2	226,641 – 1,100i	226,415
3	299,843 – 4,194i	299,843
4	365,009 – 1,799i	365,374

При решении задачи для оболочки с пьезоэлементом и внешней последовательной  $RL$ -цепью в условиях вынужденных установившихся колебаний производился расчет при действии в точке

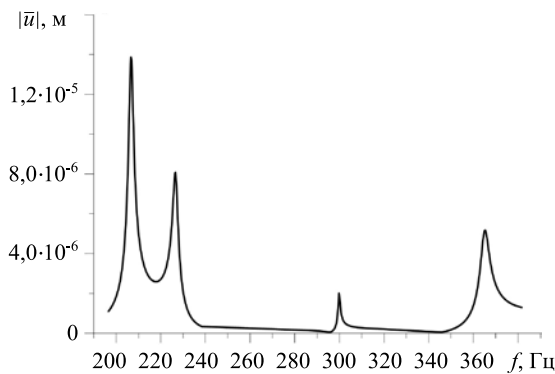


Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики оболочки с пьезоэлементом и внешней последовательной  $RL$ -цепью в условиях вынужденных колебаний

В гармонической силы  $\bar{F}$  с компонентами  $F_r = F_\varphi = F_z = 1$  Н. На рисунке 6 показана амплитудно-частотная характеристика для модуля вектора перемещений в точке А, полученная для конструкции с внешней последовательной  $RL$ -цепью при значениях параметров  $R$ ,  $L$ ,  $G_I^{(k)}/G_R^{(k)}$ ,  $B_I^{(k)}/B_R^{(k)}$ , использованных при решении задачи исследования собственных колебаний. На приведенном графике положения резонансных пиков, найденных в окрестности резонанса при шаге по частоте  $10^{-3}$  Гц, практически соответствуют частотам, которые были установлены при численном моделировании собственных колебаний (см. Табл.). Разница составляет не более 0,1%.

## 5. Заключение

В работе приводится новая математическая постановка задачи о динамическом поведении smart-конструкций, основанных на использовании материалов, обладающих пьезоэлектрическими свойствами. Рассматриваемый объект представлен как кусочно-однородное тело, составленное из однородных упругих или вязкоупругих частей, а также пьезоэлектрических элементов, к электродированным поверхностям которых подключены электрические цепи из комбинаций элементов сопротивлений, емкостей и индуктивностей. Выведено вариационное уравнение, моделирующее динамическое поведение изучаемого объекта.



Обсуждается вариант динамической задачи, связанный с нахождением собственных частот колебаний конструкции, содержащей элементы, выполненные из пьезоматериалов с присоединенными внешними электрическими цепями произвольной конфигурации. В результате решения задачи находятся комплексные собственные частоты, определяющие собственные частоты колебаний и параметр, характеризующий скорость их затухания, и комплексные собственные формы колебаний для перемещений и электрического потенциала.

Для реализации методом конечных элементов построенной вариационной задачи предложен конечный элемент, моделирующий электрическую цепь. Получена матричная форма основного вариационного уравнения с учетом введенного конечного элемента, которая является основой для построения алгоритмов оптимизации динамических характеристик smart-конструкций, включающих элементы из пьезоматериалов и внешние электрические цепи.

Алгоритм, построенный в соответствии с предложенной математической постановкой, протестирован на примере расчета комплексных собственных частот колебаний полуцилиндра с присоединенным к нему пьезоэлементом и внешней последовательной  $RL$ -цепью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 15-1-10-18).

## Литература

1. *Hagood N.W., von Flotow A.* Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks // *J. Sound Vib.* – 1991. – Vol. 146, no. 2. – P. 243-268. DOI
2. *Kuo Shih-Yao.* Stiffening effects on the natural frequencies of laminated beams with piezoelectric actuators // *Journal of Aeronautics, Astronautics and Aviation, Series A.* – 2010. – Vol. 42, no. 1. – P. 067-072.
3. *Карнаухова Т.В.* О новом подходе к активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропных вязкоупругих пластин // *Доп. НАН України.* – 2009. – № 5. – С. 78-82.
4. *Khani S., Tabandeh N., Ghomshei M.M.* Natural frequency analysis of non-uniform smart beams with piezoelectric layers, using differential quadrature method // *Compos. Part B-Eng.* – 2014. – Vol. 58. – P. 303-311. DOI
5. *Li M.M., Fang B., Cao D.Q., Huang W.H.* Modeling and analysis of cantilever beam with active-passive hybrid piezoelectric network // *Sci. China Technol. Sci.* – 2013. – Vol. 56, no. 9. – P. 2326-2335. DOI
6. *Bisegna P., Caruso G., Maceri F.* On the choice of the shunt circuit for single-mode vibration damping of piezoactuated structures // *Mechanical Modelling and Computational Issues in Civil Engineering.* – 2004. – Vol. 23. – P. 389-400. DOI
7. *Donadon M.V., Almeida S.F.M., de Faria A.R.* Stiffening effects on the natural frequencies of laminated plates with piezoelectric actuators // *Compos. Part B-Eng.* – 2002. – Vol. 33, no. 5. – P. 335-342. DOI
8. *Krommer M., Pieber M., Vetyukov Yu.* Modellierung, Simulation und Schwingungsreduktion dünner Schalen mit piezoelektrischen Wandlern // *Elektrotech. Inftech.* – 2015. – Vol. 132, no. 8. – P. 437-447. DOI
9. *Thomas O., Deü J.-F., Ducarne J.* Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 2009. – Vol. 80, no. 2. – P. 235-268. DOI
10. *Benjeddou A.* Modal effective electromechanical coupling approximate evaluations and simplified analyses: numerical and experimental assessments // *Acta Mech.* – 2014. – Vol. 225, no. 10. – P. 2721-2742. DOI
11. *Karlash V.L.* Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric shells of revolution (review) // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – Vol. 44, no. 4. – P. 361-387. DOI
12. *Senéchal A., Thomas O., Deü J.-F., Jean P.* Optimization of shunted piezoelectric patches for complex structure vibration reduction – Application to a turbojet fan blade // *Proc. of IV European Congress on Computational Mechanics (ECCM 2010), Paris, France, May 16-21, 2010.* – P.1-2.
13. *Rocha T.L., Calcada M., Silva Y.A.R.* Enhancement of low-frequency sound insulation using piezoelectric resonators // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* – 2013. – Vol. 35, no. 4. – P. 357-367. DOI
14. *Болкисев А.М., Ефимова Т.Л., Шульга Н.А.* Колебания пьезокерамического полого цилиндра при механическом нагружении // *Прикладная механика.* – 1985. – Т. 21, № 9. – С. 109-112.
15. *Болкисев А.М., Шульга Н.А.* Вынужденные колебания вязкоупругого пьезокерамического цилиндра // *Прикладная механика.* – 1986. – Т. 22, № 4. – С. 103-106.
16. *Карнаухова Т.В.* Влияние механических граничных условий на активное демпфирование вынужденных изгибных резонансных колебаний изотропных вязкоупругих прямоугольных пластин // *Доп. НАН України.* – 2009. – № 8. – С. 58-62.
17. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1982.
18. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
19. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 319 с.
20. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
21. *Попов В.П.* Основы теории цепей: учебник для вузов спец. «Радиотехника». – М.: Высшая школа, 1985. – 496 с.
22. *Манаев Е.И.* Основы радиоэлектроники. – М.: Радио и связь, 1985. – 504 с.
23. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.
24. *Матвеев В.П., Севодина М.А., Севодина Н.В.* Приложения метода Мюллера и принципа аргумента к задачам на собственные значения в механике деформируемого твердого тела // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 331-336. DOI

25. Матвеевко В.П., Клизман Е.П., Юрлов М.А., Юрлова Н.А. Моделирование и оптимизация динамических характеристик smart-структур с пьезоматериалами // Физ. мезомех. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 75-85. (English version DOI).

## References

- Hagood N.W., von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *J. Sound Vib.*, 1991, vol. 146, no. 2, pp. 243-268. DOI
- Kuo Shih-Yao. Stiffening effects on the natural frequencies of laminated beams with piezoelectric actuators. *Journal of Aeronautics, Astronautics and Aviation, Series A*, 2010, vol.42, no.1, pp. 067-072.
- Karnaukhova T.V. On a new approach to the active damping of forced resonance bending vibrations of viscoelastic isotropic plates. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2009, no. 5, pp. 78-82.
- Khani S., Tabandeh N., Ghomshei M.M. Natural frequency analysis of non-uniform smart beams with piezoelectric layers, using differential quadrature method. *Compos. Part B-Eng.*, 2014, vol. 58, pp. 303-311. DOI
- Li M.M., Fang B., Cao D.Q., Huang W.H. Modeling and analysis of cantilever beam with active-passive hybrid piezoelectric network. *Sci. China Technol. Sci.*, 2013, vol. 56, no. 9, pp. 2326-2335. DOI
- Bisegna P., Caruso G., Maceri F. On the choice of the shunt circuit for single-mode vibration damping of piezoactuated structures. *Mechanical Modelling and Computational Issues in Civil Engineering*, 2004, vol. 23, pp. 389-400. DOI
- Donadon M.V., Almeida S.F.M., de Faria A.R. Stiffening effects on the natural frequencies of laminated plates with piezoelectric actuators. *Compos. Part B-Eng.*, 2002, vol. 33, no. 5, pp. 335-342. DOI
- Krommer M., Pieber M., Vetyukov Y. Modellierung, Simulation und Schwingungsreduktion dünner Schalen mit piezoelektrischen Wandlern [Modeling, simulation and vibration reduction of thin shells with piezoelectric transducers]. *Elektrotech. Inftech.*, 2015, vol. 132, no. 8, pp. 437-447. DOI
- Thomas O., Deu J.-F., Ducarne J. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches: efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2009, vol. 80, no. 2, pp. 235-268. DOI
- Benjeddou A. Modal effective electromechanical coupling approximate evaluations and simplified analyses: numerical and experimental assessments. *Acta Mech.*, 2014, vol. 225, no. 10, pp. 2721-2742. DOI
- Karlash V.L. Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric shells of revolution (review). *Int. Appl. Mech.*, 2008, vol. 44, no. 4, pp. 361-387. DOI
- Senechal A., Thomas O., Deü J.-F., Jean P. Optimization of shunted piezoelectric patches for complex structure vibration reduction – Application to a turbojet fan blade. *Proc. of IV European Congress on Computational Mechanics (ECCM 2010), Paris, France, May 16-21, 2010. Pp. 1-2.*
- Rocha T.L., Calcada M., Silva Y.A.R. Enhancement of low-frequency sound insulation using piezoelectric resonators. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2013, vol. 35, no. 4, pp. 357-367. DOI
- Bolkisev A.M., Efimova T.L., Shul'ga N.A. Vibrations of a piezoceramic hollow cylinder under mechanical loading. *Prikladnaya Mekhanika – Int. Appl. Mech.*, 1985, vol. 21, no. 9, pp. 109-112.
- Bolkisev A.M., Shul'ga N.A. Forced vibrations of a viscoelastic piezoceramic cylinder *Prikladnaya Mekhanika – Int. Appl. Mech.*, 1986, vol. 22, no. 4, pp. 103-106.
- Karnaukhova T.V. An influence of mechanical boundary conditions on the active damping of forced bending resonant vibrations of viscoelastic isotropic rectangular plate. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2009, no. 8, pp. 58-62.
- Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1982.
- Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Electromagnetoelasticity: Piezoelectrics and electrically conductive solids*. New York: Gordon & Breach Science Publishers, 1988. 383 p.
- Karnaukhov V.G., Kirichok I.F. *Electrothermal viscoelasticity*. Kiev: Naukova dumka, 1988. 319 p.
- Ilyushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoi teorii termovyazkoupругosti* [Foundations of mathematical theory of thermal viscoelasticity]. Moscow: Nauka, 1970. 280 p.
- Popov V.P. *Osnovy teorii tsepei* [Fundamentals of circuit theory]. Moscow: Vysshaya shkola, 1985. 496 p.
- Manaeв V.I. *Osnovy radioelektroniki* [Basics of radio electronics]. Moscow: Radio i svyaz, 1985. 504 p.
- Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N. *Metody prikladnoi vyazkoupругosti* [Methods of applied viscoelasticity]. Ekaterinburg: UB RAS, 2003. 411 p.
- Matveenko V.P., Sevodin M.A., Sevodina N.V. Applications of Muller's method and the argument principle to eigenvalue problems in solid mechanics. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol.7, no. 3, pp. 331-336. DOI
- Matveenko V.P., Kligman E.P., Yurlov M.A., Yurlova N.A. Simulation and optimization of dynamic characteristics of piezoelectric smart structures. *Phys. Mesomech.*, 2012, vol. 15, no. 3, pp.190-199. DOI

Поступила в редакцию 24.10.2016; опубликована в электронном виде 30.12.2016

## Сведения об авторах

Матвеевко Валерий Павлович, д-р, акад. РАН, директор, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: mvpr@icmm.ru

Ошмарин Дмитрий Александрович, асп., ИМСС УрО РАН; e-mail: oshmarin@icmm.ru

Севодина Наталья Витальевна, нс, ктн, ИМСС УрО РАН; e-mail: natsev@icmm.ru

Юрлова Наталия Алексеевна, снс, ктн, ИМСС УрО РАН; e-mail: yurlova@icmm.ru