

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.37
УДК 539.3

ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ТОНКУЮ СФЕРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

А.В. Вестяк¹, Л.А. Игумнов², Д.В. Тарлаковский^{1,3}, Г.В. Федотенков¹

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

²Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

³Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

Решена нестационарная задача для тонкой упругой сферической оболочки, заполненной упругой средой, при воздействии на нее внешнего давления. Для описания движения оболочки использованы уравнения модели С.П. Тимошенко, а для заполнителя – уравнения теории упругости, записанные в потенциалах упругих смещений согласно представлению Кельвина. Предполагается, что контакт между оболочкой и заполнителем происходит в условиях свободного проскальзывания. На основании принципа суперпозиции получено разрешающее интегральное соотношение, связывающее нормальные перемещения заполненной оболочки с внешним давлением. Ядром этого соотношения служит функция влияния, которая представляет собой нормальные перемещения оболочки с заполнителем, являющиеся решением задачи при воздействии на оболочку мгновенного сосредоточенного внешнего давления и математически выражаемого посредством дельта-функций Дирака. Для построения функции влияния используется аппарат разложений в ряды Фурье по собственным функциям задач для оболочки и заполнителя. Выполнение неполного разделения переменных приводит к системе уравнений, которая содержит подсистему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов рядов разложений перемещений оболочки, а также подсистему уравнений в частных производных для коэффициентов рядов, в которые раскладываются потенциалы упругих смещений в заполнителе. Связь этих подсистем осуществляется через условия контакта между оболочкой и заполнителем. Для определения коэффициентов рядов разложений применяется интегральное преобразование Лапласа по времени. В итоге задачи сводятся к решению системы алгебраических уравнений для оболочки и системы обыкновенных дифференциальных уравнений для заполнителя. Решения последних с учетом условий на границе контакта и записи модифицированной функции Бесселя первого рода через элементарные функции приводит к выражениям для изображений коэффициентов разложения искомой функции влияния в ряд. Получение оригиналов коэффициентов осуществляется аналитически путем разложения в ряды по экспонентам. Найденная функция влияния и построенное разрешающее интегральное соотношение используются далее для решения некоторых тестовых задач. При этом соответствующие интегралы вычисляются аналитически. Представлены графические результаты расчетов с оценкой сходимости в зависимости от количества удерживаемых членов ряда в разложении функции влияния.

Ключевые слова: нестационарные задачи, сферическая оболочка, упругий заполнитель, функция влияния, принцип суперпозиции, нестационарное давление

THE INFLUENCE OF NON-STATIONARY PRESSURE ON A THIN SPHERICAL SHELL WITH AN ELASTIC FILLER

A.V. Vestyak¹, L.A. Igumnov², D.V. Tarlakovskii^{1,3} and G.V. Fedotenkov¹

¹Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian Federation

²Research Institute for Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

³Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

This article considers the non-stationary problem of a thin elastic spherical shell filled with an elastic medium under external pressure. The equations of Timoshenko's model serve as the basis for describing the motion of the spherical shell. The reaction of the elastic filler is described by the equations of the theory of elasticity. The contact between the shell and the filler is assumed frictionless. Based on the principle of superposition, we have obtained an integral relationship between the normal displacements of the shell with filler and the external pressure to solve the problem. The kernel of this integral relationship is an influence function. This function is, in fact, the normal displacements of the shell with filler taken as a solution to the problem of the concentrated instantaneous external pressure effect. It is modeled by the use of Dirac delta functions. To get the influence function, the authors have applied a Fourier series expansion in terms of eigenfunctions of shell and filler sub-problems. A partial separation of variables leads to a system of differential equations for expansion series coefficients. Due to the substitution of the corresponding expansions into the equations of motion of shells, the system contains ordinary differential equations and partial differential equations with respect to the expansions coefficients of elastic displacement potentials in the filler. The relationship between these systems is governed by the contact conditions between the shell and the filler. To determine the series expansion coefficients, we have produced the Laplace transform in the time domain. As a result, the problem is reduced to solving the systems of algebraic and ordinary differential equations. The solution to these equations, taking into account contact conditions, leads to the expressions describing the coefficients for series expansion of the desired influence function. This is achieved through the relation between the modified Bessel functions of the first kind and the elementary functions. We have found the coefficients in the time domain analytically using exponent series expansions. The influence function and the integral relationship are used to solve a set of test problems. Analytical calculations of the corresponding integrals are carried out. The results of calculations are represented graphically with an assessment of their convergence based on the number of coefficients of series expansions of the influence functions.

Key words: non-stationary problem, elastic spherical shell, elastic filler, influence function, superposition principle, time-dependent pressure

1. Введение

Нестационарная динамика сплошных сред является одним из наиболее сложных разделов механики. Актуальность ее изучения обусловлена тем, что все природные явления, как известно, являются

нестационарными. Часто используемые понятия статических и стационарных процессов являются не более чем приближением (как правило, оправданным) реальных явлений. Во многих же случаях учет динамических свойств среды, как качественный, так и количественный, просто необходим. Изучение нестационарных процессов является важным для современной космической и авиационной техники, судостроения, строительства инженерных сооружений и другого. Различные аспекты решения нестационарных задач для тел и конструкций (создание математических моделей взаимодействия, теоретических и численных методов исследования динамики, в том числе для упругих оболочек) изложены в монографиях А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского [1, 2], А.С. Вольмира [3, 4], А.Н. Гузя, В.Д. Кубенко [5], В.Б. Поручикова [6], Л.И. Слепяна [7], Л.И. Слепяна, Ю.С. Яковлева [8].

С вопросами нестационарной динамики упругих оболочек приходится сталкиваться в самых разнообразных областях [9–26]. Нестационарные динамические задачи находят практическое приложение в аэрокосмической, автомобилестроительной и судостроительной отраслях промышленности. От их успешного решения зависит дальнейшее развитие различных наук: аэрогидродинамики, контактных задач, акустики, прикладной и вычислительной математики и других.

Следует отметить, что за последние годы в связи с бурным развитием вычислительных технологий появилось множество работ, как отечественных, так и зарубежных, в которых нестационарные задачи решаются с применением численных алгоритмов, основанных на методах конечных и граничных элементов. К настоящему времени их количество настолько выросло, что не имеет смысла приводить здесь какие-либо конкретные работы. Следует отметить, что к этим методам прибегают для решения самых разнообразных задач механики и вообще физики.

Однако необходимо понимать, что дискретные и бессеточные методы не являются панацеей. Во-первых, они ограничиваются возможностями компьютерной техники. Во-вторых, при моделировании сложных объектов неизбежно накапливаются погрешности, обусловленные неточностями конечно-элементной аппроксимации и самих расчетных моделей, приближенно поставленными граничными условиями и другим. В-третьих, для достижения адекватных результатов численного решения и контроля точности моделирования использование универсальных численных методов обязательно должно сопровождаться исследованием вопросов точности, устойчивости и сходимости. Строгое доказательство сходимости того или иного метода, как правило, сопряжено на практике с преодолением математических сложностей. В связи с этим построение аналитических решений и разработка эффективных численно-аналитических методов решения нестационарных задач механики имеет большое теоретическое и прикладное значение.

В настоящей работе предложена аналитическая методика решения нестационарной задачи для оболочки с заполнителем. Она основана на использовании метода функций влияния, согласно которому, сначала аналитическими методами строится фундаментальное решение (функция влияния) для оболочки с заполнителем. Затем, согласно принципу суперпозиции, задача сводится к разрешающему интегральному соотношению. Во многих случаях с помощью аналитических методов оно позволяет получить приближенное решение, либо построить высокоэффективные численно-аналитические алгоритмы расчета. Созданная методика может служить основой для разработки математических постановок и методов решения новых нестационарных контактных задач, например при ударе, в которых ударником является заполненная сплошной средой оболочка, а также задач аэрогидроупругости, акустики и дифракции.

2. Постановка задачи

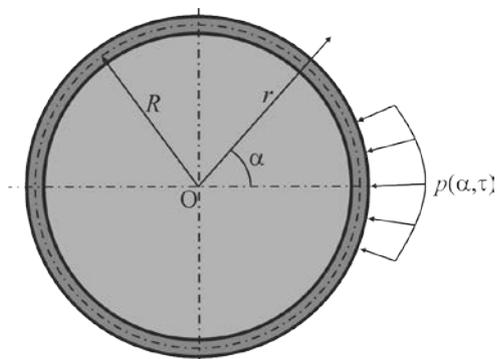


Рис. 1. Схема к постановке задачи

Рассматривается тонкая упругая сферическая оболочка радиусом R и толщиной h , заполненная сплошной упругой средой. В начальный момент времени $\tau = 0$ к ней прикладывается внешнее локально распределенное давление p , симметричное относительно оси оболочки (Рис. 1).

Для описания движения оболочки используются уравнения модели С.П. Тимошенко [9]. В сферической системе координат $O r \alpha$ с центром на оси оболочки они имеют вид:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{w} = (u, w, \chi)^T, \quad \mathbf{p} = (0, p, 0)^T. \quad (1)$$

Здесь: u, w — касательные и нормальные перемещения оболочки; χ — угол поворота волокна, нормального к срединной поверхности, до деформирования за счет сдвиговых деформаций; точками над величиной обозначены производные по времени; символ «Т» указывает на операцию

транспонирования; $\mathbf{L} = (L_{ij})_{3 \times 3}$ — матрица размерностью 3×3 , элементами которой являются дифференциальные операторы $L_{11} = l_2 - \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \eta^2(2 - k^2)$, $L_{12} = [2(1 - \eta^2) + \eta^2 k^2] \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha}$, $L_{13} = -\gamma^2 l_2 + \eta^2 k^2$, $L_{21} = -[2(\eta^2 - 1) + \eta^2 k^2] l_1$, $L_{22} = \eta^2 k^2 l_2 - 4(1 - \eta^2)$, $L_{23} = \eta^2 k^2 l_1$, $L_{31} = \gamma^2 L_{13}$, $L_{32} = -\gamma^2 \eta^2 k^2 \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha}$, $L_{33} = -L_{31}$, $l_1 = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha} + \text{ctg} \alpha$, $l_2 = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial \alpha} \text{ctg} \alpha$, $k^2 = \frac{5}{6}$, при этом аргументом (\cdot) служат перемещения u, w и угол поворота χ , соответственно, при индексе $j = 1, 2, 3$; η и γ — безразмерные параметры.

Движение заполнителя описывается уравнениями теории упругости в потенциалах перемещений относительно сферической системы координат (Рис. 1):

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \beta_1^2 \Delta \phi, & \ddot{\psi} &= \eta_1^2 \Delta \psi - \frac{\Psi}{r^2 \sin^2 \alpha}, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \text{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ϕ, ψ — скалярный потенциал и ненулевая компонента векторного потенциала.

Все величины и параметры приведем к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} u &= \frac{u'}{R}, & w &= \frac{w'}{R}, & u_r &= \frac{u'_r}{R}, & u_\alpha &= \frac{u'_\alpha}{R}, & r &= \frac{r'}{R}, & \tau &= \frac{c_1 t}{R}, & \gamma^2 &= \frac{h^2}{12R^2}, & \eta^2 &= \frac{c_2^2}{c_1^2}, & \eta_1^2 &= \frac{c_{21}^2}{c_1^2}, & \beta_1^2 &= \frac{c_{11}^2}{c_1^2}, \\ c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, & c_2^2 &= \frac{\mu}{\rho}, & c_{11}^2 &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, & c_{21}^2 &= \frac{\mu_1}{\rho_1}, & p &= \frac{p'}{\sigma}, & \sigma &= 2\sqrt{3}(\lambda + 2\mu)\gamma, & \sigma_{rr} &= \frac{\sigma'_{rr}}{\sigma}, & \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{\sigma'_{\alpha\alpha}}{\sigma}, \\ \sigma_{r\alpha} &= \frac{\sigma'_{r\alpha}}{\sigma}, & \phi &= \frac{\phi'}{R^2}, & \psi &= \frac{\psi'}{R^2}, & \Phi &= \frac{\phi'}{R^2}, & \kappa_1 &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\sigma}, & \kappa_2 &= \frac{\lambda_1}{\sigma}, & \kappa_3 &= \kappa_1 - \kappa_2, & \kappa_4 &= \kappa_1 + \kappa_2, \end{aligned}$$

где t — размерное время; u_r, u_α — радиальные и угловые перемещения заполнителя; c_1, c_{11} — размерные скорости волн растяжения–сжатия в оболочке и заполнителе соответственно; c_2, c_{21} — размерные скорости волн сдвига в оболочке и заполнителе; ρ и ρ_1 — размерные плотности материала оболочки и заполнителя; λ, μ и λ_1, μ_1 — упругие постоянные Ламе материала оболочки и заполнителя; $\sigma_{rr}, \sigma_{r\alpha}, \sigma_{\alpha\alpha}$ — ненулевые компоненты тензора напряжений; другие размерные параметры помечены штрихом; перемещения и напряжения в заполнителе связаны с упругими потенциалами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \psi \text{ctg} \alpha \right), & u_\alpha &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} - \psi \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r}, & \sigma_{rr} &= \kappa_1 \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\kappa_2}{r} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + 2u_r + u_\alpha \text{ctg} \alpha \right), \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{\kappa_1}{r} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + u_r \right) + \kappa_2 \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\alpha}{r} \text{ctg} \alpha + \frac{u_r}{r} \right), & \sigma_{r\alpha} &= \frac{\kappa_3}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{r} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагаем, что контакт между оболочкой и заполнителем происходит в условиях свободного проскальзывания, тогда граничные условия принимают вид:

$$u_r|_{r=1} = w, \quad \alpha \in [0, \pi]; \quad \sigma_{r\alpha}|_{r=1} = 0, \quad \alpha \in [0, \pi]. \quad (4)$$

Считаем также, что в центре оболочки возмущения ограничены.

Замкнем задачу однородными начальными условиями:

$$u|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \chi|_{\tau=0} = \phi|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{u}|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \dot{\chi}|_{\tau=0} = \dot{\phi}|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

3. Разрешающее интегральное соотношение

Решения неоднородных начально-краевых или краевых задач зависят от вида правых частей операторов, порождающих уравнения движения, а также от начальных и граничных условий. Поэтому при

заданных операторах желательно иметь некие специальные функции (функции влияния), с помощью которых можно найти решения неоднородных задач с произвольными правыми частями.

Зададим функцию влияния для оболочки с заполнителем как нормальные перемещения оболочки $w = G_2(\alpha, \vartheta, \tau)$, являющиеся решениями задачи (1)–(5) при воздействии мгновенного сосредоточенного нормального давления p_0 :

$$p_0 = \delta(\tau)\delta(\alpha - \vartheta), \quad (6)$$

где $\delta(\tau)$ и $\delta(\alpha - \vartheta)$ — дельта-функции Дирака.

Согласно принципу суперпозиции [1, 2, 7–9, 19, 20] нормальные перемещения оболочки связаны с действующим на нее давлением посредством интегрального оператора

$$w(\alpha, \tau) = 2\pi \int_0^\tau \int_0^{\vartheta(t)} G_2(\alpha, \vartheta, \tau - t) p(\vartheta, t) \sin \vartheta d\vartheta dt. \quad (7)$$

Интегральное соотношение (7) и является разрешающим для поставленной задачи.

4. Функция влияния для оболочки с заполнителем

Чтобы получить функцию влияния для оболочки с заполнителем, требуется определить нормальные перемещения $w = G_2(\alpha, \vartheta, \tau)$ как решение уравнений (1) при заданном внешнем давлении вида (6) с учетом внутреннего давления со стороны заполнителя. Таким образом, в (1) необходимо положить

$$p = p_0 - p_r, \quad p_r = \sigma_{rr}|_{r=1},$$

где p_r — реакция заполнителя. В этом случае для оболочки обозначим тангенциальные перемещения и угол поворота нормали к ее срединной поверхности как $u = G_1(\alpha, \vartheta, \tau)$ и $\chi = G_3(\alpha, \vartheta, \tau)$.

Для построения функции влияния $G_2(\alpha, \vartheta, \tau)$ применим метод разделения переменных. Представим заданные и искомые функции в виде рядов Фурье по полиномам Лежандра $P_n(x)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x) = dP_n(x)/dx$:

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_3 \\ \psi \\ u_\alpha \\ \sigma_{r\alpha} \end{bmatrix} = -\sin \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} G_{1n}(\vartheta, \tau) \\ G_{3n}(\vartheta, \tau) \\ \psi_n(r, \vartheta, \tau) \\ u_{\alpha n}(r, \vartheta, \tau) \\ \sigma_{r\alpha n}(r, \vartheta, \tau) \end{bmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \alpha), \quad \begin{bmatrix} G_2 \\ p_0 \\ \varphi \\ u_r \\ \sigma_{rr} \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} G_{2n}(\vartheta, \tau) \\ p_{0n}(\vartheta, \tau) \\ \varphi_n(r, \vartheta, \tau) \\ u_{rn}(r, \vartheta, \tau) \\ \sigma_{rrn}(r, \vartheta, \tau) \end{bmatrix} P_n(\cos \alpha), \quad (8)$$

$$p_{0n} = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \vartheta) \delta(\tau).$$

Как следует из соотношений (3), коэффициенты разложений (8) связаны между собой согласно формулам:

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r} \psi_n, & u_{\alpha n} &= \frac{\varphi_n - \psi_n}{r} - \frac{\partial \psi_n}{\partial r}, \\ \sigma_{rm} &= \kappa_1 \frac{\partial u_m}{\partial r} + \frac{\kappa_2}{r} [2u_m - n(n+1)u_{\alpha n}], & \sigma_{r\alpha n} &= \kappa \left(\frac{\partial u_{\alpha n}}{\partial r} + \frac{u_m - u_{\alpha n}}{r} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (8) в (1) и применяя к полученным уравнениям преобразование Лапласа по времени, приходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений $G_{1n}^L(\vartheta, s)$, $G_{2n}^L(\vartheta, s)$, $G_{3n}^L(\vartheta, s)$ (верхний индекс «L» означает, что это изображение функции по Лапласу, s — параметр преобразования). В результате решения системы находим выражение для G_{2n}^L :

$$G_{2n}^L = G_{21n}^L - G_{22n}^L, \quad (10)$$

где

$$G_{21n}^L = \frac{2n+1}{2} Q(s^2, n_1^2) P_n(\cos \vartheta), \quad G_{22n}^L = p_m^L Q(s^2, n_1^2), \quad Q(s^2, n_1^2) = \frac{\sum_{j=0}^2 S_j(s^2, n_1^2)}{\sum_{j=0}^3 T_j(s^2, n_1^2)},$$

$$S_0(s, n_1) = k_3^2(k_1^2 + k_2^2),$$

$$S_1(s, n_1) = s(k_1^2 - k_3^2) + n_1[(\gamma^2 - 1)k_3^2 + k_1^2 + k_2^2],$$

$$S_2(s, n_1) = -[s + n_1(1 + \gamma)][s + n_1(1 - \gamma)],$$

$$T_0(s, n_1) = a^2 S_0(s, n_1),$$

$$T_1(s, n_1) = s[k_1^2(k_3^2 + a^2) + k_3^2(k_2^2 - a^2)] + n_1\{k_3^2 k_1^4 + [(k_2^2 - 4 + \eta^2 k^2)k_3^2 + a^2 - 2\eta^2 k^2 + 2k_2^2]k_1^2 +$$

$$+ [(\eta^2 k^2 - 2)k_2^2 + (\gamma^2 - 1)a^2 - 2\eta^2 k^2 + 4]k_3^2 + (a^2 - 4)k_2^2\},$$

$$T_2(s, n_1) = s^2(k_1^2 - k_3^2 - a^2) + sn_1[k_1^4 + (\eta^2 k^2 - 3)k_1^2 + (\gamma^2 - 1)k_3^2 - 2(a^2 - \eta^2 k^2) + k_2^2 + 4] +$$

$$+ n_1^2\{k_1^4 + [\gamma^2(2 + k_3^2) + 2(\eta^2 k^2 - 2)]k_1^2 + \gamma^2 k_3^2(\eta^2 k^2 - 2) + \eta^2 k^2 k_2^2 + (\gamma^2 - 1)(a^2 - 4)\},$$

$$T_3(s, n_1) = S_2(s, n_1)(s + \eta^2 k^2 n_1).$$

Здесь введены обозначения: $n_1^2 = n(n+1)$, $k_1^2 = \eta^2(2 - k^2)$, $k_2^2 = \eta^2(k^2 - 2\gamma^2)$, $k_3^2 = \eta^2(k^2\gamma^2 - 2)$, $a^2 = 4(1 - \eta^2)$, $p_m^L = \sigma_{rm}^L|_{r=1}$.

Отметим, что первое слагаемое в (10) является функцией влияния для оболочки без заполнителя, а второе характеризует вклад заполнителя. При этом изображение G_{21n}^L по структуре представляет собой правильную рациональную дробь, и при заданных параметрах задачи с помощью известной из курса операционного исчисления второй теоремы разложения для преобразования Лапласа его оригинал определяется аналитически.

Подстановка (8) в (2) и преобразование Лапласа по времени приводят для заполнителя к следующей задаче относительно коэффициентов рядов (8):

$$\frac{s^2}{\beta_1^2} \varphi_n^L = \Delta_n \varphi_n^L, \quad \frac{s^2}{\eta_1^2} \psi_n^L = \Delta_n \psi_n^L, \quad \Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}, \quad (11)$$

$$u_m^L|_{r=1} = G_{2n}^L, \quad \sigma_{ran}^L|_{r=1} = 0. \quad (12)$$

Ограниченные при $r \rightarrow 0$ решения уравнений (11) имеют вид [1]:

$$\varphi_n^L = \frac{f_n(s)}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(\xi), \quad \psi_n^L = \frac{q_n(s)}{\sqrt{r}} I_{n+1/2}(\zeta), \quad \xi = rs/\beta_1, \quad \zeta = rs/\eta_1, \quad (13)$$

где $f_n(s)$, $q_n(s)$ — некоторые произвольные функции, а $I_\nu(z)$ — модифицированная функции Бесселя первого рода (функция Инфельда), которая при $\nu = n + 1/2$ записывается через элементарные функции следующим образом [1]:

$$I_{n+1/2}(z) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi} z^{n+1/2}} [e^z R_{n0}(-z) - e^{-z} R_{n0}(z)], \quad (14)$$

$$R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{2^k k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n), \quad A_{nk} = 0 \quad (k < 0, k > n).$$

Из (9) и (13) следуют выражения для u_m^L и σ_{ran}^L , после подстановки которых в граничные условия (12), учета (14) и некоторых выкладок находим функции $f_n(s)$ и $q_n(s)$. Полагая в формуле для σ_{rm}^L из (9) $r = 1$, приходим к представлению для p_m^L . В итоге изображение G_{22n}^L принимает вид:

$$G_{22n}^L = \frac{2n+1}{2} Q^2(s^2, n_1^2) \frac{D_n(s)}{\Delta_n(s)} P_n(\cos \vartheta),$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_n(s) &= 1 + M_{1n}(s)e^{-2\omega_1 s} + M_{2n}(s)e^{-(\omega_1 + \omega_2)s} + M_{3n}(s)e^{-(\omega_1 - \omega_2)s}, \\
D_n(s) &= L_{1n}(s) + L_{2n}(s)e^{-2\omega_1 s} - L_{3n}(s)e^{-(\omega_1 + \omega_2)s} - L_{4n}(s)e^{-(\omega_1 - \omega_2)s}, \\
M_{1n}(s) &= \frac{M_n(\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad M_{2n}(s) = -\frac{M_n(-\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad M_{3n}(s) = -\frac{M_n(\xi_0, -\zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \\
L_{1n}(s) &= \frac{L_n(-\xi_0, -\zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad L_{2n}(s) = \frac{L_n(\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad L_{3n}(s) = \frac{L_n(-\xi_0, \zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \quad L_{4n}(s) = \frac{L_n(\xi_0, -\zeta_0)}{M_n(-\xi_0, -\zeta_0)}, \\
L_n(x, y) &= R_{n2}(y)\tilde{R}_{n2}(x) - 2R_{n1}(x)\tilde{R}_{n1}(y), \quad M_n(x, y) = R_{n4}(x)R_{n2}(y) - 2R_{n1}(x)R_{n3}(y), \\
R_{n1}(s) &= R_{n+1,0}(s) - nR_{n0}(s), \quad R_{n2}(s) = R_{n+2,0}(s) - (2n+1)R_{n+1,0}(s) + 2n(n+1)R_{n0}(s), \\
\tilde{R}_{n1}(s) &= \kappa_3 n(n+1)R_{n+1,0}(s) - \kappa_3 n(n^2 - 1)R_{n0}(s), \\
\tilde{R}_{n2}(s) &= \kappa_1 R_{n+2,0}(s) - (\kappa_1(2n+1) + 2\kappa_2)R_{n+1,0}(s) + n(n-1)\kappa_4 R_{n0}(s), \\
R_{n3}(s) &= Q(s^2, n_1^2)\tilde{R}_{n1}(s) - R_{n0}(s), \quad R_{n4}(s) = Q(s^2, n_1^2)\tilde{R}_{n2}(s) - R_{n1}(s), \\
\omega_1 &= \frac{\eta_1 + \beta_1}{\beta_1 \eta_1}, \quad \omega_2 = \frac{\beta_1 - \eta_1}{\beta_1 \eta_1}, \quad \omega_1 > \omega_2 > 0, \quad \xi_0 = s/\beta_1, \quad \zeta_0 = s/\eta_1.
\end{aligned}$$

Для последующего аналитического вычисления оригиналов принимаем во внимание, что в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > \alpha_*$ имеет место неравенство

$$M_{1n}(s)e^{-2\omega_1 s} + M_{2n}(s)e^{-(\omega_1 + \omega_2)s} + M_{3n}(s)e^{-(\omega_1 - \omega_2)s} < 1,$$

и используем следующее разложение в степенной ряд по экспонентам [1]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_n(s)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{|z|=m} (m; z) M_{zn}(s) e^{-n_z s}, \\
n_z &= [(2z_1 + z_2 + z_3)\omega_1 + (z_2 - z_3)\omega_2] > 0, \quad z = (z_1, z_2, z_3), \\
M_{zn}(s) &= M_{1n}^{z_1}(s) M_{2n}^{z_2}(s) M_{3n}^{z_3}(s), \quad (m; z) = \frac{m!}{z_1! z_2! z_3!},
\end{aligned}$$

где z — мультииндекс, $|z| = z_1 + z_2 + z_3$ — его модуль, $(m; z)$ — мультиномиальный коэффициент. Тогда изображение G_{n22}^L предстает в виде:

$$\begin{aligned}
G_{n22}^L &= \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \vartheta) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{|z|=m} (m; z) \sum_{k=1}^4 M_{kzn}(s) e^{-n_z s}, \\
n_{kz} &> 0, \quad M_{kzn}(s) = Q^2(s^2, n_1^2) L_{kn}(s) M_{zn}(s), \\
n_{1z} &= n_z, \quad n_{2z} = n_z + 2\omega_1, \quad n_{3z} = n_z + \omega_1 + \omega_2, \quad n_{4z} = n_z + \omega_1 - \omega_2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что функции $M_{kzn}(s)$ являются правильными рациональными дробями, и поэтому оригиналы каждого из слагаемых в (15) с помощью второй теоремы разложения для преобразования Лапласа определяются точно. При этом на конечном промежутке времени в пространстве оригиналов вследствие наличия экспоненциальных множителей ряд (15) является конечной суммой.

5. Примеры расчетов

Рассматривалось воздействие на оболочку мгновенно приложенного в момент времени $\tau = 0$ внешнего давления

$$p = -H(\tau) H\left(\frac{\pi}{8} - |\alpha|\right) \cos(\alpha).$$

Для получения результатов использовалось представление (7). При этом входящие в него интегралы вычислялись аналитически. При расчетах в разложении функции $G_2(\alpha, \vartheta, \tau)$ удерживалось 11 членов ряда.

Таблица 1. Значения безразмерных параметров задачи при различном сочетании материалов оболочки и заполнителя

| Материал: оболочка-заполнитель | Безразмерные параметры | | | | | |
|-----------------------------------|------------------------|--------|----------|-----------|------------|------------|
| | γ | η | η_1 | β_1 | κ_1 | κ_2 |
| Сталь-сталь | 0,025 | 0,71 | 0,71 | 1 | 11,55 | 5,69 |
| Сталь-алюминий | 0,025 | 0,71 | 0,69 | 0,98 | 3,67 | 1,93 |
| Сталь-медь | 0,025 | 0,71 | 0,61 | 0,87 | 7,46 | 3,89 |

В качестве материала оболочки принималась сталь, а материала заполнителя — сталь, алюминий или медь. Соответствующие значения безразмерных параметров приведены в таблице 1.

На рисунке 2 представлены зависимости нормальных перемещений в лобовой ($\alpha = 0$) точке оболочки от времени. Сплошная кривая соответствует стали, пунктирная — алюминию, штрихпунктирная — меди.

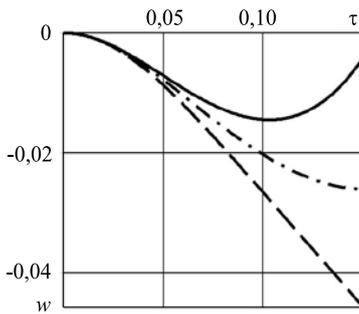


Рис. 2. Зависимости нормальных перемещений в лобовой точке

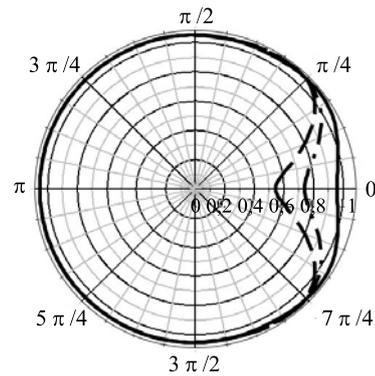


Рис. 3. Распределения нормальных перемещений по углу

Распределения нормальных перемещений по углу в полярной системе координат с центром на оси оболочки и углом α в момент времени $\tau = 0,15$ показаны на рисунке 3. Здесь, как и ранее, сплошная кривая соотносится со сталью, пунктирная — с алюминием, штрихпунктирная — с медью.

Рисунок 4, содержащий распределения нормальных перемещений по углу α в момент времени $\tau = 0,5$, позволяет сравнить их характеры в оболочке с заполнителем и пустой оболочке. В качестве материала заполнителя здесь использован алюминий.

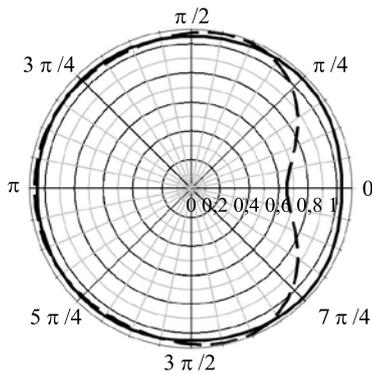


Рис. 4. Распределение нормальных перемещений в пустой оболочке (сплошная линия) и в оболочке с заполнителем (штриховая)

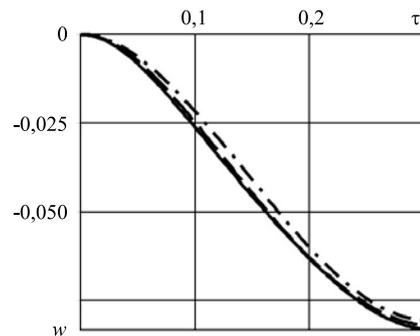


Рис. 5. Зависимость нормальных перемещений в лобовой точке оболочки от времени при различном числе членов ряда в разложении для функции влияния

Для сопоставления результатов при учете различного числа членов ряда для функции $G_2(\alpha, \vartheta, \tau)$ приведен рисунок 5. На нем представлены зависимости нормальных перемещений в лобовой точке оболочки от времени. Штрихпунктирная линия построена при учете 6 первых членов ряда, штриховая — 7 членов, а сплошная — 8 членов. При оценке погрешности определялась практическая сходимость метода по числу удерживаемых членов ряда для функции $G_2(\alpha, \vartheta, \tau)$. При этом, как показали расчеты, относительные расстояния между функциями перемещений по норме в пространстве L_2 в процентном отношении составляли:

$$\Delta_{6,7} = \frac{\|w_7 - w_6\|}{\|w_6\|} 100\% = 1,65\%; \quad \Delta_{7,8} = \frac{\|w_8 - w_7\|}{\|w_7\|} 100\% = 0,57\%; \quad \|f\| = \left(\int_0^{0,3} f(t)^2 dt \right)^{1/2},$$

где $w_6(\tau)$, $w_7(\tau)$ и $w_8(\tau)$ — нормальные перемещения в лобовой точке при учете шести, семи и восьми первых членов в разложении для функции $G_2(\alpha, \vartheta, \tau)$.

Следует отметить, что разработанная в статье методика обладает существенными преимуществами по сравнению с широко распространенными на сегодняшний день численными методами конечных разностей и конечных элементов. Так, для достаточно широкого класса внешних нагрузок соответствующие интегралы в разрешающем представлении (7) могут быть вычислены аналитически, что значительно снижает время вычислений. В приведенных в статье примерах расчеты происходят практически мгновенно, так как фактически используются аналитические выражения для нормальных перемещений. Приближение к точному решению ограничивается только числом членов разложения в ряд функции влияния. В случаях, когда заданное давление таково, что соответствующие интегралы не удается взять аналитически, имеется другая возможность построения аппроксимации функции давления, которая позволит опять применить аналитические вычисления или приближенно заменить интегралы квадратурными формулами на основе метода весовых коэффициентов [20]. При этом коэффициенты формул можно вычислить аналитически. При рассмотрении более сложных проблем, когда само давление является искомой функцией, например, в нестационарных контактных задачах для оболочек с наполнителем, на основе полученных результатов можно создать высокоэффективные численно-аналитические алгоритмы решения с использованием метода весовых коэффициентов или разложения искомого контактного давления в ряд.

6. Заключение

Решена нестационарная задача для тонкой сферической оболочки с упругим наполнителем при воздействии на нее поверхностного давления. Построена функция влияния. Приведены примеры расчетов.

Полученные результаты могут быть использованы при реализации нестационарных контактных задач для тонких сферических оболочек с упругими наполнителями, задач дифракции акустических волн на упругой оболочке с наполнителем, а также служить основой для разработки и тестирования эффективных численно-аналитических алгоритмов расчета более сложных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-08-00260-а, 16-58-00034-Бел_а).

Литература

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука, 1990. – 264 с.
2. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – М.: Наука. Физматлит, 1995. – 352 с.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
4. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
5. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек: в 5 т. – Киев: Наукова думка, 1982. – Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – 399 с.
6. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
7. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.
8. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.
9. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction) // Mech. Solids. – 2011. – Vol. 46, no. 2. – P. 239-247. DOI
10. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // J. Mach. Manuf. Reliab. – 2014. – Vol. 43, no. 2. – P. 145-152. DOI
11. Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В., Киселева Н.Н. Проникновение звукового поля сферического излучателя через сферическую упругую оболочку // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 25-32.
12. Россихин Ю.А., Шамарин В.В., Шитикова М.В. Волновая теория удара упругих тел ограниченных размеров по упругой сферической оболочке // Вестник ННГУ. – 2011. – № 4-5. – С. 2463-2464.
13. Григорьева Н.С., Фридман Г.М. Дифракция звуковых импульсов на упругой сферической оболочке, помещенной в океанический волновод // Акустический журнал. – 2014. – Т. 60, № 3. – С. 230-239. (English version DOI).
14. Хабахнашева Т.И. Удар упругой сферической оболочкой по тонкому слою жидкости // МЖГ. – 2015. – № 2. – С. 81-94. (English version DOI).
15. Ильменков С.Л., Клецов А.А., Клименков А.С. Метод функций Грина в задаче дифракции звука на упругой оболочке неканонической формы // Акустический журнал. – 2014. – Т. 60, № 6. – С. 579-586. (English version DOI).

16. Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н. Осесимметричная задача нестационарного взаимодействия акустической волны давления с упругой оболочкой вращения // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2006. – Т. 12, № 4. – С. 541-554.
17. Богомолов В.Г., Федотов А.А. Задача взаимодействия упругой сферической оболочки с жидкостью // *Инженерный журнал: наука и инновации*. – 2013. – № 2 (14). – С. 41. DOI
18. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Пространственное нестационарное движение упругой сферической оболочки // *МТТ*. – 2015. – № 2. – С. 118-128. (English version DOI).
19. Михайлова Е.Ю., Старовойтов Э.И., Федотенков Г.В. Параметрическое исследование процесса нестационарного контактного взаимодействия тонкой сферической оболочки и упругого полупространства // *Материалы XX Междунар. симп. «Динамич. и технологич. проблемы мех. констр. и сплошн. сред»*, Москва, 17-21 февраля 2014. – Т. 2. – С. 31-32.
20. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // *Труды МАИ*. – 2014. – № 78.
21. Сейфуллаев А.И., Агаларов Г.Д. Свободные колебания сферической оболочки с упругим наполнителем // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2015. – № 3. – С. 74-80.
22. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А., Марков И.П. Введение в гранично-элементное моделирование динамики анизотропных тел. – Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 74 с.
23. Игумнов Л.А., Марков И.П., Пазин В.П., Инатов А.А. Гранично-элементное построение решений для трехмерной матрицы Грина // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2013. – Т. 75, № 2. – С. 123-129.
24. Levi G.Yu., Igumnov L.A. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function // *Materials Physics and Mechanics*. – 2015. – Vol. 23, no. 1. – P. 42-46.
25. Нетребко А.В., Пишеничнов С.Г. Некоторые задачи динамики линейно-вязкоупругих цилиндрических оболочек конечной длины // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2015. – Т. 77, № 1. – С. 14-22.
26. Сеницкий Ю.Э. Биортогональные преобразования в нестационарных задачах теории оболочек // *Вестник НИЦ «Строительство»*. – 2010. – № 2. – С. 95-105.

References

1. Gorshkov A.G., Tarlakovsky D.V. *Transient aerohydroelasticity of spherical bodies*. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York, 2001. 289 p.
2. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granitsami* [Dynamic contact problems with moving boundaries]. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1995. 352 p.
3. Vol'mir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi aerouprugosti* [Shells in the fluid and gas flow. Problems of aeroelasticity]. Moscow: Nauka, 1976. 416 p.
4. Vol'mir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza. Zadachi gidrouprugosti* [Shells in the fluid and gas flow. Problems of hydroelasticity]. Moscow: Nauka, 1979. 320 p.
5. Guz' A.N., Kubenko V.D. *Metody rascheta obolochek*. [Methods for calculating shells. Vol. 5: Theory of nonstationary aerohydroelasticity of shells]. Kiev: Naukova dumka, 1982. 399 p.
6. Poruchikov V.B. *Metody dinamicheskoi teorii uprugosti* [Methods of dynamic theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1986. 328 p.
7. Slepyan L.I. *Nestatsionarnye uprugie volny* [Non-stationary elastic waves]. Leningrad: Sudostroenie, 1972. 374 p.
8. Slepyan L.I., Yakovlev Yu.S. *Integral'nye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh mekhaniki* [Integral transformations in non-stationary problems of mechanics]. Leningrad: Sudostroenie, 1980. – 344 s.
9. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction). *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 239-247. DOI
10. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145-152. DOI
11. Shushkevich G.Ch., Shushkevich S.V., Kiseleva N.N. Penetration of the sound field of a spherical radiator through the spherical elastic shell. *Problems of physics, mathematics and technics*, 2014, no. 2 (19), pp. 25-32.
12. Rossikhin Yu.A., Shamarin V.V., Shitikova M.V. Wave theory of impact of elastic bodies of finite dimensions upon an elastic spherical shell. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4-5, pp. 2463-2464.
13. Grigorieva N.S., Fridman G.M. Diffraction of sound pulses on an elastic spherical shell submerged in an oceanic waveguide. *Acoust. Phys.*, 2014, vol. 60, no. 3, pp. 248-257. DOI
14. Khabakhpasheva T.I. Impact of an elastic spherical shell on a thin fluid layer. *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 250-262. DOI
15. Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A., Klimenkov A.S. The Green's function method in the problem of sound diffraction by an elastic shell of noncanonical shape. *Acoust. Phys.*, 2014, vol. 60, no. 6, pp. 617-623. DOI
16. Zhavoronok S.I., Rabinskii L.N. Osесimmetrichnaya zadacha nestatsionarnogo vzaimodeistviya akusticheskoi volny davleniya s uprugoi obolochkoi vrashcheniya [Axisymmetric problem of unsteady interaction of acoustic pressure wave with elastic shell of revolution]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii – Journal on Composite Mechanics and Design*, 2006, vol. 12, no. 4, pp. 541-554.
17. Bogomolov V.G., Fedotov A.A. Interaction problem of elastic spherical shell with liquid. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2013, no. 2 (14), pp. 41. DOI
18. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell. *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208-217. DOI

19. Mikhailova E.Yu., Starovoitov E.I., Fedotenkov G.V. *Dynamic and technological problems of mechanics of continuum and structures. XX International symposium dedicated to Anatoly G. Gorshkov, 17-21 February 2014, Moscow, vol. 2, pp. 31-32.*
20. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Non-stationary contact of a spherical shell and an elastic half-space. *Trudy MAI*, 2014, no. 78.
21. Seyfullayev A.I., Agalarov G.D. Free vibrations of the spherical shell containing an elastic filler. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2015, no. 3, pp. 74-80.
22. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Belov A.A., Markov I.P. *Vvedenie v granichno-elementnoe modelirovanie dinamiki anizotropnykh tel* [Introduction to boundary element modeling of the dynamics of anisotropic bodies]. Nizhni Novgorod: Lobachevsky University, 2014. 74 p.
23. Igumnov L.A., Markov I.P., Pazin V.P., Ipatov A.A. Boundary-element construction of solutions for a 3D Green's matrix. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2013, vol. 75, no. 2, pp. 123-129.
24. Levi G.Yu., Igumnov L.A. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function. *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 23, no. 1, pp. 42-46.
25. Netebko A.V., Pshenichnov S.G. Some dynamic problems for linearly viscoelastic cylindrical finite length shells. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of Strength and Plasticity*, 2015, vol. 77, no. 1, pp. 14-22.
26. Senitskii Yu.E. Biortogonal'nye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh teorii obolochek [Biorthogonal transformations in non-stationary problems of the theory of shells]. *SIC Bulletin "Construction"*, 2010, no. 2, pp. 95-105.

Поступила в редакцию 18.07.2016; опубликована в электронном виде 30.12.2016

Сведения об авторах

Вестяк Анатолий Васильевич, кфмн, проф., доц., Московский авиационный институт (МАИ), 125993, А-80, ГСП-3, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4; e-mail: kaf311@yandex.ru

Игумнов Леонид Александрович, дфмн, проф., директор, Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (НИИ механики ННГУ), 603600, Нижний Новгород, ГСП-1000, пр. Гагарина, д. 23, корп. 6; e-mail: igumnov@mech.unn.ru

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, дфмн, зав. лаб., проф., НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова (ИМ МГУ), 119192, Москва, Мичуринский просп., д. 1; e-mail: tdv902@mai.ru

Федотенков Григорий Валерьевич, кфмн, доц., МАИ; e-mail: greghome@mail.ru