

DOI: [10.7242/1999-6691/2016.9.4.38](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.38)
УДК 532.5.032

ТРАНСЛЯЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ЖИДКОСТИ

А.А. Алабужев

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*

Рассматриваются собственные и вынужденные трансляционные колебания капли жидкости, окруженной другой жидкостью, в цилиндрическом сосуде конечного объема. В равновесном состоянии капля имеет форму цилиндра и ограничена в осевом направлении двумя параллельными твердыми поверхностями. Учитывается динамика линии контакта трех сред (капли – жидкости – твердой поверхности), а именно скорость движения контактной линии, пропорциональная отклонению краевого угла от его равновесного значения. На сосуд с каплей действует вибрационная сила, которая направлена вдоль оси симметрии капли. Показано, что основная частота трансляционной моды собственных колебаний обращается в нуль, начиная с некоторого значения параметра Хоккинга. Повышение плотности капли или радиуса сосуда приводят к росту частот собственных колебаний. Значения частот тяжелой капли (то есть капли с плотностью, большей плотности окружающей жидкости) также растут с увеличением относительного радиуса капли, а в случае легкой капли – уменьшаются. Обнаружены резонансные эффекты для вынужденных колебаний. Установлено, что амплитуда колебаний линии контакта всегда конечна, но амплитуда колебаний боковой поверхности стремится к бесконечности при предельном – нулевом – значении параметра Хоккинга. Выявлены «антирезонансные» частоты, при которых отсутствует отклонение линии контакта от равновесного положения при любых значениях параметра Хоккинга.

Ключевые слова: цилиндрическая капля, трансляционные колебания, собственные колебания, вынужденные колебания, движение линии контакта, условие Хоккинга

TRANSLATIONAL OSCILLATIONS OF A CYLINDRICAL DROP IN A BOUNDED VOLUME OF FLUID

A.A. Alabuzhev

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation
Perm State University, Perm, Russian Federation*

We consider the eigen and forced translational oscillations of a fluid drop surrounded by another fluid in a cylindrical vessel of finite volume. The drop is cylindrical in equilibrium and bounded axially by two parallel solid planes. Our approach takes into account the contact line dynamics of three continuous media (drop–liquid–solid surface), namely the velocity of the contact line proportional to the deviation of the contact angle from its equilibrium value. The Hocking’s parameter (so-called wetting parameter) is the proportionality coefficient in this case. A completely pinned contact line (so-called pinned-end edge condition) corresponds to the limiting value of Hocking’s parameter, which tends to zero. Hocking’s parameter tends to infinity in the opposite case of the fixed contact angle. The solution of the boundary value problem is found using Fourier series of Laplace operator eigen functions. The vibration force is directed along the symmetry axis of the drop. It is shown that the fundamental frequency of the translational mode of free oscillations vanishes at a critical value of Hocking’s parameter. Increasing the density of the drop or the radius of the vessel leads to the growth of the frequencies of eigenoscillations. The frequencies of the heavy drop (i.e. the drop having the density greater than that of the surrounding fluid) also increase with increasing relative radius of the drop, and for the light drop they decrease. We have revealed the existence of resonance effects for forced oscillations. The oscillation amplitude of the contact line is always finite, but the oscillation amplitude of the drop lateral surface tends to infinity in the zero limit of Hocking’s parameter. There are “anti-resonant” frequencies at which no deviation of the contact line from the equilibrium value is observed for any values of Hocking’s parameter.

Key words: cylindrical drop, translational oscillations, free oscillations, forced oscillations, dynamics of contact line, Hocking’s boundary condition

1. Введение

Внимание к поведению капиллярного моста (жидкой зоны, liquid bridge) и процессам в нем вызвано не только фундаментальным интересом [1, 2], но и прикладными задачами, такими, как выращивание кристаллов [3], электросмачивание [4], высокоскоростная печать [5] и другим. При этом одной из проблем является описание движения линии контакта трех сред: жидкости, твердой поверхности, окружающего газа (жидкости). В большинстве связанных с этим исследований рассматривается либо закрепленная линия контакта [6, 7], либо фиксированный сферой угол [8, 9]. Обзор основных методов и приближений для представления динамики контактной линии, применяемых в теории смачивания, можно найти, например, в статье [10]. В классических работах [10–12] изучено растекание жидкости, хорошо или полностью смачивающей материал подложки, для малых значений капиллярного числа $Ca = U^* \eta^* / \sigma^*$ (U^* — скорость движения контактной линии, η^* и σ^* — коэффициенты динамической вязкости и поверхностного натяжения соответственно). В последнее время удалось достигнуть значительного прогресса в понимании процессов при более интенсивном движении контактной линии, а также при конечных значениях динамического краевого угла [13–16].

Во всех перечисленных выше работах движение контактной линии по предварительно обработанной подложке считается установившимся, то есть жидкость растекается по подложке либо за счет межчастичного взаимодействия (например, ван-дер-ваальсового притяжения молекул жидкости к подложке), либо за счет статических внешних воздействий (силы тяжести, центробежной силы и других) [17, 18]. Однако в случае высокочастотного колебательного движения контактной линии ситуация отличается коренным образом, так как влияние вязкости становится существенным лишь в тонких пограничных слоях вблизи твердой поверхности, а движение контактной линии определяется в основном быстро осциллирующим полем давления [17–20]. Следовательно, можно рассматривать невязкое поведение жидкости в ядре и учитывать вязкость при этом лишь внутри динамического пограничного слоя вблизи твердой подложки. Сложные процессы, происходящие в непосредственной близости к линии контакта, исключаются с помощью эффективных граничных условий, накладываемых на динамику видимого краевого угла [17, 18].

В работах [17, 18, 21] отмечалось, что для описания динамики контактной линии одним из наиболее распространенных выражений является условие Хокинга, примененное в работе [22] для изучения стоячих волн, образующихся при движении жидкости между двумя вертикальными стенками. Данное условие предполагает линейную связь скорости движения контактной линии с отклонением краевого угла от его равновесного значения:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \Lambda^* k \cdot \nabla \zeta^*, \quad (1)$$

где ζ^* — отклонение поверхности от равновесного положения, t^* — размерное время, Λ^* — феноменологическая постоянная (параметр Хокинга), k — вектор нормали к твердой поверхности; равновесный краевой угол предполагается прямым. Отметим, что из условия (1) следуют два важных предельных случая: фиксированная контактная линия при $\partial \zeta^* / \partial t^* = 0$ и фиксированный краевой угол при $k \cdot \nabla \zeta^* = 0$. Эффективное граничное условие (1) и его модификации использовались при исследовании колебаний капиллярного моста [23], полусферической капли [17, 18, 24] и газового пузырька на подложке [25, 26], цилиндрической капли в бесконечном сосуде [21], цилиндрического газового пузырька в конечном объеме жидкости [27–32], сжатой капли [33], а также рассеивания капиллярных волн [34] и движения линии контакта по вертикальной твердой поверхности [35, 36].

В данной работе анализируются собственные и вынужденные трансляционные (перпендикулярные оси симметрии) колебания цилиндрической капли, находящейся в сосуде конечного объема с учетом эффективного граничного условия (1). Осевые колебания такой капли рассмотрены в работе [37].

2. Постановка задачи

Постановка задачи во многом повторяет постановку из работы [37]: капля несжимаемой жидкости плотностью ρ_i^* окружена другой жидкостью плотностью ρ_e^* и помещена в цилиндрический сосуд радиуса R_0^* и высотой h^* (Рис. 1). В отсутствие внешних сил капля имеет форму круглого цилиндра радиуса r_0^* . Равновесный краевой угол — угол между боковой поверхностью капли и поверхностью сосуда (дном или крышкой), является прямым. На сосуд действует вибрационная сила с частотой ω^* и амплитудой A^* , перпендикулярная оси симметрии сосуда и направленная вдоль оси Or^* .

В силу геометрической симметрии будем использовать цилиндрическую систему координат (r^*, α^*, z^*) ,

в которой боковую поверхность капли опишем функцией $r = r_0^* + \zeta^*(z^*, \alpha^*, t^*)$, где $\zeta^*(z^*, \alpha^*, t^*)$ представляет собой отклонение поверхности от равновесного положения, ось Oz^* совпадает с осью симметрии сосуда, α^* — полярный угол, t^* — время.

Выберем в качестве единиц измерения: времени — t_0^* , радиальной координаты — r_0^* , осевой координаты — h^* , отклонения поверхности — A^* , скорости — v_0^* , плотности — ρ_e^* , давления — p_0^* , где

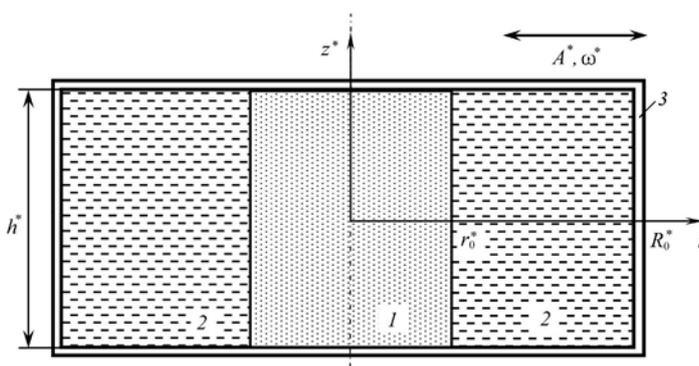


Рис. 1. Геометрия задачи: 1 – капля, 2 – жидкость, 3 – сосуд

$$t_0 = \sqrt{\rho_e^* r_0^3 / \sigma^*}, \quad v_0 = A^* \sqrt{\sigma^* / (\rho_e^* r_0^3)}, \quad p_0 = A^* \sigma^* / r_0^2,$$

σ^* — коэффициент поверхностного натяжения.

Поведение во времени рассматриваемой системы описывается следующими линейными уравнениями (задача линеаризуется по малой относительной амплитуде внешнего воздействия):

$$\Delta \varphi_j = 0, \quad p_j = -\rho_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} - \omega^2 r e^{i\omega t} \cos \alpha \right), \quad (j = i, e), \quad (2)$$

$$r = 1: \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] = 0, \quad [p] = \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (3)$$

$$z = \pm 1/2: \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$r = 1, \quad z = \pm 1/2: \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (5)$$

$$r = R_0: \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (6)$$

Краевая задача (2)–(6) содержит следующие безразмерные параметры: радиус сосуда — $R_0 = R_0^* / r_0^*$; высоту сосуда — $h = h^* / z^*$; геометрический параметр — $b = r_0^* / h^*$; параметр Хокинга — $\lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^* / \sigma^*}$; частоту внешнего воздействия — $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3} / \sigma^*}$; плотность внешней жидкости $\rho_e = \rho_e^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$; плотность жидкости в капле $\rho_i = \rho_i^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$. Безразмерные плотности связаны соотношением: $\rho_i + \rho_e = 1$. Для простоты радиальный угол α^* будем измерять в радианах и в дальнейшем опустим символ «*».

Оценим масштабы используемых величин с целью определения границ применимости принимаемых далее предположений: условие несжимаемости жидкости имеет вид: $\omega^* r_0^* \ll c^*$, где c^* — скорость звука; толщина вязкого пограничного слоя равняется $l^* = \sqrt{\nu_{i,e}^* / \omega^*}$, где $\nu_{i,e}^*$ — кинематическая вязкость жидкости. В обсуждаемом случае жидкость можно полагать невязкой, если $l^* \ll r_0^*$. Напомним, что в данной работе частота имеет масштаб $\sqrt{\sigma^* / ((\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3})}$, и, например, для капли воды в воздухе при $r_0^* = 1 \cdot 10^{-2}$ м и нормальных условиях он составляет $\sim 8,5$ Гц, следовательно, безразмерная частота $\omega = 1$ соответствует размерной частоте $\omega^* = 8,5$ Гц. Тогда для заданных параметров толщина вязкого пограничного слоя в воде есть $l^* = 3,4 \cdot 10^{-4}$ м, а $r_0^* / l^* \approx 30$, то есть жидкость можно считать невязкой. Условие несжимаемости тоже выполняется: $\omega^* r_0^* = 8,5 \cdot 10^{-2}$ м/с, $c_i^* = 1,5 \cdot 10^3$ м/с, $c_e^* = 3,4 \cdot 10^2$ м/с. Легко показать, что $\omega = 5$ отвечает $\omega^* = 42,5$ Гц, $\omega = 20$ — $\omega^* = 170$ Гц, $\omega = 50$ — $\omega^* = 425$ Гц. Для капли радиусом $r_0^* = 1 \cdot 10^{-3}$ м частота $\omega = 1$ будет отвечать размерным параметрам системы: $\omega^* = 2,7 \cdot 10^2$ Гц, $l^* = 6,1 \cdot 10^{-5}$ м, $\omega^* r_0^* = 2,7 \cdot 10^{-1}$ м/с. Для капли воды радиусом $r_0^* = 1 \cdot 10^{-2}$ м в бензоле: $\omega = 1$ соизмеряется с $\omega^* = 4,3$ Гц, $l^* = 4,8 \cdot 10^{-4}$ м, $\omega^* r_0^* = 4,3 \cdot 10^{-2}$ м/с, $c_i^* = 1,5 \cdot 10^3$ м/с, $c_e^* = 1,3 \cdot 10^3$ м/с. Из приведенных оценок следует, что для капель размером 0,1–1 см приближения несжимаемости и невязкости выполняются и являются оправданными. Отметим также, что с увеличением частоты толщина вязкого пограничного слоя будет уменьшаться.

3. Собственные колебания

Сначала рассмотрим собственные трансляционные колебания исследуемой капли жидкости. Решение краевой задачи (2)–(6) без учета внешней силы в уравнении Бернулли (2) будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа (2) с учетом граничных условий (4) и (6):

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \text{Re} \left(i\Omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k R_k^{ie}(r) \cos(2\pi k z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k^{io}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(\alpha) e^{i\Omega t} \right), \quad (7)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(i\Omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} (c_k R_k^{ie}(r) + d_k R_k^{ee}(r)) \cos(2\pi k z) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_k R_k^{io}(r) + g_k R_k^{eo}(r)) \sin((2k+1)\pi z) \right) \cos(\alpha) e^{i\Omega t} \right), \quad (8)$$

где Ω — частота собственных колебаний, i — мнимая единица, k — волновое число, $R_0^{ie}(r) = r$, $R_k^{ie}(r) = I_1(2k\pi br)$, $R_k^{io}(r) = I_1((2k+1)\pi br)$, $R_0^{ee}(r) = r^{-1}$, $R_k^{ee}(r) = K_1(2k\pi br)$, $R_k^{eo}(r) = K_1((2k+1)\pi br)$, I_1 , K_1 — модифицированные функции Бесселя, a_k , b_k , c_k , d_k , f_k , g_k — неизвестные амплитуды. Первые суммы в решении (7) и (8) содержат четные моды собственных колебаний, вторые — нечетные. Под четностью мод подразумевается четность функций (7) и (8) относительно смены знака координаты z .

Условие баланса нормальных напряжений и кинематическое условие (3) определяют общий вид функции $\zeta(z, t)$:

$$\zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} m_k \cos(2\pi k z) + \sum_{k=0}^{\infty} n_k R_k^{io}(r) \sin((2k+1)\pi z) + h_1 z + h_2 z^2 \right) \cos(\alpha) e^{i\Omega t} \right), \quad (9)$$

где m_k , n_k , h_1 , h_2 — неизвестные амплитуды. Два последних слагаемых — это частное решение условия баланса нормальных напряжений (3) для нечетных и четных мод соответственно.

Подставив решения (7)–(9) в краевую задачу (2)–(6) без неоднородного слагаемого в уравнении Бернулли (2), получим проблему собственных значений. Собственными числами являются частоты собственных колебаний Ω , которые находятся из решения следующих уравнений:

– для четных мод

$$i\Omega \left(\Omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k}{\Omega_{ek}^2 - \Omega^2} - C_0 - \frac{2b^2}{\Omega^2 H} + \frac{1}{4} \right) + \lambda = 0, \quad (10)$$

$$\Omega_{ek}^2 = \frac{4\pi^2 k^2 b^2}{\rho_i F_{ek} + \rho_e G_{ek}}, \quad F_{ek} = \frac{R_k^{ie}(1)}{R_{kr}^{ie}(1)}, \quad G_{ek} = \frac{R_{kr}^{ie}(R_0) R_k^{ee}(1) - R_k^{ie}(1) R_{kr}^{ee}(R_0)}{R_{kr}^{ie}(1) R_{kr}^{ee}(R_0) - R_{kr}^{ie}(R_0) R_{kr}^{ee}(1)},$$

$$C_0 = \frac{1}{12}, \quad C_k = \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2}, \quad H = \rho_i + \rho_e \frac{R_0^2 + 1}{R_0^2 - 1};$$

– для нечетных мод:

$$i\Omega \left(\Omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{\Omega_{ok}^2 - \Omega^2} + \frac{1}{2} \right) + \lambda = 0, \quad (11)$$

$$\Omega_{ok}^2 = \frac{(2k+1)^2 \pi^2 b^2}{\rho_i F_{ok} + \rho_e G_{ok}}, \quad F_{ok} = \frac{R_k^{io}(1)}{R_{kr}^{io}(1)}, \quad G_{ok} = \frac{R_{kr}^{io}(R_0) R_k^{eo}(1) - R_k^{io}(1) R_{kr}^{eo}(R_0)}{R_{kr}^{io}(1) R_{kr}^{eo}(R_0) - R_{kr}^{io}(R_0) R_{kr}^{eo}(1)},$$

$$S_k = \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2}.$$

Здесь: C_k и S_k — коэффициенты разложения в ряд Фурье функций z^2 и z по базисным функциям $\cos(2\pi k z)$ и $\sin((2k+1)\pi z)$ соответственно; Ω_{ok} , Ω_{ek} — частоты собственных колебаний капли со свободной контактной линией (то есть при $\lambda \rightarrow \infty$); $R_{kr}^{ie}(r) = \partial R_k^{ie}(r) / \partial r$, $R_{kr}^{ee}(r) = \partial R_k^{ee}(r) / \partial r$, $R_{kr}^{io}(r) = \partial R_k^{io}(r) / \partial r$, $R_{kr}^{eo}(r) = \partial R_k^{eo}(r) / \partial r$. Полученные уравнения (10), (11) в пределе $R_0 \rightarrow \infty$ переходят в аналогичные уравнения для частот собственных колебаний цилиндрической капли в бесконечном объеме несжимаемой жидкости [21]. Отметим также, что данные уравнения в пределе $\rho_i \rightarrow 0$ не переходят в аналогичные для цилиндрического пузырька [27]. Похожий результат получился и при рассмотрении осесимметричных колебаний цилиндрической капли [37].

Нетрудно убедиться, что уравнения (10), (11) имеют комплексные решения, причем $\operatorname{Im}(\Omega) > 0$, что означает затухание свободных колебаний. Как уже отмечалось выше, это затухание вызвано лишь

условием на линии контакта и не связано с вязкостью. Заметим также, что времена затухания имеют порядок величины, сравнимый с периодом колебаний, то есть при конечных значениях параметра смачивания капля успевает совершить только несколько колебаний.

В предельных случаях большого и малого значений параметра Хокинга λ исследование уравнений (10), (11) можно провести аналитически. Для закрепленной линии контакта, то есть при $\lambda \rightarrow 0$, частоты и декременты затухания свободных колебаний определяются из следующих уравнений:

– для четных мод

$$\operatorname{Re}(\Omega)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k}{\Omega_{ek}^2 - \operatorname{Re}(\Omega)^2} - C_0 - \frac{2b^2}{\operatorname{Re}(\Omega)^2 H} + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\operatorname{Im}(\Omega) = \lambda \left(\frac{8b^2}{\operatorname{Re}(\Omega)^2 H} + 2\operatorname{Re}(\Omega)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k}{(\Omega_{ek}^2 - \operatorname{Re}(\Omega)^2)^2} - \frac{1}{3} \right)^{-1};$$

– для нечетных мод

$$\Omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{\Omega_{ok}^2 - \Omega^2} + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\operatorname{Im}(\Omega) = \lambda \left(\operatorname{Re}(\Omega)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{(\Omega_{ok}^2 - \operatorname{Re}(\Omega)^2)^2} - 1 \right)^{-1}.$$

Для фиксированного контактного угла, то есть при $\lambda \rightarrow \infty$, частоты собственных колебаний совпадают с частотами Ω_{ok} , Ω_{ek} собственных колебаний цилиндрической капли, а декременты затухания k -й моды свободных колебаний получаются из выражений:

– для четных мод

$$\operatorname{Im}(\Omega_k) = \frac{\Omega_{ek}^2 (-1)^k C_k}{2\lambda};$$

– для нечетных мод

$$\operatorname{Im}(\Omega_k) = \frac{\Omega_{ok}^2 (-1)^k S_k}{2\lambda}.$$

При произвольном значении параметра λ уравнения (10), (11) решались численно методом двумерных секущих. Частоты четных мод (10) для удобства обозначим как Ω_{2k} ($k = 1, 2, \dots$), а частоты нечетных мод, которые являются решением уравнения (11), как Ω_{2k+1} ($k = 0, 1, \dots$). Таким образом, в дальнейшем частоты Ω_n собственных колебаний с нечетным индексом n будут соответствовать нечетным модам, а с четным n — четным.

Вынуждающая вибрационная сила в уравнении Бернулли возбуждает только четные моды собственных колебаний, поэтому далее основное внимание уделим им. На рисунке 2 показана зависимость собственной частоты $\operatorname{Re}(\Omega)$ и декремента затуханий $\operatorname{Im}(\Omega)$ нескольких первых мод от параметра Хокинга λ при различных значениях геометрического параметра b . Отметим, что у $\operatorname{Re}(\Omega)$ строится только одно решение; решение, сопряженное к нему (четное относительно оси абсцисс) на графиках не приводится. Из графиков видно, что поведение основной частоты существенно отличается от других. Частоты $\operatorname{Re}(\Omega)$ монотонно убывают с ростом λ (Рис. 2а, в), и при некотором значении параметра основная частота обращается в нуль. То есть такие «изгибные» колебания существуют только для достаточно малых λ и обусловлены сильным взаимодействием капли с подложкой. В случае фиксированного краевого угла капля свободно скользит по подложке, и колебания, сопровождающиеся движением центра масс капли, невозможны. При более высоких значениях λ возвращающая сила, действующая на каплю со стороны подложки, недостаточна для возникновения колебательного движения. В этом случае наблюдается затухающее поступательное движение капли по инерции. Декременты затухания $\operatorname{Im}(\Omega)$ максимальны при конечных значениях λ и стремятся к нулю в предельных случаях свободной и фиксированной контактной

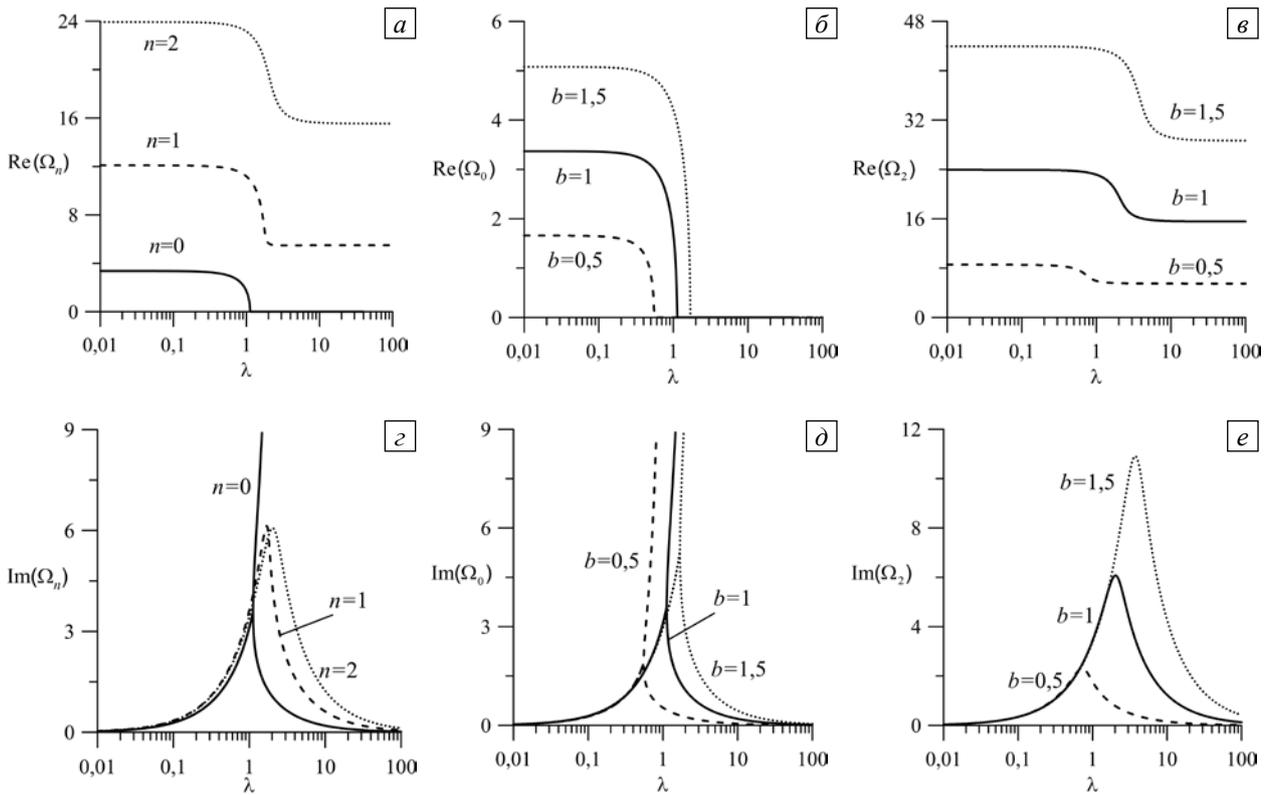


Рис. 2. Зависимость частоты $\text{Re}(\Omega)$ и декремента затухания $\text{Im}(\Omega)$ от параметра Хокинга λ при $\rho_i = 0,7$, $R_0 = 5$; на фрагментах (а, с) $b = 1$

линии (Рис. 2г, е). Однако декремент затухания $\text{Im}(\Omega_0)$ основной частоты имеет точку ветвления, после которой одна из ветвей решения очень быстро возрастает с увеличением λ (Рис. 2г, д). Именно это решение ответственно за затухание свободных колебаний с основной частотой. Аналогичная мода колебаний для цилиндрической капли в бесконечном слое жидкости была обнаружена в [21], для цилиндрического пузырька — в [29, 32] и полусферической капли на подложке — в [17].

Из рисунка 2б, в видно, что значения частоты тяжелой капли (плотность которой больше плотности окружающей жидкости) растут вслед за геометрическим параметром b . Это связано с ростом размеров капли и, как следствие, увеличением энергии, затрачиваемой на движение капли. Для легкой капли (как и для газового цилиндрического пузырька [27, 29]) частоты уменьшаются с повышением значения b . Кроме того, частота $\text{Re}(\Omega_0)$ обращается в нуль для любых значений b (Рис. 2б). В целом изменение безразмерной плотности капли ρ_i не приводит к качественному изменению спектра частот (Рис. 3). С уменьшением ρ_i в капле частота колебаний будет возрастать (см. Рис. 3а), что связано с нарастанием общей массы жидкости в системе, так как объем сосуда всегда больше объема капли.

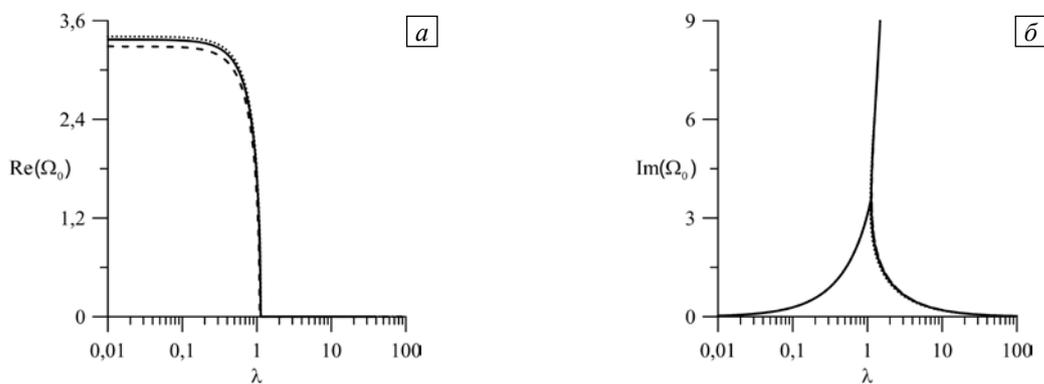


Рис. 3. Зависимость частоты $\text{Re}(\Omega_0)$ (а) и декремента затухания $\text{Im}(\Omega_0)$ (б) от параметра Хокинга λ при $R_0 = 5$ и разных значениях плотности жидкости капли ρ_i : 0,01 – пунктирная линия, 0,7 – сплошная, 0,99 – штриховая

Таким образом, наименьшие частоты вибраций имеет капиллярный мост, а наибольшие — газовый пузырек. Зависимости для декрементов затухания $\text{Im}(\Omega_0)$ при разных плотностях капли жидкости фактически совпадают друг с другом (см. Рис. 3б).

Значения частот $\text{Re}(\Omega)$ и декрементов затухания $\text{Im}(\Omega)$ слабо зависят от радиуса сосуда R_0 (Рис. 4). Например, для следующих параметров $b = 1$, $\rho_i = 0,7$, $\lambda = 0$: $\Omega_0 = 3,12$ при $R_0 = 2$, $\Omega_0 = 3,37$ при $R_0 = 5$, $\Omega_0 = 3,41$ при $R_0 = 100$. Из приведенных значений и рисунка 4а видно, что зависимость частот $\text{Re}(\Omega_0)$ от радиуса сосуда R_0 довольно быстро выходит на насыщение, и отличие Ω_0 при $\lambda = 0$, $R_0 = 5$ от Ω_0 при $\lambda = 0$, $R_0 = 100$ составляет около 1%. Частота собственных колебаний для капли любой плотности будет повышаться с увеличением радиуса сосуда, что связано с ростом объема и, следовательно, массы всей системы. Очевидно, что на значения частот одиночной капли радиус сосуда не оказывает влияния. Из формул (10), (11) для этого предельно случая, то есть при $\rho_i \rightarrow 1$, следует, что

$$\Omega_{ek}^2 \rightarrow 4\pi^2 k^2 b^2 F_{ek}^{-1}, \quad H \rightarrow 1, \quad \Omega_{ok}^2 = (2k + 1)^2 \pi^2 b^2 F_{ok}^{-1}.$$

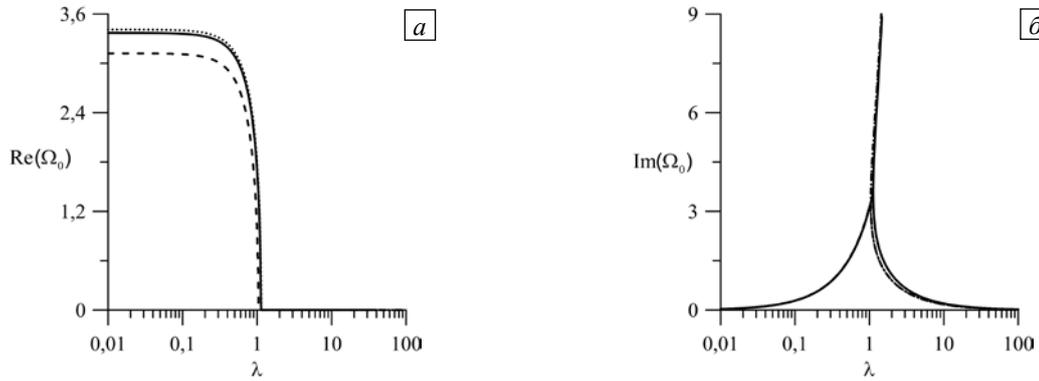


Рис. 4. Зависимость частоты $\text{Re}(\Omega_0)$ (а) и декремента затухания $\text{Im}(\Omega_0)$ (б) от параметра Хокинга λ при $\rho_i = 0,7$ и разных значениях радиуса сосуда R_0 : 2 – штриховая линия, 5 – сплошная, 100 – пунктирная

4. Вынужденные колебания

Рассмотрим теперь вынужденные трансляционные колебания цилиндрической капли в сосуде конечного объема. Решение полной краевой задачи (2)–(6), как и в случае собственных колебаний, будем искать в виде ряда Фурье по четным собственным функциям оператора Лапласа (2) с учетом граничных условий (4) и (6):

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \text{Re} \left(i \sum_{k=0}^{\infty} A_k R_k^{ie}(r) \cos(2\pi k z) \cos(\alpha) e^{i\omega t} \right), \quad (12)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \text{Re} \left(i \sum_{k=0}^{\infty} (B_k R_k^{ie}(r) + C_k R_k^{ee}(r)) \cos(2\pi k z) \cos(\alpha) e^{i\omega t} \right), \quad (13)$$

$$\zeta(\alpha, z, t) = \text{Re} \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos(2\pi k z) + H_2 z^2 \right) \cos(\alpha) e^{i\omega t} \right). \quad (14)$$

Подставив решения (12)–(14) в уравнения (2)–(6), получим выражения для неизвестных амплитуд A_k , B_k , C_k , D_k и H :

$$B_0 = \frac{1}{R_0^2} C_0, \quad B_k = -C_k \frac{R_{kr}^{ee}(R_0)}{R_{kr}^{ie}(R_0)}, \quad C_0 = -\frac{R_0^2}{R_0^2 - 1} A_0, \quad C_k = A_k \frac{R_{kr}^{ie}(1) R_{kr}^{ee}(R_0)}{R_{kr}^{ee}(1) R_{kr}^{ie}(R_0) - R_{kr}^{ie}(1) R_{kr}^{ee}(R_0)}, \quad (15)$$

$$A_0 = D_0 + G_0 H_2, \quad A_k = \frac{1}{R_{kr}^{ie}(1)} (D_k + G_k H_2), \quad (16)$$

$$D_0 = \frac{\omega^2 (\rho_i - \rho_e) - 2b^2 H_2}{\omega^2 H} - G_0 H_2, \quad D_k = \frac{\omega^2 G_k H_2}{\Omega_{ek}^2 - \omega^2}, \quad (17)$$

$$H_2 = -\frac{(\rho_i - \rho_e)H^{-1}}{\frac{1}{6} - \frac{2b^2}{\omega^2 H} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k G_k}{\Omega_{ek}^2 - \omega^2} - \frac{i\lambda}{\omega}}, \quad G_0 = \frac{1}{12}, \quad G_k = \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2}, \quad (18)$$

где G_k — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции z^2 по базисным функциям $\cos(2\pi kz)$.

Для простоты введем обозначения для максимального отклонения боковой поверхности от равновесного значения на пластине с координатой $z = 0,5$ — $\zeta_s = \max(\zeta|_{z=0,5})$ и в центре слоя — $\zeta_0 = \max(\zeta|_{z=0})$, для максимального отклонения краевого угла γ от его положения равновесия на пластине — $\delta = \max(\gamma - \pi/2)|_{z=0,5}$.

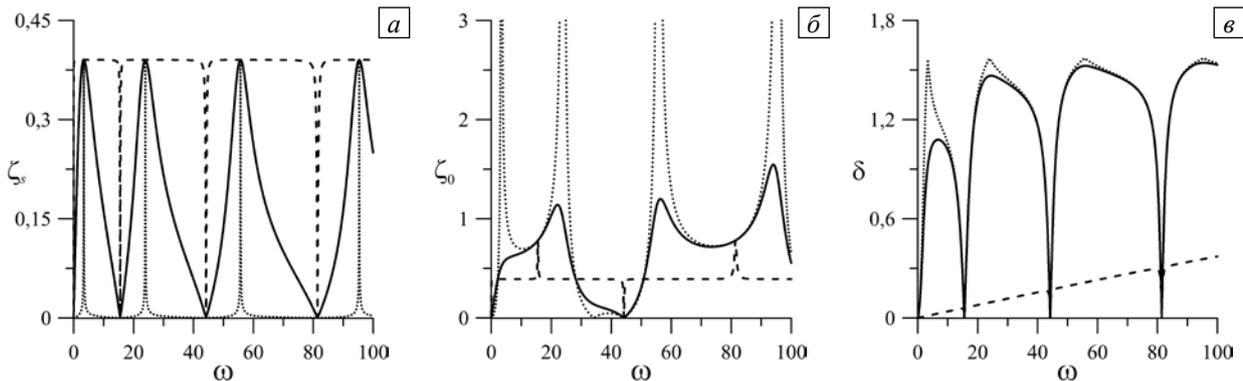


Рис. 5. Зависимость отклонений линии контакта ζ_s (а), боковой поверхности ζ_y (б) и отклонения δ краевого угла (в) от частоты внешних вибраций ω при $R=5$, $\rho_i=0,7$, $b=1$ и разных значениях параметра Хокинга λ : 0,01 – пунктирная линия, 1 – сплошная, 100 – штриховая

На рисунке 5 показаны зависимости ζ_s , ζ_0 и δ от частоты вибраций ω для трех характерных значений параметра Хокинга λ , а на рисунках 6, 7 — эволюция профиля боковой поверхности при $\alpha = 0$ и краевого угла для разных значений частоты вибраций ω и параметра λ . Из представленных графиков на рисунках 5 и 6 видно, что максимальные амплитуды колебаний боковой поверхности (Рис. 5а, б, Рис. 6а) и краевого угла (Рис. 5в, Рис. 6в) достигаются в случаях линейного резонанса, то есть при совпадении частоты вибраций с одной из частот собственных колебаний. Кроме того, имеются «антирезонансные» частоты — частоты вибраций, при которых линия контакта не движется при любых значениях параметра λ (Рис. 5а, Рис. 6б), а краевой угол не изменяется (Рис. 5в, Рис. 6в). Первый резонансный максимум отсутствует как для $\lambda=1$, так и для $\lambda=100$ (Рис. 5б), что связано с исчезновением частоты нулевой моды собственных колебаний (Рис. 2б), однако имеется для случая $\lambda=0,01$.

При конечных значениях параметра λ амплитуды отклонений боковой поверхности и линии контакта конечны (Рис. 5а, б, Рис. 7а, б), краевой угол меняется в пределах $[0, \pi/2]$ (Рис. 5в, Рис. 7в).

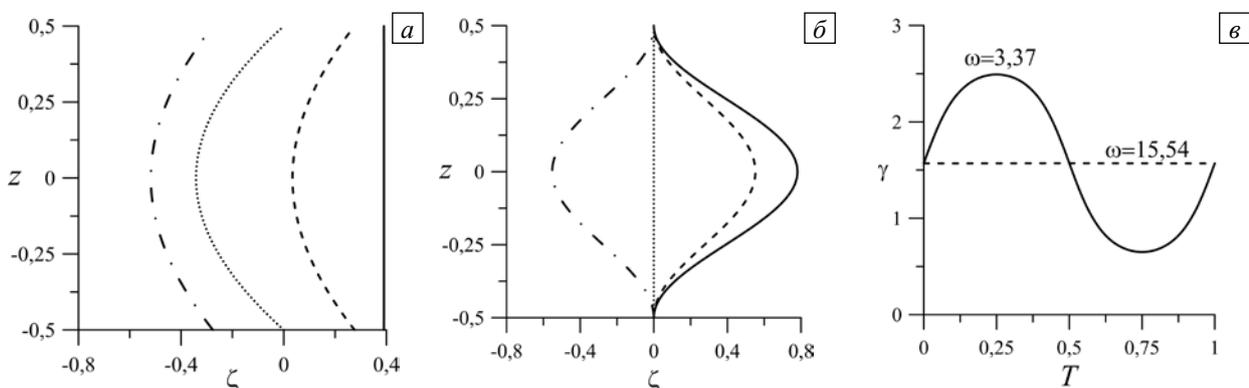


Рис. 6. Форма боковой поверхности (а, б) в разные моменты периода колебаний T : $t=0$ – сплошная линия, $t=T/8$ – штриховая, $t=T/4$ – пунктирная, $t=3T/8$ – штрих-пунктирная, а также значения краевого угла γ (в) в зависимости от времени при резонансной и «антирезонансной» частотах вибраций, ω : $\omega=3,37$ (а), $\omega=15,54$ (б); $R=5$, $\rho_i=0,7$, $b=1$, $\lambda=1$

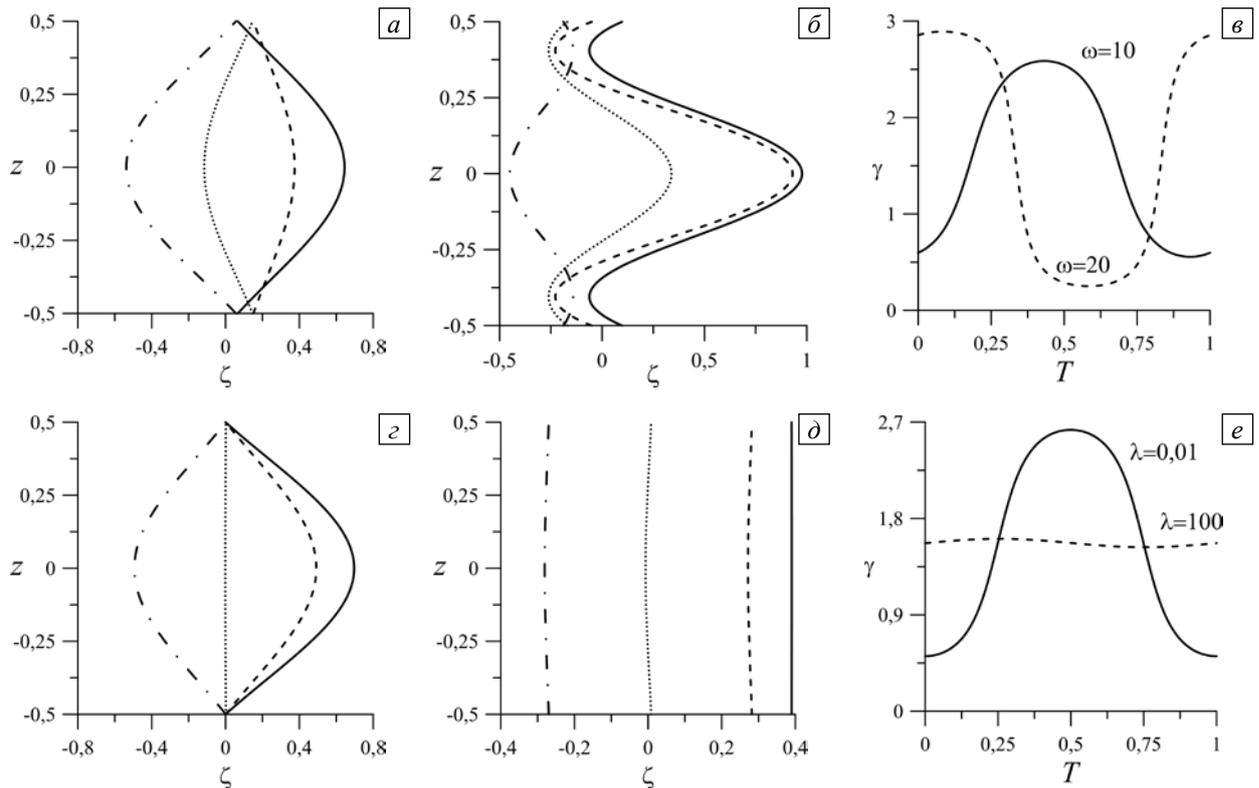


Рис. 7. Форма боковой поверхности (а, б, з, д) в разные моменты периода колебаний T : 0 – сплошная линия, $T/8$ – штриховая, $T/4$ – пунктирная, $3T/8$ – штрих-пунктирная, а также значения краевого угла γ (е, е) в зависимости от времени при разных значениях частоты вибраций ω : (а-б) – $\lambda=1$, (з-е) – $\omega=10$, а – $\omega=10$, б – $\omega=20$, з – $\lambda=0,01$, д – $\lambda=100$; $R=5$, $\rho_i=0,7$, $b=1$

Выше отмечалось, что внешняя вибрационная сила возбуждает только четные гармоники колебаний боковой поверхности капли. Из рисунка 5а и 7а видно, что при значении ω , меньшем первой «антирезонансной» частоты, возбуждается нулевая мода (Рис. 7а), а при значениях ω из интервала от первой до второй «антирезонансных» частот — вторая (первая четная) мода (Рис. 7б). Соответственно, при ω , лежащем между второй и третьей «антирезонансными» частотами будет возбуждаться четвертая (вторая четная) мода и так далее. Таким образом, колебания боковой поверхности капли описываются уравнением стоячей волны.

В предельном случае малых значений λ , когда диссипация мала, а взаимодействие линии контакта с твердой подложкой велико, амплитуда отклонения боковой поверхности стремится к бесконечности (Рис. 5б) при резонансных частотах. При этом отклонение линии контакта незначительно (Рис. 5а, Рис. 7з), а краевой угол меняется в пределах $[0, \pi/2]$ (Рис. 5в, Рис. 7е). В другом предельном случае, при больших значениях λ , линия контакта слабо взаимодействует с твердой поверхностью, поэтому форма боковой поверхности капли незначительно меняется с координатой z , за исключением резонансных случаев (Рис. 5а, б, Рис. 7д), а краевой угол фактически постоянен (Рис. 7е). При больших значениях λ капля совершает твердотельное движение, а колебания формы являются существенными лишь вблизи резонансных частот и остаются при этом конечными. Отклонение краевого угла (Рис. 5в) медленно нарастает с ростом частоты вибраций ω , то есть с увеличением вибрационного ускорения. Это видно из выражения (18) для H_2 : при больших значениях λ и ω имеем $H_2 \sim \omega/\lambda$. В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ для амплитуд функции поверхности (17), (18) получим

$$D_0 = (\rho_i - \rho_e)H^{-1}, \quad D_k = 0, \quad H_2 = 0,$$

то есть форма боковой поверхности капли (14) не зависит от координаты z , и краевой угол не изменяется. В предельном случае сосуда бесконечного объема $R_0 \rightarrow \infty$: $D_0 = (\rho_i - \rho_e)$, что совпадает с результатами работы [8].

На рисунке 8 показаны зависимости амплитуды поверхности ζ_s от частоты вибраций ω для различных значений плотности капли ρ_i и радиуса сосуда R_0 . В этом случае они и зависимости отклонения краевого угла от частоты вибраций качественно походят на графики, приведенные на рисунке 5а.

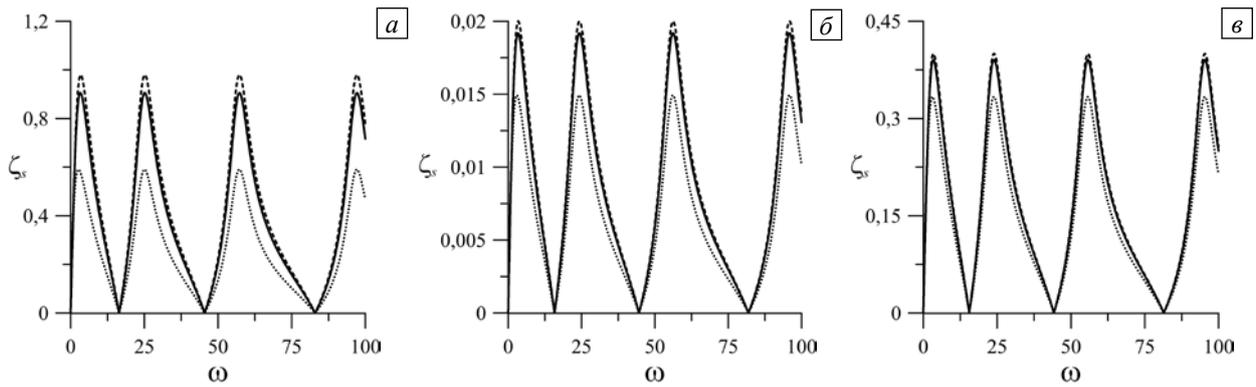


Рис. 8. Зависимость отклонения линии контакта ζ_s от частоты внешних вибраций ω при $\lambda=1$, $b=1$ и разных значениях плотности капли ρ_i ($\rho_i=0,01$ (а), $\rho_i=0,49$ (б), $\rho_i=0,7$ (в)) и радиуса сосуда R_0 : 2 – пунктирная линия, 5 – сплошная, 100 – штриховая

При исследовании собственных колебаний было показано, что изменение плотности качественно не сказывается на спектре частот (Рис. 3). Однако, как следует из выражений (17) и (18) для амплитуд D_k и H_2 , влияние вибрационной силы, действующей на каплю, будет нулевым при равенстве плотностей капли ρ_i и окружающей жидкости ρ_e , и максимальным в предельных случаях $\rho_i=1$, $\rho_e=0$ или $\rho_i=0$, $\rho_e=1$ (см. значения амплитуд на рисунках 8а и 8б).

Изменение радиуса сосуда также не оказывает существенного влияния на поведение капли, но с его увеличением повышаются собственные частоты капли (Рис. 4), а в предельном случае одиночной капли (очень тяжелой, $\rho_i \gg \rho_e$), значение радиуса сосуда не влияет на величину частоты. Из выражения для коэффициентов (10), (17), (18) легко показать, что в случае очень тяжелой капли получается:

$$H \rightarrow \rho_i, \quad \Omega_{ek}^2 \rightarrow \frac{4\pi^2 k^2 b^2}{\rho_i F_{ek}}, \quad D_0 = 1 - (2b^2 + G_0)H_2, \quad H_2 = - \left(\frac{1}{6} - \frac{2b^2}{\omega^2 \rho_i} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k G_k}{\Omega_{ek}^2 - \omega^2} - \frac{i\lambda}{\omega} \right)^{-1},$$

то есть функция $\zeta(\alpha, z, t)$ (14) не зависит от радиуса сосуда R_0 .

На рисунке 8в показаны амплитуды отклонения линии контакта от равновесного положения для «среднего» значения плотности капли $\rho_i=0,7$, в отличие от легкой капли $\rho_i=0,01$ на рисунке 8а и от капли с плотностью $\rho_i=0,49$, близкой к плотности окружающей жидкости, на рисунке 8б. В подтверждение выше сказанного из приведенных графиков видно, что максимальная амплитуда наблюдается в случае легкой капли (Рис. 8а), при близких плотностях она минимальна (Рис. 8б), а при «средней» плотности капли — принимает промежуточные значения (Рис. 8в). При любом значении плотности наибольшее отклонение характерно для бесконечного сосуда (Рис. 8).

На рисунке 9 представлены зависимости ζ_s , ζ_0 и δ от частоты вибраций ω для трех значений геометрического параметра b . Из представленных графиков видно, что с увеличением величины b растут значения резонансных частот (Рис. 2б, Рис. 9а, б) и амплитуд в середине слоя (Рис. 9б).

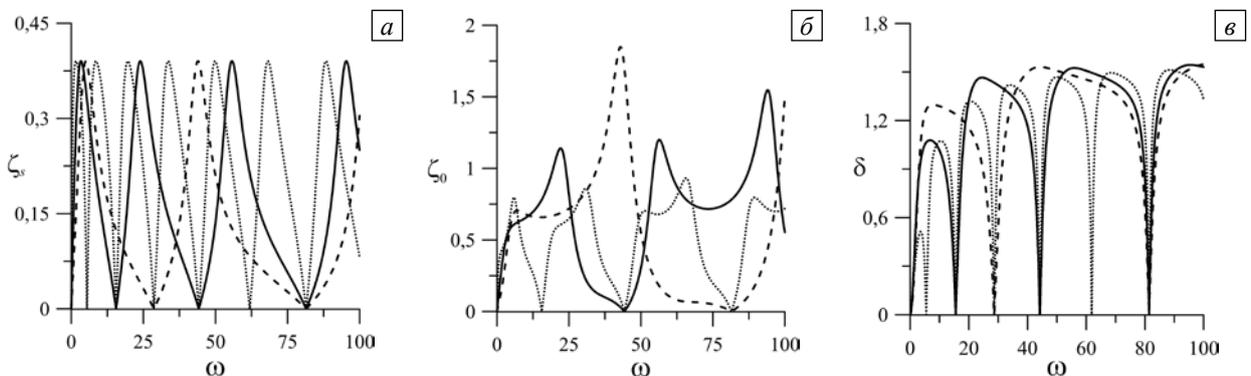


Рис. 9. Зависимость отклонений линии контакта ζ_s (а), боковой поверхности ζ_q (б) и отклонения δ краевого угла (в) от частоты внешних вибраций ω при $R=5$, $\rho_i=0,7$, $\lambda=1$ и разных значениях геометрического параметра b : 0,5 – пунктирная линия, 1 – сплошная, 1,5– штриховая

5. Заключение

В данной работе рассмотрены собственные и вынужденные колебания цилиндрической капли в сосуде конечного объема в условиях трансляционных вибраций. Учитывалось движение линии контакта трех сред (капля – твердая поверхность – окружающая жидкость) с помощью эффективного граничного условия Хокинга [22], согласно которому скорость движения контактной линии пропорциональна отклонению краевого угла между боковой поверхностью капли и твердой поверхностью.

При изучении собственных колебаний, как и в других работах с учетом условия Хокинга (например [17, 25, 21–37]), увеличение параметра Хокинга λ приводит к уменьшению частоты свободных колебаний. Наибольшую частоту имеет капля с фиксированной линией контакта, наименьшую — с фиксированным краевым углом. Однако частота главной (нулевой четной) моды собственных колебаний обращается в нуль, начиная с некоторой величины λ . Это, критическое, значение λ зависит от параметров задачи. Во всех вышеперечисленных случаях граничное условие на контактной линии приводит к затуханию колебаний, за исключением двух предельных случаев: закрепленной линии контакта и фиксированного краевого угла. Нулевой частоте главной моды соответствует точка ветвления решения для декремента затухания свободных колебаний.

Значения частот собственных колебаний тяжелой капли (то есть капли плотностью, большей плотности окружающей жидкости) растут вслед за геометрическим параметром b . Это связано с увеличением размеров капли и, как следствие, с нарастанием энергии, затрачиваемой на движение капли. Для легкой капли (как и для газового цилиндрического пузырька [27, 29]) частоты уменьшаются с наращиванием b . Аналогично, значения частот собственных колебаний повышаются с ростом плотности капли или радиуса сосуда.

При исследовании вынужденных колебаний показано, что в большом диапазоне значений параметра λ капля совершает твердотельное движение, а колебания боковой поверхности капли описываются уравнением стоячей волны и являются существенными лишь вблизи резонансных частот. При малых значениях λ , то есть при слабой диссипации энергии, амплитуда отклонения боковой поверхности велика и стремится к бесконечности в пределе $\lambda \rightarrow 0$. Амплитуда колебаний линии контакта конечна при любых значениях λ .

Обнаружено, что при вариации плотности капли максимальная амплитуда колебаний имеет место либо в случае одиночной капли, либо невесомого пузырька. При равенстве плотностей система движется целиком как твердое тело. При изменении же радиуса сосуда R максимальная амплитуда достигается в пределе $R \rightarrow 0$. Наблюдаются «антирезонансные» частоты, то есть такие частоты вибраций, при которых линия контакта не движется при любых значениях параметра λ , а краевой угол не изменяется.

В целом, с одной стороны, трансляционные колебания отличаются от осевых колебаний, рассмотренных в [37], тем, что, во-первых, при осесимметричных вибрациях по боковой поверхности капли могла распространяться бегущая волна; во-вторых, присутствует нулевая «изгибная» мода (пусть и на некотором отрезке значений λ), которой нет при осевых колебаниях несжимаемой капли. С другой стороны, при высоких частотах (то есть при частотах, больших частоты основной моды) и малых значениях λ колебания боковой поверхности при осевых и трансляционных колебаниях качественно совпадают. В обоих случаях существуют частоты вибраций, при которых линия контакта неподвижна при любых λ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант 14-21-00090).

Литература

1. Henderson D.M., Miles J.W. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 275. – P. 285-299. DOI
2. Slobozhanin L.A., Shevtsova V.M., Alexander J.I.D., Meseguer J., Montanero J.M. Stability of liquid bridges between coaxial equidimensional disks to axisymmetric finite perturbations: A review // Microgravity Sci. Technol. – 2012. – Vol. 24, no. 2. – P. 65-77. DOI
3. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Иванцов А.О. Влияние вибраций на гидродинамику расплава при выращивании кристаллов бесконтактным методом Бриджмена // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 52-62. DOI
4. Mampallil D., Eral H.B., Staicu A., Mugele F., van den Ende D. Electrowetting-driven oscillating drops sandwiched between two substrates // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 88. – 053015. DOI
5. Kumar S. Liquid transfer in printing processes: liquid bridges with moving contact lines // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2015. – Vol. 47. – P. 67-94. DOI
6. Картавых Н.Н., Шкляев С.В. О параметрическом резонансе полуцилиндрической капли на осциллирующей твердой подложке // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2007. – № 1(6). – С. 23-28.
7. Демин В.А. К вопросу о свободных колебаниях капиллярного моста // МЖГ. – 2008. – № 4. – С. 28-37. (English version DOI).
8. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях // МЖГ. – 2005. – № 2. – С. 18-28. (English version DOI).
9. Иванцов А.О. Акустические колебания полусферической капли // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2012. – № 3. – С. 16-23.

10. Де Жен П.Ж. Смачивание: статика и динамика // УФН. – 1987. – Т. 151, № 4. – С. 619-681. (English version [DOI](#)).
11. Воинов О.В. Гидродинамика смачивания // МЖГ. – 1976. – № 5. – С. 76-84. (English version [DOI](#)).
12. Dussan V.E.B. On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1979. – Vol. 11. – P. 371-400. [DOI](#)
13. Shikhmurzaev Yu.D. Dynamic contact angles and flow in vicinity of moving contact line // AIChE Journal. – 1996. – Vol. 42, no. 3. – P. 601-612. [DOI](#)
14. Veretennikov I., Indeikina A., Chang H.-C. Front dynamics and fingering of a driven contact line // J. Fluid Mech. – 1998. Vol. 373. – P. 81-110. [DOI](#)
15. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J., Rolley E. Wetting and spreading // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81. – P. 739-805. [DOI](#)
16. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions // Annu. Rev. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 45. – P. 269-292. [DOI](#)
17. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Шкляев С.В. Неосесимметричные колебания полусферической капли // МЖГ. – 2004. – № 6. – С. 8-20. (English version [DOI](#)).
18. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyayev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate // Phys. Fluids. – 2006. – Vol. 18. – 012101. [DOI](#)
19. Пухначев В.В., Семенова И.Б. Модельная задача о внезапном движении линии трехфазного контакта // ПМТФ. – 1999. – Т. 40, № 4. – С. 51-61. (English version [DOI](#)).
20. Shklyayev S., Khenner M., Alabuzhev A.A. Enhanced stability of a dewetting thin liquid film in a single-frequency vibration field // Phys. Rev. E. – 2008. – Vol. 77. – 036320. [DOI](#)
21. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 78-86. [DOI](#)
22. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 179. – P. 253-266. [DOI](#)
23. Borkar A., Tsamopoulos J. Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges // Phys. Fluids A. – 1991. – Vol. 3, no. 12. – P. 2866-2874. [DOI](#)
24. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // Phys. Fluids. – 2009. – Vol. 21. – 072104. [DOI](#)
25. Shklyayev S., Straube A.V. Linear oscillations of a compressible hemispherical bubble on a solid substrate // Phys. Fluids. – 2008. – Vol. 20. – 052102. [DOI](#)
26. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // Phys. Fluids. – 2011. – Vol. 23. – 102105. [DOI](#)
27. Алабужев А.А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 151-161. [DOI](#)
28. Кайсина М.И. Азимутальные моды собственных колебаний цилиндрического пузырька // Вестник ПГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 2(29). – С. 37-45.
29. Алабужев А.А., Кайсина М.И. Трансляционная мода собственных колебаний цилиндрического пузырька // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2015. – № 1(29). – С. 35-41.
30. Алабужев А.А., Кайсина М.И. Влияние движения линии контакта на осесимметричные колебания цилиндрического пузырька // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2015. – № 2(30). – С. 56-68.
31. Алабужев А.А., Кайсина М.И. Собственные азимутальные колебания цилиндрического пузырька в сосуде конечного объема // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2015. – № 3(31). – С. 38-47.
32. Alabuzhev A.A., Kaysina M.I. The translational oscillations of a cylindrical bubble in a bounded volume of a liquid with free deformable interface // Journal of Physics: Conference Series. – 2016. – Vol. 681. – 012043. [DOI](#)
33. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на колебания сжатой капли // ПМТФ. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 12-23. (English version [DOI](#)).
34. Zhang L., Thiessen D.B. Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 719. – P. 295-313. [DOI](#)
35. Ting C.-L., Perlin M. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation // J. Fluid Mech. – 1995. – Vol. 295. – P. 263-300. [DOI](#)
36. Perlin M., Schultz W.W., Liu Z. High Reynolds number oscillating contact lines // Wave Motion. – 2004. – Vol. 40, no. 1. – P. 41-56. [DOI](#)
37. Алабужев А.А. Продольные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2016. – Т. 9, № 3. – С. 316-330. [DOI](#)

References

1. Henderson D.M., Miles J.W. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line. *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 275, pp. 285-299. [DOI](#)
2. Slobozhanin L.A., Shevtsova V.M., Alexander J.I.D., Meseguer J., Montanero J.M. Stability of liquid bridges between coaxial equidimensional disks to axisymmetric finite perturbations: A review. *Microgravity Sci. Technol.*, 2012, vol. 24, no. 2, pp. 65-77. [DOI](#)
3. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Ivantsov A.O. Influence of vibrations on hydrodynamics of melt during Bridgman crystal growth. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 52-62. [DOI](#)
4. Mampallil D., Eral H.B., Staicu A., Mugele F., van den Ende D. Electrowetting-driven oscillating drops sandwiched between two substrates. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, 053015. [DOI](#)
5. Kumar S. Liquid transfer in printing processes: liquid bridges with moving contact lines. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2015, vol. 47, pp. 67-94. [DOI](#)

6. Kartavyh N.N., Shklyayev S.V. About parametrical resonance of semicylindrical drop on oscillating solid plane. *Vestnik PGU. Seriya: Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2007, no. 1, pp. 23-28.
7. Demin V.A. Problem of the free oscillations of a capillary bridge. *Fluid Dyn.*, 2008, vol. 43, no. 4, pp. 524-532. DOI
8. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Behavior of a cylindrical drop under multi-frequency vibration. *Fluid Dyn.*, 2005, vol. 40, no. 2, pp. 183-192. DOI
9. Ivantsov A.O. Acoustic oscillations of semispherical drop. *Vestnik PGU. Seriya: Fizika. – Bulletin of Perm State University. Physics*, 2012, no. 3, pp. 16-23.
10. De Gennes P.G. Wetting: statics and dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 1985, vol. 57, pp. 827-863. DOI
11. Voinov O.V. Hydrodynamics of wetting. *Fluid Dyn.*, 1976, vol. 11, no. 5, pp. 714-721. DOI
12. Dussan V.E.B. On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1979, vol. 11, pp. 371-400. DOI
13. Shikhmurzaev Yu.D. Dynamic contact angles and flow in vicinity of moving contact line. *AIChE Journal*, 1996, vol. 42, no. 3, pp. 601-612. DOI
14. Veretennikov I., Indeikina A., Chang H.-C. Front dynamics and fingering of a driven contact line. *J. Fluid Mech.*, 1998, vol. 373, pp. 81-110. DOI
15. Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J., Rolley E. Wetting and spreading. *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, pp. 739-805. DOI
16. Snoeijer J.H., Andreotti B. Moving contact lines: scales, regimes, and dynamical transitions. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2013, vol. 45, pp. 269-292. DOI
17. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyayev S.V. Non-axisymmetric oscillations of a hemispherical drop. *Fluid Dyn.*, 2004, vol. 39, no. 6, pp. 851-862. DOI
18. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyayev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, 012101. DOI
19. Pukhnachev V.V., Semenova I.B. Model problem of instantaneous motion of a three-phase contact line. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1999, vol. 40, no. 4, pp. 594-603. DOI
20. Shklyayev S., Khenner M., Alabuzhev A.A. Enhanced stability of a dewetting thin liquid film in a single-frequency vibration field. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 77, 036320. DOI
21. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 686-693. DOI
22. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 253-266. DOI
23. Borkar A., Tsamopoulos J. Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges. *Phys. Fluids A*, 1991, vol. 3, no. 12, pp. 2866-2874. DOI
24. Fayzrakhmanova I. S., Straube A. V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, 072104. DOI
25. Shklyayev S., Straube A.V. Linear oscillations of a compressible hemispherical bubble on a solid substrate. *Phys. Fluids.*, 2008, vol. 20, 052102. DOI
26. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Phys. Fluids*, 2011, vol. 23, 102105. DOI
27. Alabuzhev A.A. Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 151-161. DOI
28. Kaysina M.I. Azimuthal modes of eigen oscillations of a cylindrical bubble. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanic. Computer Science*, 2015, no. 2, pp. 37-45.
29. Alabuzhev A.A., Kaysina M.I. Translational mode of eigen oscillations of a cylindrical. *Vestnik PGU. Seriya: Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2015, no. 1, pp. 35-41.
30. Alabuzhev A.A., Kaysina M.I. Influence of contact line motion on axisymmetric vibrations of a cylindrical bubble. *Vestnik PGU. Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2015, no. 2, pp. 56-68.
31. Alabuzhev A.A., Kaysina M.I. Eigen azimuthal oscillations of cylindrical bubble in a vessel of finite size. *Vestnik PGU. Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2015, no. 3, pp. 38-47.
32. Alabuzhev A.A., Kaysina M.I. The translational oscillations of a cylindrical bubble in a bounded volume of a liquid with free deformable interface. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 681, 012043. DOI
33. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Effect of the contact-line dynamics on the oscillations of a compressed droplet. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2012, vol. 53, no. 1, pp. 9-19. DOI
34. Zhang L., Thiessen D.B. Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines. *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 719, pp. 295-313. DOI
35. Ting C.-L., Perlin M. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 295, pp. 263-300. DOI
36. Perlin M., Schultz W.W., Liu Z. High Reynolds number oscillating contact lines. *Wave Motion*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 41-56. DOI
37. Alabuzhev A.A. Axisymmetric oscillations of a cylindrical drop in the final volume of fluid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 316-330. DOI

Поступила в редакцию 27.07.2016; опубликована в электронном виде 30.12.2016

Сведения об авторе

Алабужев Алексей Анатольевич, кфмн, снс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: alabuzhev@icmm.ru