

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.36

УДК 539.375:539.621

ВЛИЯНИЕ ИЗНОСА НА ФРИКЦИОННЫЙ РАЗОГРЕВ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕРМОУПРУГОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СКОЛЬЗЯЩЕГО КОНТАКТА

В.Б. Зеленцов, Б.И. Митрин, И.А. Лубягин

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

В настоящей работе исследуется взаимовлияние износа упругого покрытия и фрикционного разогрева скользящего контакта, а также их совместное влияние на возникновение и развитие термоупругой неустойчивости скользящего термофрикционного контакта. Дается постановка начально-краевой квазистатической задачи несвязанной термоупругости, в которой рассматривается скольжение жёсткого тела в виде полуплоскости по поверхности упругого покрытия с учётом трения и сопровождающего его тепловыделения. Скорость скольжения полуплоскости постоянна, покрытие сцеплено с жёсткой подложкой. Работа сил трения на контакте расходуется на нагрев покрытия и его абразивный износ. Для решения задачи используется интегральное преобразование Лапласа. Решения задачи – температура, напряжения, смещения, как на контакте, так и по глубине покрытия, – представляются в виде свёрток Лапласа. Подынтегральные функции квадратур выражений для напряжений и смещений не убывают на бесконечности, а остаются постоянными. Квадратуры, их содержащие, понимаются в обобщённом смысле. После регуляризации подынтегральных функций в квадратурах для смещений и напряжений решение задачи записывается в виде суммы регулярной составляющей обобщённой части и свёртки Лапласа. Показано, что подынтегральные функции полученных решений задачи зависят от её трёх безразмерных параметров. Подробно изучается расположение полюсов подынтегральных функций решений задачи в комплексной плоскости переменной интегрирования, на основании чего определяются области устойчивых и неустойчивых решений в пространстве безразмерных параметров задачи. После вычисления свёрток решения задачи записываются в виде удобных для вычисления и анализа функциональных рядов по полюсам подынтегральных функций. Исследуются свойства точных, как устойчивых, так и неустойчивых, решений задачи – температуры, износа и напряжений, развивающихся на скользящем термофрикционном контакте, – в зависимости от значений размерных и безразмерных параметров задачи.

Ключевые слова: трение, износ, скольжение, контакт, термоупругая неустойчивость

EFFECT OF WEAR ON FRICTIONAL HEATING AND THERMOELASTIC INSTABILITY OF SLIDING CONTACT

V.B. Zelentsov, B.I. Mitrin and I.A. Lubyagin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

In this work, we consider a relationship between the wear of an elastic coating and the frictional heating on a sliding contact, as well as their joint effect on initiation and development of thermoelastic instability of sliding thermoelastic frictional contact. The initial boundary-value quasi-static problem of uncoupled thermoelasticity involving the sliding of a rigid body represented by a half-plane over the surface of an elastic coating is formulated with regard to Coulomb friction and frictional heat generation. The half-plane slides with a constant velocity; the coating is bonded to a rigid substrate. The work of frictional forces at the contact is spent on heating the coating and on its abrasive wear. To solve this problem, the Laplace integral transform is used. Solutions of the problem, namely temperature, stresses and displacements both on contact and in the depth of the coating, are represented in the form of the Laplace convolution. Integrand functions in stresses and displacements integrals are non-decaying at infinity (they remain constant), so the integrals containing them are understood in a generalized meaning. After regularization of integrands of displacements and stresses integrals, a solution to the problem is written as the sum of the regular constituent of a generalized part and the Laplace convolution. It is shown that the integrals depend on three dimensionless parameters of the problem. The placement of the poles of integrands in the complex plane of an integration variable is studied in detail. This gives the domains of stable and unstable solutions in the space of dimensionless parameters of the problem. After calculation of convolutions, the problem solution is represented by functional series over the poles of integrands, which is convenient for evaluation and analysis. The properties of stable and unstable exact solutions for temperature, wear and stresses on a sliding thermoelastic frictional contact are investigated in relation to the values of dimensional and dimensionless parameters of the problem.

Key words: friction, wear, sliding, contact, thermoelastic instability

1. Введение

Эксплуатация высокоскоростных транспортных средств, промышленного и другого оборудования сопровождается нагрузками в узлах трения машин и механизмов. Проблема создания поверхностей трения, отвечающих повышенным эксплуатационным требованиям, часто решается путём применения покрытий различного назначения: антифрикционных, антикоррозийных, термоизоляционных и т.п. Экспериментально установлено, что при повышении относительной скорости на скользящем фрикционном контакте между рабочими поверхностями триботехнических устройств с покрытиями возникает галопирующий рост температуры и контактных напряжений, свидетельствующий о развитии термоупругой неустойчивости скользящего термофрикционного контакта [1–5]. При проведении исследований неустойчивости скользящего термофрикционного контакта экспериментаторы сталкиваются с серьезными трудностями, связанными с размещением датчиков, их «выживаемостью» в процессе испытаний, необходимостью повышения скорости и надежности регистрации опытных данных и другим.

В связи с этим все большее внимание уделяется математическому моделированию скользящего термофрикционного контакта [6–15].

В настоящей работе изучается взаимовлияние износа упругого покрытия и фрикционного разогрева скользящего контакта, а также их совместное влияние на возникновение и развитие термоупругой неустойчивости, обсуждавшееся ранее в [9, 10] и других работах.

2. Постановка задачи

Для исследования развития температуры и напряжений на скользящем фрикционном контакте с учётом тепловыделения от трения и износа упругого материала в рамках плоской постановки рассматривается контактная задача, возникающая при движении с постоянной скоростью V жёсткой теплоизолированной

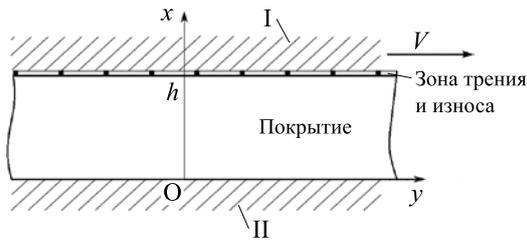


Рис. 1. Схема к постановке задачи; чёрными точками обозначена зона трения и износа покрытия на поверхности контакта

полуплоскости I ($h \leq x < \infty$) упругого теплопроводящего покрытия толщиной h ($0 \leq x \leq h$). Нижняя поверхность покрытия жёстко сцеплена с недеформируемой нетеплопроводной подложкой в виде полуплоскости II ($-\infty < x \leq 0$) (Рис. 1). Скольжение полуплоскости I происходит с учётом кулоновского трения и абразивного износа поверхности покрытия [6]. Поток тепла, образующийся на контакте за счёт трения, направлен внутрь упругого покрытия. С начального момента времени полуплоскость I, движущаяся вдоль оси y , деформирует поверхность $x = h$ упругого

покрытия в направлении, противоположном оси x , и внедряется в него по закону $\Delta(t)$. До начального момента $t = 0$ покрытие находилось в покое, а его температура равнялась нулю.

Из формулировки задачи следует, что распределения температуры, напряжений и смещений в покрытии не зависят от местоположения точки на координатной оси y , параллельной направлению движения полуплоскости I, и вследствие этого являются функциями только координаты x и времени t [5, 7–11, 14, 15]. Тогда двумерные дифференциальные уравнения теории упругости, описывающие напряжённо-деформированное состояние покрытия в квазистатическом случае, принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (1)$$

где $\sigma_{xx}(x, t)$, $\sigma_{xy}(x, t)$ — нормальные и касательные напряжения в покрытии.

Распределение температуры $T(x, t)$ в покрытии определяется одномерным уравнением теплопроводности [16]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad 0 < x < h, \quad t > 0, \quad (2)$$

где κ — коэффициент теплопроводности.

Связь между напряжениями $\sigma_{xx}(x, t)$, $\sigma_{xy}(x, t)$, вертикальными — $u(x, t)$, и горизонтальными — $w(x, t)$, смещениями и температурой $T(x, t)$ задаётся соотношениями Дюамеля–Неймана [16]

$$\sigma_{xx}(x, t) = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha T, \quad \sigma_{xy}(x, t) = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (3)$$

где μ , ν и α — модуль сдвига, коэффициенты Пуассона и линейного расширения материала покрытия.

Для получения уравнений термоупругости подставляем соотношения (3) в дифференциальные уравнения (1), после чего приходим к системе дифференциальных уравнений квазистатической несвязанной теории термоупругости

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (4)$$

совместно решаемых с дифференциальным уравнением теплопроводности (2).

Граничные условия для дифференциальных уравнений (2), (4), описывающих термоупругие процессы в покрытии, следующие:

– механические

при $x = h$:

$$u(h, t) = -\Delta(t) + u_w(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{xy}(h, t) = -f \sigma_{xx}(h, t), \quad t > 0; \quad (6)$$

при $x = 0$:

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$w(0, t) = 0, \quad t > 0; \quad (8)$$

– температурные

при $x = h$:

$$K \frac{\partial T(h, t)}{\partial x} = -fV \sigma_{xx}(h, t), \quad t > 0; \quad (9)$$

при $x = 0$:

$$K \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = kT(0, t), \quad t > 0. \quad (10)$$

Здесь: f — коэффициент трения; K — коэффициент теплопроводности; k — коэффициент теплообмена; $u_w(t)$ — осадка полуплоскости I за счёт износа покрытия; для абразивного износа используется модель [6, 9, 10], согласно которой

$$u_w(t) = -fVK^* \int_0^t \sigma_{xx}(h, \tau) d\tau, \quad t > 0, \quad (11)$$

где $\sigma_{xx}(h, t)$ — нормальные напряжения сжатия на контакте, K^* — коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удалённого с поверхности контакта материала.

Начальные условия задачи нулевые:

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad T(x, 0) = 0, \quad \Delta(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq h. \quad (12)$$

Таким образом, решение задачи, в которой рассматривается термофрикционный скользящий контакт с износом, сводится к решению системы дифференциальных уравнений (2), (4) с граничными (5)–(10) и начальными (12) условиями.

З а м е ч а н и е 1. Вертикальные смещения $u(x, t)$, нормальные напряжения $\sigma_{xx}(x, t)$ и температура $T(x, t)$ в покрытии определяются независимо от горизонтальных смещений $w(x, t)$. По установленным нормальным напряжениям $\sigma_{xx}(x, t)$ горизонтальные смещения $w(x, t)$ находятся из (4), (6), (8).

3. Точное решение задачи

Для решения поставленной задачи прибегнем к интегральному преобразованию Лапласа [17]:

$$u^L(x, p) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt, \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+c}^{i\infty+c} u^L(x, p) e^{pt} dp, \quad c > 0. \quad (13)$$

В (13) индексом L обозначается трансформанта функции по Лапласу, p — параметр интегрирования, c — параметр, задающий положение контура интегрирования.

Далее к дифференциальным уравнениям (2), (4) с учётом начальных условий (12) и условий существования интегралов Лапласа (13) [17] применяется преобразование Лапласа (13) с целью сведения задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 T^L}{dx^2} - \frac{p}{\kappa} T^L = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d^2 u^L}{dx^2} = \frac{1+v}{1-v} \alpha \frac{dT^L}{dx}, \tag{15}$$

общие решения которых строятся согласно формулам

$$T^L(x, p) = A_1 \operatorname{sh} \sqrt{p/\kappa} x + A_2 \operatorname{ch} \sqrt{p/\kappa} x, \tag{16}$$

$$u^L(x, p) = \frac{1+v}{1-v} \frac{\alpha}{\sqrt{p/\kappa}} \left(A_1 \operatorname{ch} \sqrt{p/\kappa} x + A_2 \operatorname{sh} \sqrt{p/\kappa} x \right) + A_3 x + A_4, \tag{17}$$

где A_k ($k = \overline{1,4}$) являются произвольными постоянными, зависящими от параметра интегрирования p , и подлежат определению из граничных условий (5), (7), (9), (10) с учетом (11), предварительно преобразованных по Лапласу:

$$\begin{aligned} u^L(h, p) &= -\Delta^L(p) - fVK^* \frac{\sigma_{xx}^L(h, p)}{p}, & u^L(0, p) &= 0, \\ K \frac{dT^L(h, p)}{dx} &= -fV\sigma_{xx}^L(h, p), & K \frac{dT^L(0, p)}{dx} &= kT^L(0, p), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\sigma_{xx}^L(x, p)$ — трансформанта $\sigma_{xx}(x, t)$ из (3), имеет вид:

$$\sigma_{xx}^L(x, p) = \frac{2\mu(1-v)}{1-2v} \frac{du^L(x, p)}{dx} - \frac{2\mu(1+v)}{1-2v} \alpha T^L(x, p), \tag{19}$$

а трансформанты $T^L(x, p)$, $\Delta^L(p)$ находятся по формулам

$$T^L(x, p) = \int_0^\infty T(x, t) e^{-pt} dt, \quad \Delta^L(p) = \int_0^\infty \Delta(t) e^{-pt} dt.$$

После подстановки (16), (17) в (18) придём к системе линейных алгебраических уравнений относительно A_k ($k = \overline{1,4}$):

$$\begin{aligned} \sqrt{p/\kappa} h A_1 - \operatorname{Bi} A_2 &= 0, \\ \frac{1+v}{1-v} \frac{\alpha h}{(p/\kappa) h^2} \operatorname{Bi} A_2 + A_4 &= 0, \\ \frac{1+v}{1-v} \frac{\alpha h}{(p/\kappa) h^2} g(p) A_2 + \left(h + fVK^* \frac{2\mu(1-v)}{1-2v} \frac{1}{p} \right) A_3 + A_4 &= -\Delta^L(p), \\ \frac{1+v}{1-v} \alpha h g(p) A_2 + h \hat{V} A_3 &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

где $g(p) = \operatorname{Bi} \operatorname{ch} \left(h \sqrt{p/\kappa} \right) + h \sqrt{p/\kappa} \operatorname{sh} \left(h \sqrt{p/\kappa} \right)$, $\operatorname{Bi} = k h / K$.

Найденные A_k ($k = \overline{1,4}$) подставим в (16), (17), (19), в результате чего определим трансформанты $T^L(x, p)$, $u^L(x, p)$, $\sigma_{xx}^L(x, p)$. Обращая их с помощью обратного преобразования Лапласа (13), получим решения задачи $T(x, t)$, $u(x, t)$, $\sigma_{xx}(x, t)$, которые запишем в виде свёрток Лапласа [17, 18]:

$$T(x, t) = \frac{1-v}{1+v} \frac{\hat{V}}{\alpha h} \int_0^t \Delta(\tau) f_T(x, t-\tau) d\tau, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \tag{21}$$

$$f_T(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{N_T(x, z)}{t_\kappa R(z)} e^{z\tilde{t}} dz, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_\kappa}, \quad t_\kappa = \frac{h^2}{\kappa}, \quad z = p t_\kappa; \tag{22}$$

$$N_T(x, z) = \sqrt{z} \left(\operatorname{Bi} \operatorname{sh} \sqrt{z} \frac{x}{h} + \sqrt{z} \operatorname{ch} \sqrt{z} \frac{x}{h} \right); \tag{23}$$

$$R(z) = zr(z) - \hat{V}[(1 - k_w)r(z) - \text{Bi}], \quad r(z) = \text{Bi ch } \sqrt{z} + \sqrt{z} \text{ sh } \sqrt{z},$$

$$\hat{V} = \frac{fV\alpha}{K} \frac{2\mu(1+\nu)h}{1-2\nu}, \quad k_w = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{KK^*}{\alpha\kappa}; \quad (24)$$

$$u(x, t) = -\int_0^t \Delta(\tau) f_u(x, t - \tau) d\tau, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \quad (25)$$

$$f_u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_u^0(x, z)}{t_{\kappa} R(z)} e^{z\tilde{t}} dz, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{\kappa}}; \quad (26)$$

$$N_u^0(x, z) = zr(z) \frac{x}{h} - \hat{V} \left(\text{Bi ch } \sqrt{z} \frac{x}{h} + \sqrt{z} \text{ sh } \sqrt{z} \frac{x}{h} - \text{Bi} \right); \quad (27)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \int_0^t \Delta(\tau) f_{\sigma}(x, t - \tau) d\tau, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \quad (28)$$

$$f_{\sigma}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_{\sigma}^0(x, z)}{t_{\kappa} R(z)} e^{z\tilde{t}} dz, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{\kappa}}; \quad (29)$$

$$N_{\sigma}^0(x, z) = zr(z), \quad (30)$$

где контур интегрирования $\Gamma = \{z : -i\infty + dt_{\kappa}, i\infty + dt_{\kappa}\}$ проходит по прямой и параллелен мнимой оси, а параметр d подбирается таким образом, чтобы Γ располагался правее всех изолированных особых точек подынтегральных функций.

В полученных формулах для $T(x, t)$, $u(x, t)$ и $\sigma_{xx}(x, t)$ присутствуют контурные квадратуры (22), (26), (29). Точное вычисление этих квадратур гарантирует нахождение точного решения задачи, которое можно исследовать на устойчивость в зависимости от параметров задачи. Важно заметить, что в комплексной плоскости переменной интегрирования z подынтегральные функции контурных квадратур (22), (26), (29) являются функциями мероморфными, содержащими счётное количество полюсов. На бесконечности в комплексной плоскости переменной интегрирования z подынтегральные функции (22), (26), (29) ведут себя следующим образом:

$$N_T(x, z)R^{-1}(z) = O(z^{-1/2}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad 0 < x < h; \quad (31)$$

$$N_u^0(x, z)R^{-1}(z) = x/h + O(z^{-1/2}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad 0 < x < h; \quad (32)$$

$$N_{\sigma}^0(x, z)R^{-1}(z) = 1 + O(z^{-1/2}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad 0 < x < h; \quad (33)$$

Асимптотики (31)–(33) показывают, что интеграл (22) существует и может быть найден с помощью леммы Жордана–Гаусса [17], а квадратуры (26), (29) за счёт асимптотик (32), (33) не существуют в обычном смысле и понимаются как обобщённые [19].

Для вычисления квадратур (26), (29) произведём регуляризацию подынтегральных функций на бесконечности ($|z| \rightarrow \infty$), и затем представим квадратуры в виде суперпозиции обобщённой и регулярной составляющих. Тогда получим формулы для $u(x, t)$ и $\sigma_{xx}(x, t)$

$$u(x, t) = -\Delta(t) \frac{x}{h} + \int_0^t \Delta(\tau) f_u(x, t - \tau) d\tau, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \quad (34)$$

$$f_u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_u(x, z)}{t_{\kappa} R(z)} e^{z\tilde{t}} dz; \quad (35)$$

$$N_u(x, z) = \hat{V} \left[\text{Bi ch } \sqrt{z} \frac{x}{h} + \sqrt{z} \text{ sh } \sqrt{z} \frac{x}{h} - \frac{x}{h} (1 - k_w) r(z) - \left(1 - \frac{x}{h} \right) \text{Bi} \right]; \quad (36)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \left(\Delta(t) - \int_0^t \Delta(\tau) f_{\sigma}(x, t - \tau) d\tau \right), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \quad (37)$$

$$f_{\sigma}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_{\sigma}(x, z)}{t_{\kappa} R(z)} e^{z\tilde{t}} dz; \quad (38)$$

$$N_{\sigma}(x, z) = \hat{V} [\text{Bi} - (1 - k_w) r(z)], \quad (39)$$

где k_w рассчитывается по формуле из (24). Необходимо заметить, что σ_{xx} в формуле (37) не зависит от x . В квадратурах (35), (38) подынтегральные функции убывают на бесконечности ($|z| \rightarrow \infty$) и имеют следующие асимптотики

$$N_u(x, z)R^{-1}(z) = O(z^{-1/2}), \quad N_\sigma(x, z)R^{-1}(z) = O(z^{-1/2}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad 0 \leq x \leq h. \quad (40)$$

Для вычисления квадратур (22), (35), (38) можно использовать лемму Жордана [17]: подынтегральные функции мероморфны в комплексной плоскости переменной интегрирования z , убывают степенным образом на бесконечности. Возникает задача определения полюсов подынтегральных функций в (22), (35), (38) в комплексной плоскости переменной интегрирования.

З а м е ч а н и е 2. Полученные решения задачи (21), (34), (37) для $T(x, t)$, $u(x, t)$, $\sigma_{xx}(x, t)$ — это интегральные уравнения Вольтерры относительно функции $\Delta(t)$ [20]. Отсюда следует, что закон $\Delta(t)$ внедрения полуплоскости I в покрытие можно подобрать, если известна хотя бы одна из функций: $T(x, t)$, $u(x, t)$, $\sigma_{xx}(x, t)$.

4. Полюсы подынтегральных функций

Полюсы подынтегральных функций в (22), (35), (38) совпадают с нулями $R(z)$ из (24), за исключением тех, которые являются устранимыми особыми точками подынтегральных функций. Для отыскания нулей $R(z)$ необходимо в комплексной плоскости $z = \xi + i\eta$ решить уравнение

$$R(z) = zr(z) - \hat{V}[(1 - k_w)r(z) - Bi] = 0, \quad (41)$$

где k_w , $r(z)$ из (24).

Из уравнения (41) видно, что нули $R(z)$ зависят от трёх безразмерных параметров задачи: k_w , Bi , \hat{V} . Используя опыт работ [14, 15], будем исследовать поведение нулей $R(z)$ (41) при фиксированных k_w , Bi и переменном параметре \hat{V} , который изменяется в пределах от 0 до ∞ . Положив в (41) $\hat{V} = 0$, получим уравнение

$$z(Bi \operatorname{ch} \sqrt{z} + \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z}) = 0 \quad (42)$$

для определения нулевых приближений $\zeta_k^0 = \zeta_k(0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) корней (41) по \hat{V} . Уравнение (42) не имеет удобных аналитических решений, поэтому предлагаем взять в качестве нулевого приближения:

– при $Bi \ll 1$

$$\zeta_k^0 = -(\pi k)^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad 1$$

– при $Bi \gg 1$

$$\zeta_k^0 = -\pi^2 (k + 1/2)^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad 2 \quad (43)$$

– для средних Bi ζ_k^0 ($k = 0, 1, 2, \dots$) устанавливается при $Bi = 1$, когда решение (42) сводится к табулированию выражения $\operatorname{th} \sqrt{z} = -1/\sqrt{z}$;

– при больших значениях k асимптотика ζ_k^0 имеет вид (43₁).

Из формул (43₁), (43₂) следует, что все нулевые приближения ζ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) при $\hat{V} = 0$ располагаются на отрицательной части действительной оси или в нуле. Однако при изменении \hat{V} от 0 до ∞ при фиксированных k_w и Bi , прежде всего, первые два полюса ζ_0 и ζ_1 могут лежать: I — на отрицательной части действительной оси $\operatorname{Re}(\zeta_0, \zeta_1) < 0$, $\operatorname{Im}(\zeta_0, \zeta_1) = 0$; II — в левой полуплоскости $\operatorname{Re}(\zeta_0, \zeta_1) < 0$, $\operatorname{Im}(\zeta_0, \zeta_1) \neq 0$; III — в правой полуплоскости $\operatorname{Re}(\zeta_0, \zeta_1) > 0$, $\operatorname{Im}(\zeta_0, \zeta_1) \neq 0$; IV — на положительной части действительной оси $-\operatorname{Re}(\zeta_0, \zeta_1) > 0$, $\operatorname{Im}(\zeta_0, \zeta_1) = 0$. Как ниже будет показано, римскими цифрами I, II обозначены области, где $\operatorname{Re}(\zeta_0, \zeta_1) < 0$, которые называются областями устойчивых решений задачи, а области III, IV с $\operatorname{Re}(\zeta_0, \zeta_1) > 0$ — областями неустойчивых решений.

На рисунке 2 демонстрируются примеры траекторий полюсов $\zeta_0(\hat{V})$, $\zeta_1(\hat{V})$ при изменении \hat{V} от 0 до ∞ при фиксированном $\text{Bi} = 1,43$ и различных k_w : 0,5; 1,0; 1,08; 1,135; 5,0. Даже небольшое изменение коэффициента k_w , содержащего отношение размерных K^* и α , регулирующих, соответственно, износ и терморасширение покрытия, вызывает существенные изменения траекторий $\zeta_0(\hat{V})$ и $\zeta_1(\hat{V})$ и, в меньшей степени, траекторий полюсов при других значениях k . Когда превалирует износ, то ζ_0 , ζ_1 и тем более ζ_k ($k = 2, 3, 4, \dots$), при $k_w > 1$ находятся в областях I, II, тогда как преобладание расширения покрытия над износом (при $0 < k_w < 1$) приводит к тому, что ζ_0 , ζ_1 переходят в правую полуплоскость, в области III, IV (Рис. 2). На рисунках 2а–д римскими цифрами указаны переходы ζ_0 , ζ_1 из области I в другие — в II–IV, при изменении \hat{V} от 0 до ∞ .

Необходимо отметить важное свойство полюсов, проявляющееся во II и III параметрических областях, которое для соседних ζ_0 и ζ_1 заключается в их комплексной сопряжённости, то есть $\zeta_1 = \overline{\zeta_0}$. На рисунке 2е представлено, как деформируются траектории полюсов $\zeta_0(\hat{V})$ и $\zeta_1(\hat{V})$ с рисунков 2а–д при $\hat{V} \in [0, \infty)$, фиксированном $\text{Bi} = 1,43$ и различных k_w в комплексной плоскости.

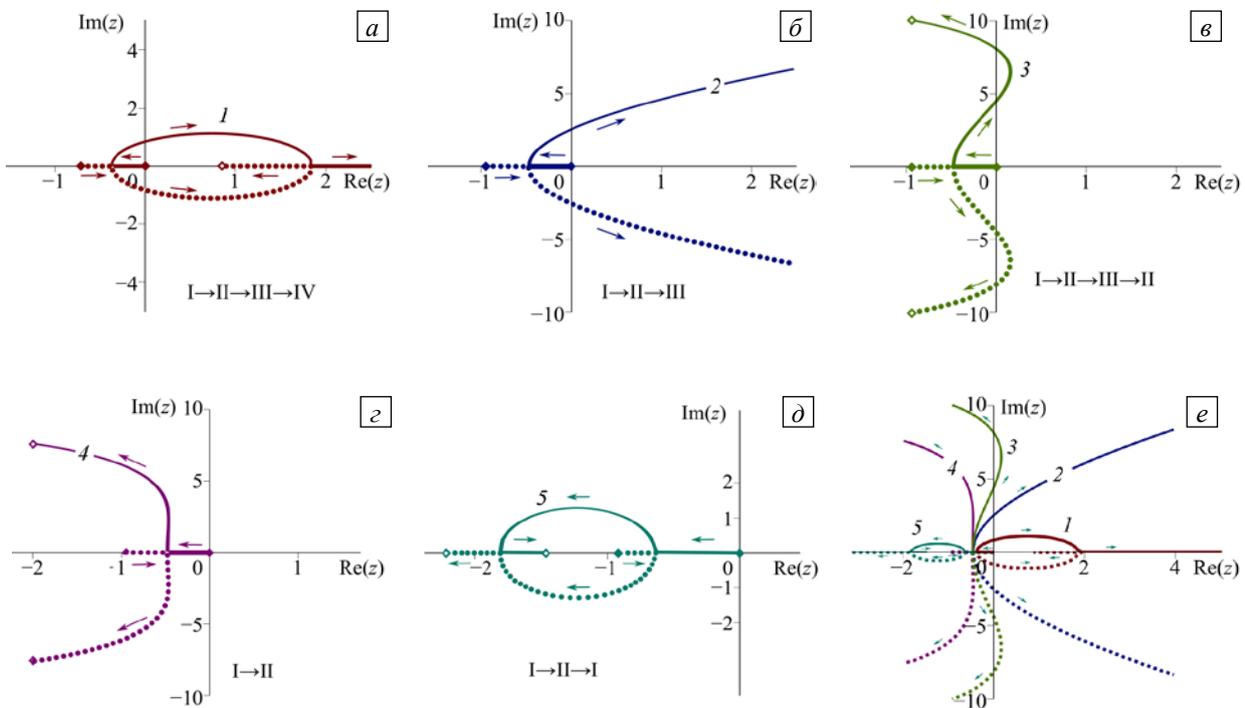


Рис. 2. Траектории расположения полюсов $\zeta_0(\hat{V})$ и $\zeta_1(\hat{V})$ в комплексной плоскости z при $\hat{V} \in [0, \infty)$ для фиксированного значения $\text{Bi} = 1,43$ и различных k_w : 0,5 (кривая 1) (а), 1,0 (2) (б), 1,08 (3) (в), 1,135 (4) (г), 5,0 (5) (д); сплошные линии – траектории полюса ζ_0 , пунктирная – траектории полюса ζ_1 ; стрелками показаны направления перемещения полюсов по траекториям, а ниже римскими цифрами – порядок следования по областям устойчивых (I, II) и неустойчивых (III, IV) решений при увеличении \hat{V} от 0 до ∞

З а м е ч а н и е 3. Наличие комплексно-сопряжённых полюсов ζ_0 и ζ_1 при $\hat{V} \in [0, \infty)$ в задачах с учётом трения, фрикционного тепловыделения и износа является их существенным отличием от аналогичных задач без учёта износа, в которых ζ_0 и ζ_1 всегда остаются на действительной оси и не выходят в комплексную плоскость [14, 15].

5. Формулы точного решения задачи

Пусть известны полюсы подынтегральных функций ζ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) из (22), (35), (38). Тогда определение этих квадратур сведётся к вычислению вычетов в полюсах их подынтегральных функций [14, 15]. В предположении, что полюсы ζ_k однократные, получим для квадратур (22), (35), (38) следующие формулы:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_a(x, z)}{t_{\kappa} R(z)} e^{z\tilde{t}} dz = \sum_{k=0}^{\infty} B_a(x, \zeta_k) e^{\zeta_k \tilde{t}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{\kappa}}, \quad (44)$$

$$B_a(x, z) = \frac{N_a(x, z)}{t_{\kappa} R'(z)}, \quad (45)$$

где $R'(z)$ — производная от $R(z)$. Индекс a подразумевает буквенные обозначения. Так, при $a = T$ имеем формулу для квадратуры температуры (22), при $a = u$ — формулу для квадратуры перемещений (35), при $a = \sigma$ — формулу для квадратуры напряжений (38). Если ζ_k и ζ_{k+1} ($k = 0, 1, 2, \dots$) представляют собой комплексно-сопряжённую пару $\zeta_{k+1} = \bar{\zeta}_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то

$$B_a(x, \zeta_k) e^{\zeta_k \tilde{t}} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{N_a(x, \zeta_k)}{t_{\kappa} R'(\zeta_k)} e^{\zeta_k \tilde{t}} \right), \quad (46)$$

а суммирование в (44) можно вести по чётным номерам $k = 2n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) для комплексно-сопряжённых ζ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Учитывая (21), (22), (35), (37), (38) и (44), (45), найдём

$$f_a(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_a(x, z)}{t_{\kappa} R'(z)} e^{z\tilde{t}} dz = \sum_{k=0}^{\infty} B(x, \zeta_k) e^{\zeta_k \tilde{t}}. \quad (47)$$

Решения задачи (21), (34), (37) запишем теперь в виде:

$$T(x, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\hat{V}}{\alpha h} \sum_{k=0}^{\infty} B_T(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \quad (48)$$

$$u(x, t) = -\Delta(t) \frac{x}{h} + \sum_{k=0}^{\infty} B_u(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \quad (49)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \left(\Delta(t) - \sum_{k=0}^{\infty} B_{\sigma}(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t) \right), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (50)$$

где $B_a(x, z)$ вычисляется по формуле (45) или (46), $D(z, t)$ — с помощью выражения

$$D(z, t) = \int_0^t \Delta(\tau) \exp(z(t-\tau)/t_{\kappa}) d\tau, \quad t > 0. \quad (51)$$

Горизонтальные смещения $w(x, t)$ определяются из (4), (6), (8). После интегрирования (4) имеем формулу:

$$w(x, t) = -f \mu^{-1} x \sigma_{xx}(h, t), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0.$$

6. Анализ решений задачи. Области устойчивых и неустойчивых решений

Исследование решений задачи $T(x, t)$, $u(x, t)$, $\sigma_{xx}(x, t)$ (см. формулы (48)–(50)) показывает, что при $\operatorname{Re}(\zeta_k) < 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) они устойчивы и с увеличением времени t стремятся к виду, отвечающему стационарному состоянию. Если хотя бы у одного ζ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) действительная часть положительна ($\operatorname{Re}(\zeta_k) > 0$), то амплитуда решения неограниченно возрастает при $t \rightarrow \infty$ и осциллирует с частотой $\operatorname{Im}(\zeta_k)$, что свидетельствует о неустойчивости решения. Это нетрудно показать, если предположить, что функция $\Delta(t)$ является ограниченной для $t \in (0, \infty)$:

$$m < \Delta(t) < M, \quad m, M > 0.$$

С учётом этого интеграл в (51) вычисляется, и справедлива оценка:

$$|D(z,t)| \geq m \left| \frac{1 - e^{zt}}{z} \right|.$$

В комплексной плоскости z траектории $\zeta_k(\hat{V})$ ($k = 0, 1$), находящиеся в левой полуплоскости, отвечают устойчивым решениям, и области I, II называются, соответственно, областями устойчивых решений. Области III, IV, располагающиеся в правой полуплоскости, являются областями неустойчивых решений задачи, так как в области III $\lim_{t \rightarrow \infty} T(h,t)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{xx}(h,t)$ не существуют, а в области IV — равняются бесконечности.

Области I–IV устойчивых и неустойчивых решений задачи компактно представимы в пространстве безразмерных параметров \hat{V} , k_w , Bi. Так, на рисунке 3 на плоскости \hat{V}, k_w с логарифмической вертикальной шкалой изображены все четыре области устойчивых и неустойчивых (закрашены) решений задачи при фиксированном значении Bi. Границы областей показаны сплошными линиями.

Как выше отмечалось, существенное влияние на изменение областей I–IV и их границ оказывают параметры \hat{V} и k_w . При $k_w \rightarrow 0$ границы всех областей сходятся в точке $\hat{V} = 2Bi/(2 + Bi)$.

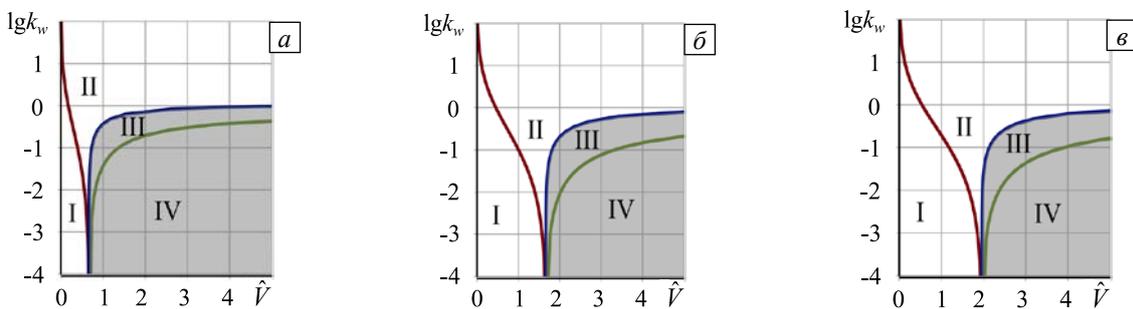


Рис. 3. Области устойчивых (I, II) и неустойчивых (III, IV) решений задачи при фиксированных значениях Bi: 1 (a); 10 (б); 100 (в)

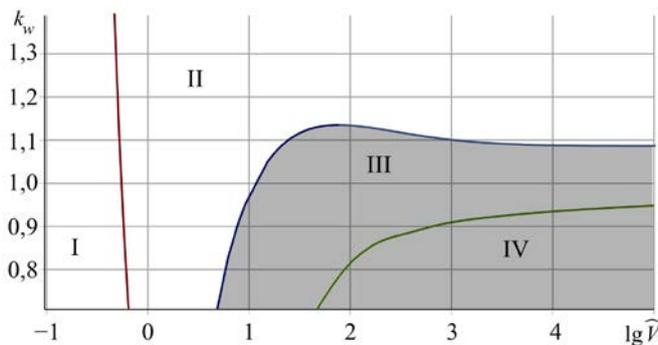


Рис. 4. Области устойчивых и неустойчивых решений при Bi = 100

Зафиксировав k_w ($0 < k_w < 1$) и положив $Bi = 100$, проведём прямую, параллельную оси \hat{V} . Прямая пересечёт, начиная с $k_w < 0,9$, границы всех четырёх областей поочередно: I→II→III→IV. На специальном рисунке 4 с равномерной шкалой по k_w при $k_w > 1$ видно, что по горизонтали области проходятся в порядке I→II→III (например при $k_w = 1,05$) или I→II→III→II (при $k_w = 1,1$). При $k_w > 1,15$ горизонталы будут пересекать границы областей только в порядке I→II.

7. Численный анализ полученных решений

Численный анализ решений задачи — температуры $T(x,t)$, износа $u_w(t)$, напряжений $\sigma_{xx}(x,t)$, осуществлён в пространстве безразмерных параметров \hat{V} , k_w , Bi. Для запуска процесса износа задавался максимальный уровень проседания в покрытие — $\Delta_0 = 0,1h$, жёсткой полуплоскости I, а также закон её внедрения — $\Delta(t)$, состоящий из активной (при $0 < t < t_\varepsilon$) и пассивной (при $t_\varepsilon < t < \infty$) фаз, описываемых, например, формулами

$$\Delta(t) = \Delta_0 \begin{cases} -1 + e^{\varepsilon t}, & 0 < t < t_\varepsilon; \\ 1, & t_\varepsilon < t < \infty, \end{cases} \quad (52)$$

где $t_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \ln 2$ — время окончания активного участка внедрения ($\varepsilon > 0$ — произвольный параметр).

На рисунке 5 приведены графики изменения температуры $T(h,t)$ (48), износа $u_w(t)$ (49) и (5), контактных напряжений $p(t) = -\sigma_{xx}(h,t)$ (50), возникающих и развивающихся во времени на скользящем термофрикционном контакте между жёстким материалом и покрытием из стали при следующих термомеханических характеристиках: $\mu = 25,6$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\kappa = 5,9 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\alpha = 14 \cdot 10^{-6}$ 1/град, $K = 21$ Вт/(м·град), $f = 0,15$, $k = 29,9$ кВт/(м²·град), $h = 5$ мм, $K^* = 5,479 \cdot 10^{-12}$ м²/Н. При этом безразмерные параметры k_w и Bi принимали значения $k_w = 0,75$, $Bi = 0,714$, а значения безразмерного параметра \hat{V} и соответствующие им скорости скольжения V для различных графиков на рисунке 5 даны в таблице. Время окончания активного участка внедрения в рассматриваемом случае задавалось равным 90 с ($t_e = 90$). Для трёх значений \hat{V} из области I (см. Табл.), где ζ_0 и ζ_1 — действительные отрицательные числа, на рисунке 5а приводятся графики температуры $T(h,t)$, износа $u_w(t)$, контактных напряжений $p(t) = -\sigma_{xx}(h,t)$. Видно, что это монотонные, знакопостоянные функции, непрерывные на всем промежутке износа, и только напряжения терпят излом при $t = t_e = 90$ с. Рисунок 5б содержит графики $T(h,t)$, $u_w(t)$ и $p(t)$ также для трёх значений \hat{V} (Табл.) из области II, в которой ζ_0 и ζ_1 являются комплексно-сопряжёнными числами. Графики $T(h,t)$ и $p(t)$ характеризуются тем, что они не монотонны, совершают гармонические колебания. Износ поверхности покрытия на величину $0,1h$ заканчивается при $t = t_w$, когда напряжения обращаются в ноль ($p(t_w) = -\sigma_{xx}(h,t_w) = 0$). График износа $u_w(t)$ представляет собой монотонную знакопостоянную функцию с незначительной монотонной модуляцией в интервале времени $0 < t < t_e$.

На рисунке 5в графики $T(h,t)$, $u_w(t)$ и $p(t)$ представлены для трёх значений \hat{V} из области III (Табл.). Можно заключить, что они изображают гармонические знакопеременные функции с растущей амплитудой. Отсюда следует, что в области III они не отражают физический смысл температуры, износа и напряжений, а пределы $\lim_{t \rightarrow \infty} T(h,t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} u_w(t)$ не существуют, что говорит о неустойчивости решений задачи в области III.

Рисунок 5г содержит графики $T(h,t)$, $u_w(t)$, $p(t)$ для трёх \hat{V} из области IV (Табл.). Все графики имеют вид растущих со временем экспонент, что не соответствует физическому смыслу названных параметров, при этом $\lim_{t \rightarrow \infty} T(h,t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_w(t) = \infty$, так как ζ_0 и ζ_1 находятся на положительной части действительной оси, что говорит о неустойчивости решений задачи в области IV.

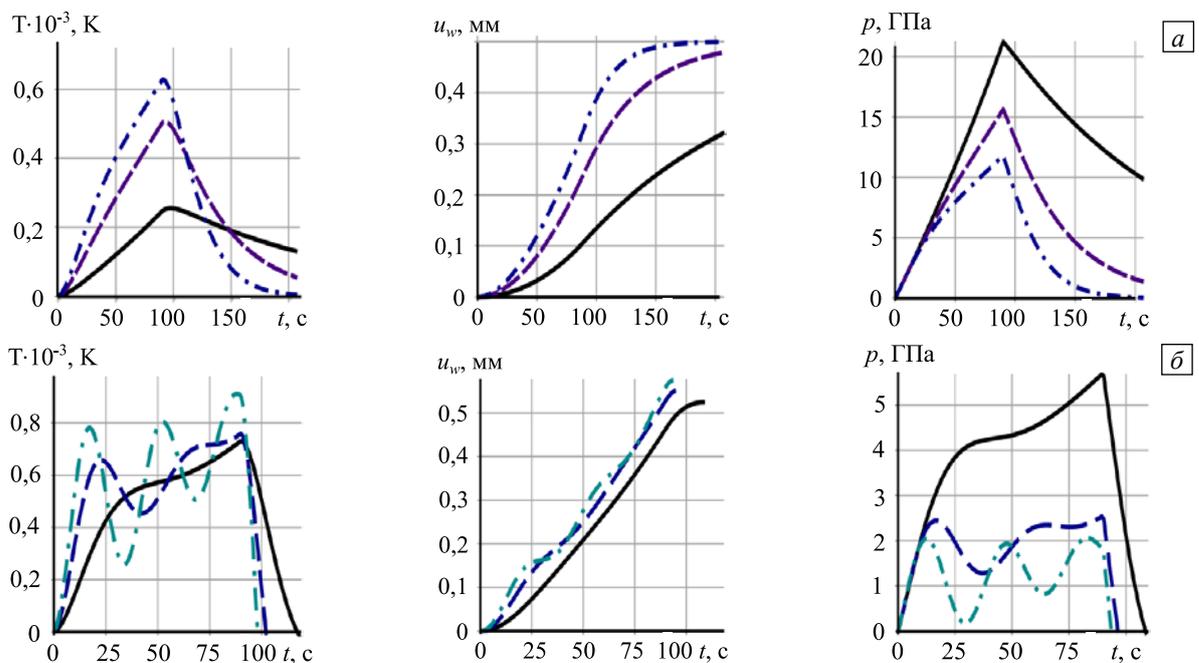


Рис. 5. Графики температуры $T(h,t)$, износа $u_w(t)$, контактных напряжений $p(t) = -\sigma_{xx}(h,t)$ для различных областей I–IV: I (а), II (б), III (в), IV (г) при $k_w = 0,75$, $Bi = 0,714$, \hat{V}_k ($k = 1,2,3$) из таблицы; \hat{V}_1 – сплошная линия, \hat{V}_2 – штриховая, \hat{V}_3 – штрихпунктирная

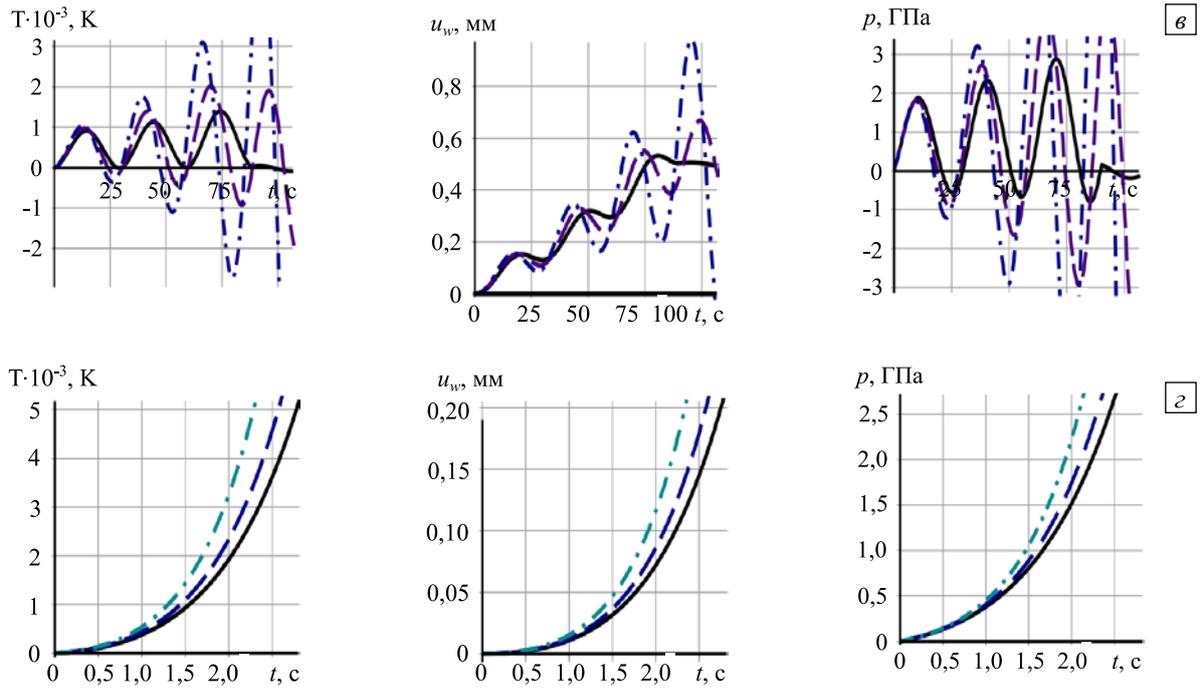


Рис. 5. Продолжение

Таблица. Значения \hat{V}_k и соответствующих им V_k ($k=1, 2, 3$) из областей I–IV

k \ Область	\hat{V}_k				$V_k, \text{ мм/с}$			
	I (a)	II (б)	III (в)	IV (г)	I (a)	II (б)	III (в)	IV (г)
k = 1	0,035	0,375	1,875	20,625	0,421	4,507	22,536	247,897
k = 2	0,095	0,875	2,125	22,375	1,142	10,517	25,541	268,930
k = 3	0,155	1,375	2,375	25,375	1,863	16,526	28,546	304,988

На рисунке 6 приведены графики изменения температуры $T(h, t)$, износа $u_w(t)$, контактных напряжений $p(t) = -\sigma_{xx}(h, t)$, возникающих и развивающихся во времени на скользящем термофрикционном контакте между жёсткой полуплоскостью и покрытием из алюминия со следующими термомеханическими характеристиками: $\mu = 24,4 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,34$, $\kappa = 88,09 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\alpha = 22,9 \cdot 10^{-6} \text{ 1/град}$, $K = 209,3 \text{ Вт/(м}\cdot\text{град)}$, $V = 0,0952 \text{ м/с}$, $f = 0,15$, $k = 29,9 \text{ кВт/(м}^2\cdot\text{град)}$, $h = 5 \text{ мм}$, $K^* = 1,957 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$, которым отвечают значения безразмерных параметров: $\hat{V} = 1,6$, $k_w = 1$, $Bi = 0,714$. Сплошными линиями обозначены кривые в интервале времени $0 < t < t_\epsilon$ где $t_\epsilon = 5 \text{ с}$, штриховыми — в интервале $0 < t < t_\epsilon$, где $t_\epsilon = 10 \text{ с}$. Номера на графиках соответствуют: 1 — $\Delta_0 = 0,1h = 0,5 \text{ мм}$, 2 — $\Delta_0 = 0,08h = 0,375 \text{ мм}$, 3 — $\Delta_0 = 0,05h = 0,25 \text{ мм}$.

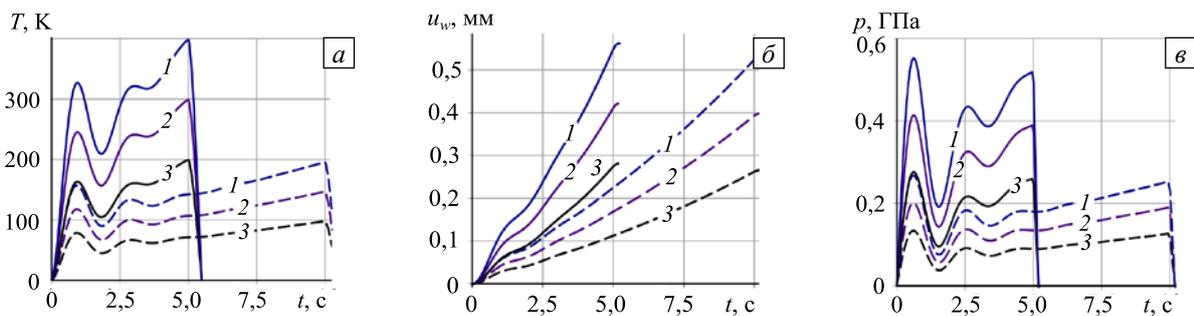


Рис. 6. Графики температуры $T(h, t)$ (а), износа $u_w(t)$ (б), контактных напряжений $p(t) = -\sigma_{xx}(h, t)$ (в) для $t_\epsilon = 5 \text{ с}$ (сплошные линии) и $t_\epsilon = 10 \text{ с}$ (штриховые линии)

Зависимости с рисунка 6, соответствующие II-й области устойчивых решений задачи, являются изображением непрерывных функций со знакопеременной производной для $T(h, t)$ и $p(t) = -\sigma_{xx}(h, t)$, а зависимости износа $u_w(t)$ монотонны в интервале времени $0 < t < t_w$, что соответствует их физическому смыслу.

8. Заключение

Разработанные методы исследования позволили провести:

- подробный анализ областей устойчивых и неустойчивых решений задачи со скользящим термофрикционным контактом в случае учёта износа в пространстве безразмерных параметров \hat{V} , k_w , Bi ;
- детальное изучение свойств точных как устойчивых, так и неустойчивых решений задачи — температуры, износа и напряжений — на скользящем термофрикционном контакте;
- параметрическую оптимизацию процесса износа по различным параметрам задачи: температуре, износу, напряжениям, толщине покрытия, относительной скорости скольжения на контакте и другим, часто встречающимся в приложениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-07-00271-а, 14-07-00705-а, 16-07-00929-а), а также Совета по грантам Президента РФ для молодых ученых и аспирантов (стипендия № СП-137.2015.1).

Литература

1. Barber J.R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids // P. Roy. Soc. Lond. A Mat. – 1969. – Vol. 312. – P. 381-394. DOI
2. Dow Th.A., Burton R.A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear // Wear. – 1972. – Vol. 19, no. 3. – P. 315-328. DOI
3. Burton R.A., Nerlikar V., Kilaparti S.R. Thermoelastic instability in a seal-like configuration // Wear. – 1973. – Vol. 24, no. 2. – P. 177-188. DOI
4. Мороз В.А., Черский И.Н. Термоупругая неустойчивость фрикционного контакта штампов с полупространством // Трение и износ. – 1985. – Т. 6, № 1. – С. 27-38.
5. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability // P. Roy. Soc. Lond. A Mat. – 2006. – Vol. 462. – P. 2161-2176. DOI
6. Галин Л.А., Горячева И.Г. Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа // ПММ. – 1977. – Т. 41, № 5. – С. 807-812. (English version DOI).
7. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. – 1990. – Т. 11, № 1. – С. 24-28.
8. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. – 1992. – Т. 13, № 1. – С. 154-160.
9. Евтушенко А.А., Пырьев Ю.А. Влияние изнашивания на развитие термоупругой неустойчивости фрикционного контакта // МТТ. – 1997. – № 1. – С. 114-121.
10. Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A. A model of thermoelastic dynamic contact in conditions of frictional heat and wear // J. Theor. Appl. Mech. – 1998. – Vol. 36, no. 2. – P. 305-320. (URL: <http://www.ptmts.org.pl/1998-2-olesiak-p.pdf>).
11. Afferrante L., Ciavarella M. Thermo-elastic dynamic instability (TEDI)—a review of recent results // J. Eng. Math. – 2007. – Vol. 61, no. 2. – P. 285-300. DOI
12. Abbasi S., Teimourimanesh S., Verneresson T., Sellgren U., Olofsson U., Lundén R. Temperature and thermoelastic instability at tread braking using cast iron friction material // Wear. – 2014. – Vol. 314, no. 1-2. – P. 171-180. DOI
13. Shpenev A.G., Kenigfest A.M., Golubkov A.K. Theoretical and experimental study of carbon brake discs frictionally induced thermoelastic instability // Springer Proceedings in Physics. – 2016. – Vol. 175. – P. 551-559. DOI
14. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Волков С.С., Васильев А.С. Термоупругодинамическая неустойчивость решения контактной задачи для покрытия с учетом тепловыделения от трения // Вестник ДГТУ. – 2014. – Т. 14, № 4. – С. 17-29. DOI
15. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Айзикович С.М. Динамическая и квазистатическая неустойчивость скользящего термофрикционного контакта // Трение и износ. – 2016. – Т. 37, № 3. – С. 280-289. (English version DOI).
16. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. – Киев: Наукова думка, 1965. – 204 с.
17. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 409 с.
18. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
19. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 288 с.
20. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 448 с.

References

1. Barber J.R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids. *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.*, 1969, vol. 312, pp. 381-394. DOI
2. Dow T.A., Burton R.A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear. *Wear*, 1972, vol. 19, no. 3, pp. 315-328. DOI

3. Burton R.A., Nerlikar V., Kilaparti S.R. Thermoelastic instability in a seal-like configuration. *Wear*, 1973, vol. 24, no. 2, pp. 177-188. DOI
4. Morov V.A., Cherskii I.N. Termouprugaya neustojchivost' friktsionnogo kontakta shtampov s poluprostranstvom [Thermoelastic instability of friction contact of stamps with the halfspace]. *Trenie i iznos – Journal of Friction and Wear*, 1985, vol. 6, no. 1, pp. 18-27.
5. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability. *P. Roy. Soc. Lond. A Mat.*, 2006, vol. 462, pp. 2161-2176. DOI
6. Galin L.A., Goriacheva I.G. Axisymmetric contact problem of the theory of elasticity in the presence of wear. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 826-831. DOI
7. Aleksandrov V.M., Annakulova G.K. Kontaktnaya zadacha termouprugosti s uchetom iznosa i teplovydeleniya ot treniya [Contact problem of thermoelasticity under the conditions of wear and heat release induced by friction]. *Trenie i iznos – Journal of Friction and Wear*, 1990, vol. 11, no. 1, pp. 24-28.
8. Aleksandrov V.M., Annakulova G.K. Vzaimodeystvie pokrytyi tel s uchetom deformiruемости, iznosa i teplovydeleniya ot treniya [Interaction of the coatings of bodies allowing for deformability, wear and heat release due to friction]. *Trenie i iznos – Journal of Friction and Wear*, 1992, vol. 13, no. 1, pp. 154-160.
9. Yevtushenko A.A., Pyryev Yu.A. Vliyaniye iznashivaniya na razvitiye termouprugoy neustoychivosti friktsionnogo kontakta [The influence of wear on the development of a frictional contact thermoelastic instability]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of solids*, 1997, no. 1, pp. 114-121.
10. Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A. A model of thermoelastic dynamic contact in conditions of frictional heat and wear. *J. Theor. Appl. Mech.*, 1998, vol. 36, no. 2, pp. 305-320. (URL: <http://www.ptmts.org.pl/1998-2-olesiak-p.pdf>).
11. Afferrante L., Ciavarella M. Thermo-elastic dynamic instability (TEDI)–a review of recent results. *J. Eng. Math.*, 2007, vol. 61, no. 2, pp. 285-300. DOI
12. Abbasi S., Teimourimanesh S., Vernersson T., Sellgren U., Olofsson U., Lundén R. Temperature and thermoelastic instability at tread braking using cast iron friction material. *Wear*, 2014, vol. 314, no. 1-2, pp. 171-180. DOI
13. Shpenev A.G., Kenigfest A.M., Golubkov A.K. Theoretical and experimental study of carbon brake discs frictionally induced thermoelastic instability. *Springer Proceedings in Physics*, 2016, vol. 175, pp. 551-559. DOI
14. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Volkov S.S., Vasilyev A.S. Thermoelastodynamic instability of contact problem solution for coating considering frictional heat generation. *Vestnik of the Don State Technical University*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 17-29. DOI
15. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Aizikov S.M. Dynamic and quasi-static instability of sliding thermoelastic frictional contact. *Journal of Friction and Wear*, 2016, vol. 37, no. 3, pp. 213-220. DOI
16. Kovalenko A.D. *Vvedenie v termouprugost'* [Introduction to thermoelasticity]. Kiev: Naukova Dumka, 2010. 204 p.
17. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Integral transforms and operational calculus*. Oxford: Pergamon Press, 1965.
18. Hurwitz A., Courant R. *The theory of functions*. Springer-Verlag, 1964.
19. Brychkov Yu.A., Prudnikov A.P. *Integral transforms of generalized functions*. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1989. 343 p.
20. Zabreyko P.P., Koshelev A.I., et al. *Integral'niye uravneniya* [Integral equations]. Moscow: Nauka, 1968. 448 p.

Поступила в редакцию 18.07.2016; опубликована в электронном виде 30.12.2016

Сведения об авторах

Зеленцов Владимир Борисович, кфмн, снс, Донской государственной технической университет (ДГТУ), 344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; e-mail: vbzelen@gmail.com

Митрин Борис Игоревич, кфмн, мнс, ДГТУ; e-mail: bmitrin@dstu.edu.ru

Лубягин Игорь Анатольевич, техник, ДГТУ; e-mail: hammavet@hotmail.com