

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.39

УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ И ИЗОТРОПНОЙ ПОРОВАЗКОУПРУГОСТИ

И.П. Марков, А.А. Ипатов, А.А. Белов, С.Ю. Литвинчук

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

Обсуждается динамическое поведение анизотропных вязкоупругих и изотропных поровязкоупругих тел. Поровязкоупругая постановка опирается на полную модель насыщенного пороупругого тела Био. Теория Био является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды, состоящей из упругого скелета с порами и наполнителя. Применяется принцип соответствия упругой и вязкоупругой реакций. Для описания вязкоупругих свойств скелета пористого материала используется модель стандартного вязкоупругого тела. Приводится система дифференциальных уравнений для полной модели Био в преобразованиях Лапласа. Решение исходной задачи строится в пространстве преобразований Лапласа с последующим обращением интегрального преобразования с помощью численного алгоритма. Для отыскания решения в изображениях по Лапласу записывается система граничных интегральных уравнений прямого подхода. Рассматриваются регуляризованные граничные интегральные уравнения, и производится согласованное гранично-элементное разбиение для получения дискретных аналогов. Коллокационные точки решения граничного интегрального уравнения совпадают с узлами интерполяции неизвестных граничных функций. Анизотропные фундаментальные решения представляются как сумма статической и динамической частей, которые записываются в виде интегралов по единичной окружности и единичной полусфере соответственно. Численное обращение преобразования Лапласа реализуется на основе шагового по времени метода на узлах схемы Рунге–Кутты. На решении, найденном методом граничных элементов, продемонстрировано влияние вязкоупругих свойств поровязкоупругого и анизотропного вязкоупругого материалов на амплитуды и формы откликов при переходе с мгновенных модулей на длительные. Приведены численные решения задач определения волновых полей в Г-образном анизотропном вязкоупругом теле при действии силы на его торце и в поровязкоупругом кубе, содержащем сферическую полость, подверженную равномерно распределенному внутреннему давлению.

Ключевые слова: трехмерные краевые задачи, метод граничных элементов, поровязкоупругость, анизотропная вязкоупругость, обращение преобразования Лапласа, шаговый метод, схема Рунге–Кутты

BOUNDARY ELEMENT FORMULATION FOR 3D DYNAMIC PROBLEMS OF ANISOTROPIC VISCOELASTICITY AND ISOTROPIC POROVISCOELASTICITY

I.P. Markov, A.A. Ipatov, A.A. Belov and S.Yu. Litvinchuk

Research Institute for Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

The dynamic behavior of anisotropic viscoelastic and poroviscoelastic solids is considered. A poroviscoelastic formulation is based on the Biot model of fully saturated poroelastic media. The elastic-viscoelastic correspondence principle is applied to describe the viscoelastic properties of a porous material skeleton. The system of differential equations of the full Biot model in Laplace transforms and formulas for elastic modules are given. A solution to the original problem is constructed using Laplace transforms, and numerical inversion yields the solution in the time domain. The system of direct boundary integral equations is introduced, and the system of regularized boundary integral equations is considered. Discrete analogues are obtained through mixed boundary element discretizations. The collocation points of the boundary integral equation coincide with the interpolation nodes of unknown boundary functions. Anisotropic fundamental solutions are represented as a sum of static and dynamic parts expressed in terms of integrals over the unit circle and the half of the unit sphere, respectively. Numerical inversion of Laplace transform is realized at the nodes of the Runge–Kutta scheme using the time-step method. The boundary element analysis is conducted to demonstrate the influence of the viscoelastic properties of poroviscoelastic and anisotropic viscoelastic materials on the amplitude and shape of responses during the transition from instantaneous to equilibrium moduli. A numerical solution to the problem of force acting on a prismatic anisotropic viscoelastic solid is given. The problem of growing pressure in a spherical cavity inside a poroviscoelastic solid is also numerically solved.

Key words: 3D boundary-value problems, boundary element method, poroviscoelasticity, anisotropic viscoelasticity, Laplace transform inversion, time-step method, Runge–Kutta scheme

1. Введение

В различных отраслях промышленности постоянно расширяется область использования новых материалов, которые характеризуются вязкоупругим поведением и обладают ярко выраженной анизотропией механических свойств. При рассмотрении задач в рамках линейной теории анизотропной вязкоупругости получение аналитических решений возможно только для случаев с очень простыми граничными условиями, типами нагрузки (например, статической или гармонической) и геометрией задачи. Для анализа динамических задач с достаточно произвольной конфигурацией и граничными условиями общего вида под действием нестационарных нагрузок необходимо прибегать к численным методикам расчета.

К широкому классу насыщенных материалов, таких как водосодержащие грунты, наполненные нефтепродуктами скальные породы и другие образования с воздушными порами, классическая теория упругости оказалась непригодной для их корректного описания, возникла необходимость в новой теории. Начало ее развитию положили работы Дж. Френкеля [1] и М. Вiot [2] (модель Био является расширением классической теории упругости на случай двухфазной среды, состоящей из упругого скелета и жидкого или газообразного наполнителя). В последующие годы теория получила распространение на анизотропный случай и на динамику. Современное состояние вопроса можно оценить по работам [3–6].

Метод граничных элементов (МГЭ), прочно занимающий позицию после метода конечных элементов и метода конечных разностей, уверенно зарекомендовал себя как надежный, эффективный и высокоточный численный подход к решению статических и динамических задач во многих областях, в частности, при моделировании распространения волн в изотропных упругих средах [7]. Несмотря на широкое распространение при реализации динамических задач изотропной упругости, сравнительно небольшое число исследований посвящено гранично-элементному анализу краевых задач нестационарной вязкоупругости. За последние три десятилетия было предложено всего несколько различных гранично-элементных методик, учитывающих вязкоупругие свойства материала: МГЭ в пространстве Лапласа [8, 9], во временной области [10] и МГЭ на основе метода квадратур сверток [3]. Необходимо отметить, что в научной литературе авторами предлагаемой вниманию работы не найдены примеры использования прямого подхода МГЭ для анализа нестационарной динамики однородных трехмерных анизотропных вязкоупругих многосвязных тел.

2. Постановки краевых задач

2.1. Анизотропная вязкоупругость

В рамках линейной теории упругости дифференциальные уравнения движения трехмерного однородного тела, занимающего область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$, имеют вид:

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t) - \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (i, j = \overline{1,3}), \quad (1)$$

где \mathbf{x} — радиус-вектор точки с координатами (x_1, x_2, x_3) ; $u_i(\mathbf{x},t)$ — компоненты вектора перемещений (точки над символом означают дифференцирование по времени t); ρ — плотность материала; $\sigma_{ij}(\mathbf{x},t)$ — тензор напряжений, который связан с тензором малых деформаций

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x},t) + u_{j,i}(\mathbf{x},t)) \quad (2)$$

через обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x},t) \quad (i, j, k, l = \overline{1,3}), \quad (3)$$

здесь C_{ijkl} — тензор упругости.

Из (1)–(3) следуют уравнения движения в перемещениях:

$$C_{ijkl} u_{k,j}(\mathbf{x},t) - \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Для полноты постановки задачи соотношения (4) необходимо дополнить соответствующими граничными и начальными условиями:

$$u_i(\mathbf{x},t) = u_i^*(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t_i(\mathbf{x},t) = t_i^*(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad (5)$$

$$u_i(\mathbf{x},0) = \dot{u}_i(\mathbf{x},0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

где $t_i(\mathbf{x},t)$ — компоненты вектора усилий, $u_i^*(\mathbf{x},t)$ и $t_i^*(\mathbf{x},t)$ обозначают заданные перемещения и усилия на границах Дирихле (Γ_u) и Неймана (Γ_t) соответственно.

Преобразование Лапласа для функции $f(\mathbf{x},t)$ производится следующим образом:

$$\bar{f}(\mathbf{x},s) = L\{f(\mathbf{x},t)\} = \int_0^{\infty} f(\mathbf{x},t) \exp(-st) dt,$$

здесь и в дальнейшем s обозначает параметр преобразования. Преобразование (4), (5) согласно приведенной формуле и учет нулевых начальных условий (6) приводят к соотношениям вида:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \bar{u}_{k,lj}(\mathbf{x}, s) - \rho s^2 \bar{u}_i(\mathbf{x}, s) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \bar{u}_i(\mathbf{x}, s) &= \bar{u}_i^*(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \\ \bar{t}_i(\mathbf{x}, s) &= \bar{t}_i^*(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t. \end{aligned}$$

В линейной теории вязкоупругости мгновенное значение тензора напряжений для стабильной среды определяется следующим образом:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \tau)}{d\tau} d\tau, \quad (7)$$

где G_{ijkl} — тензор релаксации.

Применение преобразования Лапласа к (1), (2) и (7) дает:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij,j}(\mathbf{x}, s) - s^2 \rho \bar{u}_i(\mathbf{x}, s) &= 0, \\ \bar{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{x}, s) &= \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j}(\mathbf{x}, s) + \bar{u}_{j,i}(\mathbf{x}, s)), \\ \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, s) &= s \bar{G}_{ijkl}(s) \bar{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x}, s). \end{aligned} \quad (8)$$

Сравнение (3) и (8) позволяет сформулировать принцип соответствия упругой и вязкоупругой задач: вязкоупругие решения в изображениях по Лапласу могут быть напрямую получены из решений соответствующих краевых задач упругости при замене $C_{ijkl} \leftrightarrow s \bar{G}_{ijkl}(s)$.

2.2. Поровязкоупругость

В теории Био рассматривается полностью насыщенный материал. Пористость обозначается как $\phi = V^f/V$, где V^f — объем взаимосвязанных пор в образце объема V . Закрытые поры полагаются частью твердого тела. Насыщение считается полным при условии $V = V^f + V^s$, где V^s — объем твердого тела. Упругий скелет изотропен и однороден и характеризуется двумя константами упругого материала: объемным модулем K и модулем сдвига G .

После формального преобразования по Лапласу система дифференциальных уравнений теории Био для перемещений \bar{u}_i и порового давления \bar{p} в обозначениях обобщенных перемещений $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{p})$ в пространстве преобразований Лапласа (с параметром преобразования s) принимает вид [5]:

$$\begin{aligned} G \bar{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3} G \right) \bar{u}_{,jj} - (\alpha - \beta) \bar{p}_{,i} - s^2 (\rho - \beta \rho_f) \bar{u}_i &= -\bar{F}_i, \\ \frac{\beta}{s \rho_f} \bar{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R} \bar{p} - (\alpha - \beta) s \bar{u}_{,ii} &= -\bar{a}, \\ \beta &= \frac{k \rho_f \phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k (\rho_a + \phi \rho_f)}, \quad R = \frac{\phi^2 K_f K_s^2}{K_f (K_s - K) + \phi K_s (K_s - K_f)}, \end{aligned}$$

где G, K — модули упругости скелета; K_s — объемный модуль зерен скелета; K_f — объемный модуль наполнителя; ϕ — пористость; k — проницаемость; $\alpha = 1 - K/K_s$ — коэффициент эффективных напряжений Био; ρ, ρ_a, ρ_f — плотности скелета, присоединенной массы и наполнителя; \bar{F}_i, \bar{a} — объемные силы.

Решение задачи возможно при следующих типах граничных условий:

$$\begin{aligned} \bar{u}_l(\mathbf{x}, s) &= f_l(\mathbf{x}, s), \quad \bar{u}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{p}(\mathbf{x}, s) = f_4(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (l = \overline{1,3}), \\ \bar{t}_l(\mathbf{x}, s) &= g_l(\mathbf{x}, s), \quad \bar{t}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{q}(\mathbf{x}, s) = g_4(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad (l = \overline{1,3}), \end{aligned}$$

где Γ_u и Γ_t — части границы Γ , на которых заданы обобщенные перемещения и обобщенные поверхностные усилия; $\bar{u}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{p}(\mathbf{x}, s)$ — поровое давление; $\bar{t}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{q}(\mathbf{x}, s)$ — поток.

Поровязкоупругое решение получается из пороупругого решения согласно принципу соответствия упругой и вязкоупругой реакций.

3. Гранично-элементная дискретизация

Гранично-элементная дискретизация строится на основе регулярного представления уравнений [11]:

$$\alpha_\Omega \bar{u}_j(\mathbf{x}, s) = \int_\Gamma \left(\bar{T}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{u}_k(\mathbf{y}, s) - T_{jk}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{u}_k(\mathbf{y}, s) - \bar{U}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{t}_k(\mathbf{y}, s) \right) d\Gamma(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

где \mathbf{x} — точка коллокации; \mathbf{y} — точка наблюдения; \bar{u}_j и \bar{t}_j — обобщенные перемещения и поверхностные усилия, соответственно ($j, k = \overline{1, 3}$ в случае анизотропной вязкоупругости и $j, k = \overline{1, 4}$ в случае изотропной поровязкоупругости; \bar{U}_{jk} и \bar{T}_{jk} — соответствующие фундаментальные и сингулярные решения; T_{jk}^S — статическая часть сингулярного решения; коэффициент α_Ω равен 1 для конечной области Ω и -1 — для бесконечной области Ω).

Граничные интегральные уравнения (ГИУ) решаются численно на базе метода граничных элементов. Для дискретизации ГИУ используется метод коллокации. Для аппроксимации граничной поверхности рассмотрим ее разбиение на совокупность четырехугольных и треугольных 8-узловых биквадратичных элементов, при этом треугольные элементы считаются вырожденными четырехугольными (Рис. 1). Каждый из элементов отобразим, соответственно, на эталонный квадрат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$ либо треугольник $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$. Отображение элементов осуществим по следующей формуле:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $\beta(k, l)$ — глобальный номер узла; l — локальный номер узла в элементе k ; $N^l(\xi)$ — функции формы.

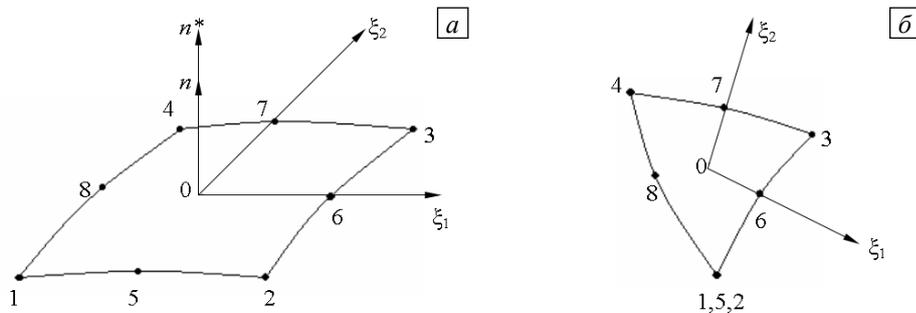


Рис. 1. Четырехугольные (а) и треугольные (б) граничные элементы

Узлы интерполяции неизвестных граничных функций являются подмножеством геометрических узлов наложенной гранично-элементной сетки. Локальная аппроксимация строится по согласованной интерполяционной модели Р.В. Гольдштейна. Согласно модели, обобщенные граничные перемещения аппроксимируются по билинейным граничным элементам, в то время как обобщенные усилия представляются на элементах постоянными. Для метода коллокации выберем множество узлов, совпадающее с множеством узлов аппроксимации исходных граничных функций. В итоге сформируются системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [11]:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha_\Omega}{2} \bar{u}_i^m + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} \bar{u}_j^{\beta(k,l)} &= \sum_{k=1}^M B_{ij}^{m,k} \bar{t}_j^k, \\ \frac{1 - \alpha_\Omega}{8} \bar{u}_i^m + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} \bar{u}_j^{\beta(k,l)} &= \sum_{k=1}^M B_{ij}^{m,k} \bar{t}_j^k, \\ A_{ij}^{m,k,l} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[R_l(\xi) \bar{T}_{ij}^m(x^m, y^k(\xi), s) - \delta_{\beta(k,l), m} \bar{T}_{ij}^S(x^m, y^k(\xi_1, \xi_2)) \right] J^k(\xi) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

$$B_{ij}^{m,k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{U}_{ij}(x^m, y^k(\xi_1, \xi_2), s) J_k(\xi) d\xi_1 d\xi_2.$$

где $R_i(\xi)$ — линейные функции формы для четырехугольного элемента; уравнения записаны соответственно в узлах аппроксимации обобщенных граничных перемещений и обобщенных поверхностных сил.

После соответствующих преобразований приходим к разрешающей СЛАУ, которая в матричной форме записывается как

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

где \mathbf{A} — полностью заполненная несимметричная матрица; \mathbf{X} — вектор неизвестных величин, в котором объединены все соответствующие компоненты искомого обобщенных граничных функций; \mathbf{B} — вектор правой части. Для получения решения в явном времени применим шаговый метод обращения преобразования Лапласа на узлах схемы Рунге–Кутты [12].

4. Фундаментальные решения

4.1. Анизотропная вязкоупругость

Используя преобразование Радона [13, 14], представим выражения трехмерных динамических фундаментальных и сингулярных решений анизотропной теории упругости в виде суммы статической и динамической частей:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) &= \bar{U}_{ij}(\mathbf{r}, s) = U_{ij}^S(\mathbf{r}) + \bar{U}_{ij}^D(\mathbf{r}, s), \\ \bar{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) &= \bar{T}_{ij}(\mathbf{r}, s) = T_{ij}^S(\mathbf{r}) + \bar{T}_{ij}^D(\mathbf{r}, s), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad r = |\mathbf{r}|, \end{aligned}$$

где \mathbf{x} — точка коллокации; \mathbf{y} — точка наблюдения; $U_{ij}^S(\mathbf{r})$, $T_{ij}^S(\mathbf{r})$ — сингулярные (статические) и $\bar{U}_{ij}^D(\mathbf{r}, s)$, $\bar{T}_{ij}^D(\mathbf{r}, s)$ — регулярные (динамические) части фундаментального решения $\bar{U}_{ij}(\mathbf{r}, s)$ и сингулярного решения $\bar{T}_{ij}(\mathbf{r}, s)$ соответственно.

Статическая часть имеет вид [12, 13]:

$$U_{ij}^S(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{D^S} \Gamma_{ij}^{-1}(\mathbf{d}) dL(\mathbf{d}),$$

$$dL(\mathbf{d}(\phi)) \in D^S = \{0 \leq \phi \leq 2\pi\},$$

$$\mathbf{d}(\phi) = [e_2 \cos \phi + e_1 e_3 \sin \phi, -e_1 \cos \phi + e_2 e_3 \sin \phi, -(1 - e_3^2) \sin \phi] / \sqrt{1 - e_3^2}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{r}/r, \quad \mathbf{e} = [e_1, e_2, e_3],$$

здесь $\Gamma_{ij}(\mathbf{d}) = C_{kijl} d_k d_l$. Область интегрирования D^S является единичной окружностью $|\mathbf{d}(\phi)| = 1$, образованной пересечением единичной сферы с центром в точке \mathbf{x} и плоскости, проходящей через точку \mathbf{x} и перпендикулярной вектору \mathbf{e} (Рис. 2). Это означает, что векторы \mathbf{e} и \mathbf{d} взаимно перпендикулярны, то есть $\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} = 0$.

Динамическая часть в изображениях по Лапласу выглядит так [13, 14]:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ij}^D(\mathbf{r}, s) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{D^R} \sum_{m=1}^3 \frac{k_m E_{im} E_{jm}}{\rho c_m^2} \exp(-k_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|) dS(\mathbf{n}), \\ dS(\mathbf{n}(b, \phi)) &\in D^R = \{0 \leq b \leq 1; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}, \\ \mathbf{n}(b, \phi) &= \sqrt{1 - b^2} \mathbf{d} + b \mathbf{e}, \end{aligned}$$

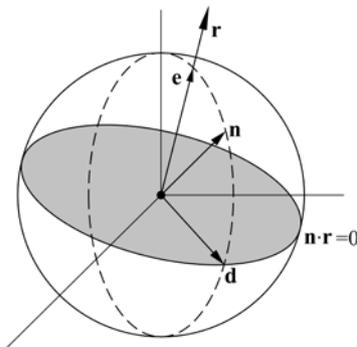


Рис. 2. Геометрическое представление некоторых переменных, используемых при интегрировании фундаментальных решений

где область интегрирования D^R — единичная полусфера $|\mathbf{n}| = 1$ с центром в точке \mathbf{x} (при этом $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} > 0$) (Рис. 2);

$c_m = \sqrt{\lambda_m/\rho}$, и $k_m = s/c_m$ — фазовые скорости упругих волн и волновые числа; λ_m, E_{jm} — собственные числа и собственные векторы матрицы $\Gamma_{ij}(\mathbf{n}) = C_{ijkl}n_k n_l$.

Сингулярные фундаментальные решения находятся по формуле:

$$\bar{T}_{jp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = C_{ijkl} \bar{U}_{kp,l} \eta_i(\mathbf{y}),$$

где $\eta_i(\mathbf{y})$ — компоненты вектора внешней единичной нормали к границе Γ в точке наблюдения \mathbf{y} .

Вязкоупругие фундаментальные и сингулярные решения строятся на основе принципа соответствия упругости и вязкоупругости.

4.2. Поровязкоупругость

Рассмотрим решение проблемы построения фундаментальных и сингулярных решений для полной модели Био. Введем матричный оператор

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} G\nabla^2 + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\partial_i\partial_j - s^2(\rho - \beta\rho_f) & -(\alpha - \beta)\partial_i \\ -s(\alpha - \beta)\partial_j & \frac{\beta}{s\rho_f}\nabla^2 - \frac{\phi^2 s}{R} \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 = \partial_i\partial_i.$$

Фундаментальное решение найдем из операторного соотношения:

$$\mathbf{B}^* \mathbf{U} + \mathbf{I}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0,$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij}^s & \bar{U}_i^f \\ \bar{P}_j^s & \bar{P}^f \end{bmatrix}$ — матрица фундаментальных решений. Можно показать [3],

что матрица фундаментальных решений принимает следующий вид:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij}^s & \bar{U}_i^f \\ \bar{P}_j^s & \bar{P}^f \end{bmatrix} = \frac{s\rho_f}{G\beta\left(k + \frac{4}{3}G\right)} \begin{bmatrix} (F\Delta + AD)\delta_{ij} - F\partial_{ij} & -A(\alpha - \beta)s\partial_i \\ -A(\alpha - \beta)\partial_j & A\left(\left(k + \frac{1}{3}G\right)\Delta + A\right) \end{bmatrix} \Psi,$$

где $F = \left(k + \frac{1}{3}G\right)D - (\alpha - \beta)^2 s$, $A = G\Delta - s^2(\rho - \beta\rho_f)$, $D = \frac{\beta}{s\rho_f}\Delta - \frac{\phi^2 s}{R}$, $\Psi = \frac{1}{4\pi r} \left[\frac{e^{-\lambda_1 r}}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)} + \frac{e^{-\lambda_2 r}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)} + \frac{e^{-\lambda_3 r}}{(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)} \right]$ (λ_i — собственные числа), Δ — оператор Лапласа. Вывод и конкретный вид компонент матрицы \mathbf{U} можно найти в [3].

Принципиальным для пороупругой динамики является тот факт, что в одной матрице у различных компонент могут быть разные особенности по координатам. Для соответствующих матриц фундаментальных и сингулярных трехмерных статических решений задач упругости, акустики и трехмерной упругой динамики все компоненты в рамках одной матрицы имеют одинаковый порядок особенности по координатам.

Гранично-интегральное уравнение динамической пороупругости можно построить исходя из объемного интеграла:

$$\int_{\Omega} \mathbf{U}^T \mathbf{B} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p} \end{bmatrix} d\Omega = 0.$$

Оно имеет следующий матричный вид [3]:

$$\int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \bar{U}_{ij}^s - \bar{P}_j^s \\ \bar{U}_i^f - \bar{P}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t}_i \\ \bar{q} \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \bar{T}_{ij}^s - \bar{Q}_j^s \\ \bar{T}_i^f - \bar{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p} \end{bmatrix} d\Gamma = - \int_{\Omega} (\mathbf{B}^* \mathbf{U})^T \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p} \end{bmatrix} d\Omega = \begin{bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{p} \end{bmatrix}.$$

Компоненты матриц – ядер интегрального представления, можно найти в [3].

Поровязкоупругие фундаментальные и сингулярные решения строятся на основе принципа соответствия задач упругости и вязкоупругости.

5. Численное обращение преобразования Лапласа

Рассмотрим функцию $f(t)$ действительного переменного t . Тогда обратное преобразование Лапласа осуществляется согласно формуле:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds,$$

где s — комплексный параметр преобразования; θ — произвольное вещественное число, выбранное таким образом, что все особые точки функции $\bar{f}(s)$ лежат правее прямой $\operatorname{Re}(z) = \theta$.

Обратимся к методу, опирающемуся на теорему об интегрировании оригинала — шаговому методу численного обращения преобразования Лапласа. Тогда интеграл $y(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ порождает задачу Коши

для обыкновенного дифференциального уравнения: $\frac{d}{dt} x(t) = sx(t) + C$, $x(0) = 0$.

Заменим интеграл квадратурной суммой, весовые множители которой определим с помощью изображения по Лапласу \bar{f} и линейного многошагового метода. Для решения получившегося уравнения прибегнем к методу Рунге–Кутты, представленному с помощью таблицы Бутчера как $\frac{\mathbf{c}|\mathbf{A}^T}{\mathbf{b}^T}$, где $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times m}$; $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^m$; T — символ операции транспонирования. В этом случае функция устойчивости запишется как

$$R(z) = 1 + z\mathbf{b}^T (\mathbf{I} - z\mathbf{A})^{-1} [\mathbf{1}], \quad \text{где } [\mathbf{1}] = (1, \dots, 1)^T.$$

Формулировка шаговой схемы будет корректной [15], если:

1. метод Рунге–Кутты A-устойчив;
2. $|R(z)| < 1$ при $y \neq 0$.
3. $R(\infty) = 0$;
4. $\exists \mathbf{A}^{-1}$.

При условии $\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} = (0, \dots, 0, 1)$ метод L-устойчив автоматически.

Решая задачу Коши методом Рунге–Кутты, с учетом [15] получим:

$$f(0) = 0, \quad f(n\Delta t) = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t) \quad (n=1, \dots, N),$$

где $\omega_n(\Delta t) = \frac{Q^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{f}(s) s e^{-inl\frac{2\pi}{L}}$; $s = \frac{\gamma(z)}{\Delta t}$; $z = \operatorname{Re} e^{i\frac{2\pi}{L}}$; N — количество шагов по времени; L — количество расчетных узлов для численного интегрирования; $\gamma(z) = \mathbf{A}^{-1} - z\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{1}]\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}$ — характеристическая функция.

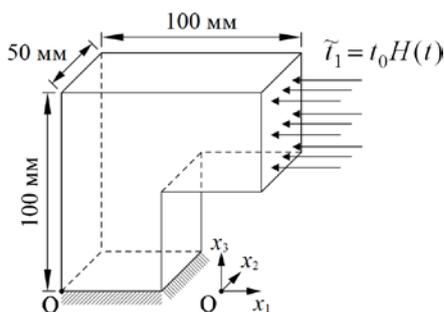


Рис. 3. Расчетная схема конструкции с условиями нагружения и закрепления

При условии того, что функция $\bar{f}(s)$ вычисляется с некоторой погрешностью ε , выбор $L = N$ и $Q^n = \sqrt{\varepsilon}$ допускает погрешность вычисления ω_n порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$.

6. Численные примеры

Чтобы протестировать численную реализацию сформулированной в рамках линейной теории вязкоупругости нестационарной задачи, решены примеры.

Пример 1. К правому торцу $x_1 = 0,1$ м Г-образного тела, жестко закрепленного на нижнем торце $x_3 = 0$ м,

приложены поверхностные усилия $\tilde{t}_1 = t_0 H(t)$, $t_0 = -1 \cdot 10^5$ Н/м², где $H(t)$ — функция Хевисайда (Рис. 3).

Для наглядности берется модельный случай, когда компоненты тензора релаксации одинаково зависят от времени согласно модели стандартного вязкоупругого тела:

$$s\bar{G}_{ijkl}(s) \rightarrow C_{ijkl}^{\infty} \left[(\beta - 1) \frac{s}{s + \gamma_1} + 1 \right], \quad \beta = C_{ijkl}^0 / C_{ijkl}^{\infty},$$

где индексами « ∞ » и «0» обозначены тензоры длительных и мгновенных модулей рассматриваемого материала, который имеет плотность $\rho = 1600$ кг/м³, параметры $\beta = 16$, $\gamma_1 = 0,1; 5; 10; 100; 500; 10000$ и

$$C^{\infty} = \begin{bmatrix} 60,23 & 18,67 & 18,96 & -7,69 & 15,60 & -25,28 \\ & 21,26 & 9,36 & -3,74 & 4,21 & -8,47 \\ & & 47,04 & -8,82 & 15,28 & -8,31 \\ & & & 10,18 & -9,54 & 5,69 \\ \text{симм.} & & & & 21,19 & -8,54 \\ & & & & & 20,75 \end{bmatrix} \text{ ГПа.}$$

Проведено исследование сеточной сходимости. В качестве иллюстрации на рисунке 4 представлены перемещения $u_2(t)$ в точке (0; 0; 0,1) м при значении $\gamma_1 = 500$, вычисленные на четырех сетках с различной степенью дискретизации (числом элементов): 224 (сетка 1), 350 (сетка 2), 504 (сетка 3) и 686 (сетка 4). Полученные результаты отчетливо показывают наличие сеточной сходимости и устойчивость численных результатов даже при небольшом числе граничных элементов. На рисунке 5 продемонстрировано влияние свойств вязкоупругого анизотропного материала на динамические отклики перемещений в процессе перехода с мгновенных модулей на длительные.

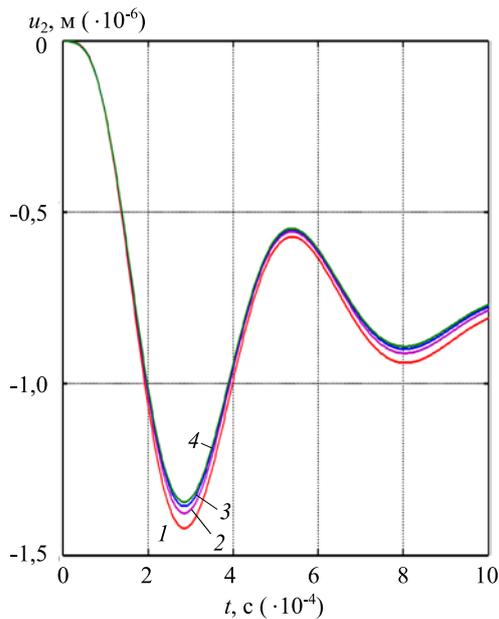


Рис. 4. Перемещения $u_2(t)$ в точке (0; 0; 0,1) м на различных сетках: 1 – сетка 1; 2 – сетка 2; 3 – сетка 3; 4 – сетка 4

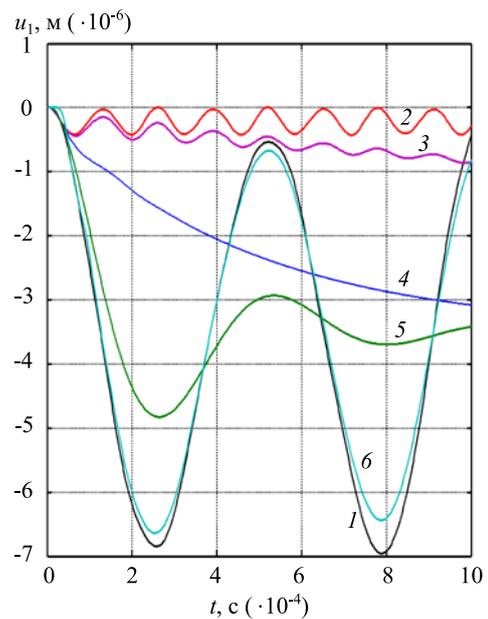


Рис. 5. Перемещения $u_1(t)$ в точке (0; 0; 0,1) м: упругое решение – (кривая 1); вязкоупругие решения при различных значениях параметра γ_1 : 0,01 (2); 5,0 (3); 50,0 (4); 500,0 (5); 10000,0 (6)

Пример 2 Рассматривается изотропный поровязкоупругий куб с ребром $L = 2$ м, содержащий сферическую полость радиусом $R = 0,5$ м (Рис. 6). Куб жестко закреплен на грани $x_3 = -1$ м, и полость подвержена равномерно распределенному внутреннему давлению:

$$P(t) = \begin{cases} P_0 t / 0,0005, & \text{для } 0 \leq t \leq 0,0005 \text{ с;} \\ P_0, & \text{для } t > 0,0005 \text{ с,} \end{cases} \quad P_0 = 10^5 \text{ Па.}$$

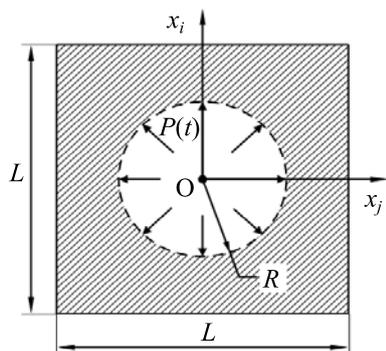


Рис. 6. Центральное сечение куба со сферической полостью

Пористый материал куба — песчаник Berea [3] с параметрами: $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$, $\phi = 0,66$, $K_s = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $K_f = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $k = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$. Вводится гранично-элементарная сетка, содержащая 432 элемента и 436 узлов.

Комплексные модули $\bar{K}(s)$ и $\bar{G}(s)$ в пространстве преобразований Лапласа для модели стандартного вязкоупругого тела имеют вид:

$$\bar{K}(s) = K^\infty \cdot \left[(\beta - 1) \frac{s}{s + \gamma} + 1 \right], \quad \bar{G}(s) = G^\infty \cdot \left[(\beta - 1) \frac{s}{s + \gamma} + 1 \right],$$

$$\beta = K^0 / K^\infty = G^0 / G^\infty.$$

На рисунке 7 представлены динамические отклики перемещений $u_3(t)$ и поровых давлений $p(t)$ в узле с координатами $(0, 0, 1) \text{ м}$. По графикам легко провести сравнение пороупругих решений с поровязкоупругими решениями, полученными по модели стандартного вязкоупругого тела со значениями параметров модели: $\beta = 2$, $\gamma_1 = 1000; 100; 1; 0,1$.

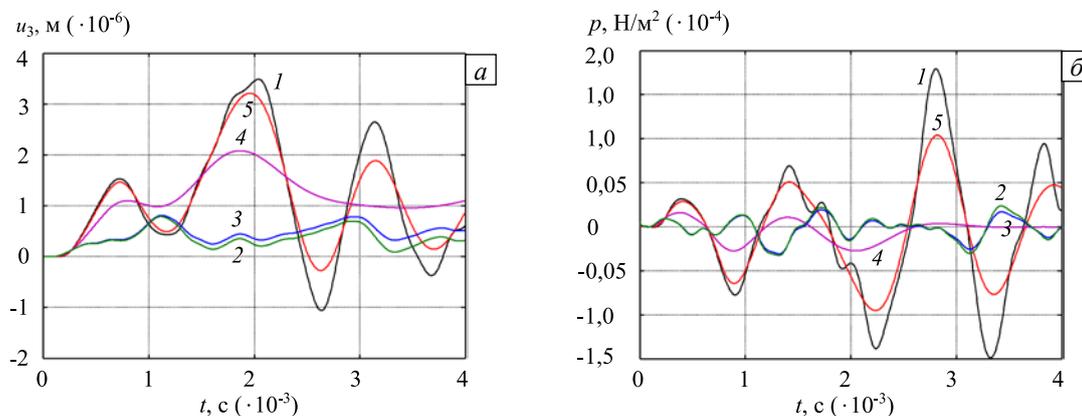


Рис. 7. Перемещения $u_3(t)$ (а) и поровые давления $p(t)$ (б) в точке $(0; 0; 1) \text{ м}$: пороупругое решение (кривые 1); поровязкоупругие решения при различных значениях параметра γ_1 : 0,01 (кривые 2); 1,0 (3); 100,0 (4); 1000,0 (5)

7. Заключение

Показано, что построенная на основе принципа соответствия задач упругости и вязкоупругости гранично-элементарная схема прямого подхода метода граничных интегральных уравнений может успешно применяться для решения нестационарных трехмерных задач линейной анизотропной вязкоупругости.

Осуществлены численные решения нестационарных задач в случаях действия силы на торец Г-образного анизотропного вязкоупругого тела и возрастающего давления в сферической полости поровязкоупругого куба. Численно выявлен и продемонстрирован графически эффект перестройки волновых полей перемещений и порового давления при переходе материала в модели стандартного вязкоупругого тела с мгновенных модулей на длительные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-38-60097 мол а_дк, 14-08-00811-а, 15-08-02817-а, 15-08-02814-а, 15-48-02333_поволжье) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых МК-5395.2016.1.

Литература

1. Frenkel J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil // J. Eng. Mech. – 2005. – Vol. 131, no. 9. – P. 879-887. DOI
2. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. – 1941. – Vol. 12, no. 2. – P. 155-164. DOI
3. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. – Berlin: Springer, 2001. – 170 p.
4. De Boer R. Highlights in the historical development of the porous media theory: toward a consistent macroscopic theory // Appl. Mech. Rev. – 1996. – Vol. 49, no. 4. – P. 201-262. DOI

5. Nikolaevskiy V.N. Biot–Frenkel poromechanics in Russia (Review) // *J. Eng. Mech.* – 2005 – Vol. 131, no. 9. – P. 888-897. DOI
6. Garg S.K., Nayfeh A.H., Good A.J. Compressional waves in fluid-saturated elastic porous media // *J. Appl. Phys.* – 1974. – Vol. 45, no. 5. – P. 1968. DOI
7. Beskos D.E. Boundary element methods in dynamic analysis: Part II (1986-1996) // *Appl. Mech. Rev.* – 1997. – Vol. 50, no. 3. – P. 149-197. DOI
8. Carini A., Gioda G. A boundary integral equation technique for visco-elastic stress analysis // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* – 1986. – Vol. 10, no. 6. – P. 585-608. DOI
9. Hwu C., Chen Y.C. Analysis of defects in viscoelastic solids by a transformed boundary element method // *Procedia Engineering.* – 2011. – Vol. 10. – P. 3038-3043. DOI
10. Sim W.J., Kwak B.M. Linear viscoelastic analysis in time domain by boundary element method // *Comput. Struct.* – 1988. – Vol. 29, no. 4. – P. 531-539. DOI
11. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
12. Игумнов Л.А., Ратаушко Я.Ю. Шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа на узлах схемы Рунге–Кутты с использованием переменного шага интегрирования // *Проблемы прочности и пластичности.* – 2013. – Т. 75, № 4. – С. 280-287.
13. Wang C.-Y., Achenbach J.D. Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids // *Geophys. J. Int.* – 1994. – Vol. 118, no. 2. – P. 384-392. DOI
14. Wang C.-Y., Achenbach J.D. Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids // *Proc. R. Soc. A.* – 1995. – Vol. 449, no. 1937. – P. 441-458. DOI
15. Banjari L., Schanz M. Wave propagation problems treated with convolution quadrature and BEM // *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.* – 2012. – Vol. 63. – P. 145-184. DOI

References

1. Frenkel J. On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil. *J. Eng. Mech.*, 2005, vol. 131, no. 9, pp. 879-887. DOI
2. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 1941, vol. 12, no. 2, pp.155-164. DOI
3. Schanz M. *Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua*. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
4. De Boer R. Highlights in the historical development of the porous media theory: toward a consistent macroscopic theory. *Appl. Mech. Rev.*, 1996, vol. 49, no. 4, pp. 201-262. DOI
5. Nikolaevskiy V.N. Biot–Frenkel poromechanics in Russia (Review). *J. Eng. Mech.*, vol. 131, no. 9, pp. 888-897. DOI
6. Garg S.K., Nayfeh A.H., Good A.J. Compressional waves in fluid-saturated elastic porous media. *J. Appl. Phys.*, 1974, vol. 45, no. 5, pp. 1968. DOI
7. Beskos D.E. Boundary element methods in dynamic analysis: Part II (1986-1996). *Appl. Mech. Rev.*, 1997, vol. 50, no. 3, pp. 149-197. DOI
8. Carini A., Gioda G. A boundary integral equation technique for visco-elastic stress analysis. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 1986, vol. 10, no. 6, pp. 585-608. DOI
9. Hwu C., Chen Y.C. Analysis of defects in viscoelastic solids by a transformed boundary element method. *Procedia Engineering*, 2011, vol. 10, pp. 3038-3043. DOI
10. Sim W.J., Kwak B.M. Linear viscoelastic analysis in time domain by boundary element method. *Comput. Struct.*, 1988, vol. 29, no. 4, pp. 531-539. DOI
11. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integral'nykh uravnenii i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoii dinamicheskoi teorii uprugosti s sopryazhennymi polyami* [Method of boundary integral equations and boundary element method for solving problems of three-dimensional dynamic theory of elasticity with adjoint fields]. Moscow: Fizmatlit, 2008. 352 p.
12. Igumnov L.A., Rataushko Ya.Yu. Time-step method of Laplace transformation numerical inversion based on the Runge–Kutta scheme nodes with a variable step of integration. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2013, vol. 75, no. 4, pp. 280-287.
13. Wang C.-Y., Achenbach J.D. Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids. *Geophys. J. Int.*, 1994, vol. 118, no. 2, pp. 384-392. DOI
14. Wang C.-Y., Achenbach J.D. Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids. *Proc. R. Soc. A*, 1995, vol. 449, no. 1937, pp. 441-458. DOI
15. Banjari L., Schanz M. Wave propagation problems treated with convolution quadrature and BEM. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, 2012, vol. 63, pp. 145-184. DOI

Поступила в редакцию 18.07.2016; опубликована в электронном виде 30.12.2016

Сведения об авторах

Марков Иван Петрович, кфмн, нс, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (НИИ механики ННГУ), 603600, Нижний Новгород, ГСП-1000, пр. Гагарина, д. 23, корп. 6; e-mail: teanku@gmail.com

Ипатов Александр Александрович, мнс, НИИ механики ННГУ; e-mail: ipatov@mech.unn.ru

Белов Александр Александрович, кфмн, снс, НИИ механики ННГУ; e-mail: belov_a2@mech.unn.ru

Литвинчук Светлана Юрьевна, кфмн, внс, НИИ механики ННГУ; e-mail: litvinchuk@mech.unn.ru