

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.35

УДК 532.529:541.182

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ЧАСТИЦАМИ ЧЕРЕЗ ЯЧЕЙКИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

М.С. Дерябина, С.И. Мартынов

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Российская Федерация

Разработана математическая модель течения вязкой жидкости в пористой среде, основанная на представлении пористой среды как системы неподвижных частиц. Сама жидкость наполнена подвижными частицами и выступает в качестве диспергированной фазы. В модели учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц, как подвижных, так и неподвижных. Для компьютерных экспериментов с такого рода течениями разработан программный комплекс. Проведены численные расчеты течения жидкости в пористой среде (грунте) на примере двух модельных структур, включавших, соответственно, 450 и 599 неподвижных частиц эффективного размера (под эффективным размером частиц понимается размер, когда при одинаковой пористости фиктивный грунт имеет такую же удельную поверхность пор, как и реальный). Размеры подвижных дисперсных частиц, помещенных в вязкую жидкость, составляли 0,3 и 0,1 размера эффективных частиц. Полученные результаты позволяют на основе рассчитанных модельных значений скорости течения жидкости и перемещения дисперсной частицы определять соответствующие числовые значения этих параметров в реальной пористой среде. Найдено, что изменение размеров дисперсной частицы не только количественно, но качественно влияет на траекторию и скорость ее движения внутри пористой структуры. На примере одной из модельных структур получен результат закупорки некоторого порового пространства подвижной частицей, что приводит к прекращению ее дальнейшего движения.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, пористая структура, гидродинамическое взаимодействие частиц, внутренние силы взаимодействия

SIMULATION OF THE FLOW OF A VISCOUS FLUID WITH PARTICLES THROUGH POROUS MEDIUM CELLS

M.S. Deryabina and S.I. Martynov

Ugra State University, Khanty-Mansiysk, Russian Federation

A mathematical model for the dynamics of a viscous fluid with particles in a porous medium has been developed using the idea of representing the environment as a system of stationary particles, through which a viscous fluid with moving particles simulating a dispersed phase flows. The model takes into account the hydrodynamic interaction of all, both mobile and fixed, particles. For computer simulation of this type of the flow, a software package is proposed. Numerical calculations of the fluid flow in a porous medium were performed for two model structures, consisting of, respectively, 450 and 599 fixed particles of the effective size. Dimensions of the dispersed particles placed in the viscous fluid were 0.3 and 0.1 of the effective particle size. Analysis of the calculated values of the fluid flow rate and the rate of displacement of dispersed particles allowed us to determine the appropriate numerical values of these parameters in a real porous medium. It has been found that by changing the size of dispersed particles, one can affect the trajectory and velocity of particle motion within the porous structure not only quantitatively, but also qualitatively. Using as an example one of the model structures, we have obtained the result indicating that some threshold space is blocked by a mobile particle, which leads to the cessation of further movement of particles.

Key words: numerical simulation, viscous fluid, porous structure, hydrodynamic particle interaction, internal interaction forces

1. Введение

Моделирование течения вязкой жидкости в пористой среде является одной из актуальных проблем механики жидкости. Это связано как с интересной с математической точки зрения сложностью самой задачи, так и с чрезвычайно широкой областью возможных приложений получаемых результатов, например, в таких областях, как извлечение нефти и газа из пласта, водоотведение и водоотбор, создание бытовых и промышленных фильтров для очистки жидкостей и других.

В мировой практике для описания движения двухфазных сред используются различные подходы, опирающиеся на фундаментальные законы физики. Общая цель всех методов состоит в необходимости учета влияния сложной структуры рассматриваемых сред на движение при тех характерных масштабах, на которых это влияние проявляет себя существенным образом. Причем это может быть как микро-, так и макромасштаб.

Наиболее распространенный подход заключается в том, что исходя из общих физических законов сохранения записываются дифференциальные уравнения для макроскопического масштаба данной системы, которые решаются аналитически и численно при заданных значениях ее физических параметров, определяемых экспериментально. Однако для реальных дисперсных систем экспериментальное нахождение параметров и их включение в расчеты затруднено вследствие как уникальности самих систем, так и сложности воспроизведения в лабораторных экспериментах параметров, характеризующих эту

систему в естественных условиях. Примером такого подхода служит моделирование фильтрации жидкости на основе закона Дарси, полученного в XIX веке, или его модификаций. Причем в последние годы в связи с развитием компьютерных технологий наблюдается активное применение такого рода численных методов при исследовании фильтрации многофазной жидкости в пористой среде [1–4]. Вместе с тем совершенствование вычислительной базы открыло дорогу и другим подходам к изучению фильтрации многофазной жидкости. Одним из интенсивно прогрессирующих методов является метод решеточного уравнения Больцмана [5, 6]. В соответствии с ним предполагается, что жидкость состоит из микрочастиц (их размер превышает размеры молекул, но меньше размеров частиц структуры), расположенных в узлах некоторой правильной решетки и образующих решеточный газ. Для описания динамики решеточного газа используется кинетическое уравнение Больцмана. Это довольно общий метод, позволяющий, кроме течения жидкости при малых числах Рейнольдса, описывать процессы переноса тепла, а также обтекание тел со сложной геометрией. Минус этого метода — его сложность.

С созданием новых компьютерных технологий все более важная роль отводится численному моделированию, дающему возможность рассматривать течения в пористой среде на масштабе пор [7–9]. В последнем случае задача сводится фактически к прямому численному решению уравнений гидродинамики в некоей пористой среде, геометрия которой воспроизводит структуру реального пористого материала. При этом задействуются известные методы численного решения уравнений гидродинамики и методы компьютерной томографии образца материала для демонстрации его структуры. Проблема данного подхода состоит в том, что его реализация требует значительных вычислительных ресурсов. Так, например, для цифрового представления реального образца пористого материала в виде кубика размерами в 600 мкм по каждой стороне требуется 10^9 пикселей [10]. Помимо этого, реализация самих численных методов интегрирования уравнений гидродинамики с граничными условиями на сложных геометрических поверхностях — также непростая задача. И она еще больше усложняется, когда в жидкости присутствуют подвижные диспергированные частицы, и расчет необходимо проводить на реальном масштабе пор. Даже в последнее время, когда возможности вычислительной техники выросли, решение методом конечных элементов задач с большим числом обтекаемых поверхностей требует значительного объема вычислений.

Интерес к обозначенной тематике связан и с теоретическими проблемами построения моделей на основе усредненных уравнений течения жидкости. Применительно к пористым средам это означает, что необходимо исследовать процессы, например массопереноса, на масштабе пористой ячейки, а затем находить средние значения параметров на масштабе, много большем размера ячейки, но существенно меньшем, чем размер пласта [10].

Таким образом, не существует метода, достаточно точного и при этом несложного, позволяющего изучать фильтрацию жидкости, несущей частицы, с учетом взаимодействия этих частиц между собой и с пористой структурой. Трудности моделирования возрастают при увеличении числа частиц, взаимодействующих между собой, что сказывается на практической реализации вычислительных схем известными методами. Поэтому получение новых аналитических и численных результатов в этой области по-прежнему остается актуальной задачей.

В работе [11] был предложен, а затем развит в [12] метод решения задачи гидродинамического взаимодействия N частиц в вязкой жидкости. Метод базируется на записи решения уравнений Стокса в виде ряда, члены которого содержат тензорные коэффициенты. В итоге задача сводится к решению алгебраической системы уравнений для скалярных функций, входящих в тензорные коэффициенты. Был приведен вид самих тензоров в зависимости от скорости потока жидкости, разложение скалярных функций по малому параметру, а также результаты численных расчетов для разных частных случаев течения жидкости. Этот метод был модифицирован в [12] таким образом, что каждая частица из множества N рассматривается как помещенная в поток, образованный основным течением и возмущениями от остальных частиц, и решение задачи представляется в виде, аналогичном случаю одиночной частицы в потоке. Метод тестировался на многочисленных известных теоретических и экспериментальных результатах по динамике не только частиц, но и капель. Собственно, этот метод применим к решению задач взаимодействия большого числа частиц в любых внешних полях, для моделирования которых используются уравнения Пуассона и Лапласа. Поэтому он нашел приложение к решению задач взаимодействия поляризующихся или намагничивающихся частиц во внешнем электрическом или магнитном поле. Кроме того, благодаря этому методу установлены результаты для конечного числа взаимодействующих твердых частиц и капель в различных потоках как вязкой, так и идеальной несжимаемой и сжимаемой жидкости. Метод позволяет решать задачи динамики большого числа частиц в вязкой жидкости при наличии плоской стенки. Для динамики частиц в быстропеременных потоках вязкой жидкости и внешних полях разработан аналогичный подход. Обзор публикаций по данной теме содержится в [13].

В работе [14], исходя из результатов, полученных авторами ранее, предлагается метод, основанный на представлении динамики агрегата как динамики системы частиц, образующих его, при учете как

внутренних сил или наложенных связей, которые удерживают частицы в агрегате, так и сил гидродинамического взаимодействия между ними. Метод дает хорошее согласование с экспериментом. Аналогичный подход может быть использован и при исследовании фильтрации через пористую среду вязкой жидкости с частицами. Для решения этой задачи пористая среда заменяется большим числом неподвижных полидисперсных частиц, имитирующих структуру пористой среды. Движение частиц, играющих роль включений в жидкость, происходит в результате течения жидкости через модельную структуру. В расчет берется взаимодействие частиц–включений между собой и с частицами структуры.

2. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается пористая среда — фиктивный грунт, состоящий из N_1 твердых сферических частиц, образующих случайную структуру в объеме V и помещенных в несжимаемую жидкость плотностью ρ и вязкостью η . Частицы имеют эффективный радиус a . Предполагается, что на частицы наложены связи, препятствующие их поступательному и вращательному движению. Как возможный вариант постановки задачи — наличие в жидкости, вдали или вблизи от описанной структуры частиц, плоской стенки, моделирующей непроницаемую поверхность, вдоль которой происходит течение со скоростью U . Внутри структуры помещается N_2 частиц–включений радиусом b , которые могут поступательно и вращательно перемещаться в жидкости, при этом $b < a$. Эти частицы представляют собой вторую фазу в жидкости. Для расчета течения жидкости внутри структуры и движения системы свободных частиц b записываются уравнения движения жидкости и каждой частицы с учетом сил и моментов, связанных с гидродинамическим взаимодействием всех частиц и сил реакции связей.

Ограничимся случаем малых чисел Рейнольдса. Система уравнений для вязкой жидкости имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Должны выполняться следующие граничные условия:

– на поверхности неподвижной частицы с номером k

$$\mathbf{u} = 0, \quad |\mathbf{x}^k| = a \quad (k = 1, \dots, N_1); \quad (2)$$

– на поверхности подвижной частицы с номером k

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^k + \boldsymbol{\Omega}^k \times \mathbf{x}^k, \quad |\mathbf{x}^k| = b, \quad (k = 1, \dots, N_2); \quad (3)$$

– на удалении от частиц имеет место затухание возмущений

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

В соотношениях (1)–(4) принято: \mathbf{u} — скорость жидкости; \mathbf{V}^k и $\boldsymbol{\Omega}^k$ — соответственно, поступательная и угловая скорости частицы с номером k ; p_0 — невозмущенное давление в жидкости; \mathbf{x}^k — вектор, задающий положение произвольной точки среды относительно центра частицы с номером k .

Уравнения динамики для подвижных частиц в квазистационарном приближении записываются в виде:

$$\mathbf{F}^k = 0, \quad \mathbf{M}^k = 0. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{F}^k — сумма сил, \mathbf{M}^k — сумма моментов сил, действующих на подвижную частицу с номером k со стороны жидкости.

Для неподвижных частиц имеют место соотношения:

$$\mathbf{F}_1^k + \mathbf{R}^k = 0, \quad \mathbf{M}_1^k + \mathbf{T}^k = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{F}_1^k — сумма внешних сил, \mathbf{R}^k — реакции связей, удерживающих частицы в заданном положении, \mathbf{M}_1^k — сумма моментов внешних сил, \mathbf{T}^k — сумма моментов реакций, приложенных к неподвижной частице с номером k .

Метод решения системы уравнений (1), (5), (6) с граничными условиями (2)–(4), а также процедура получения выражений для гидродинамических сил и моментов, действующих на частицы со стороны жидкости с учетом гидродинамического взаимодействия всех частиц, приведены в работах [12, 14]. Согласно методу, решение системы уравнений (1), удовлетворяющих условию (4), представляется в виде суммы возмущений скорости и давления, оказываемого на несущий поток каждой частицей, положение центра которой относительно начала координат произвольно выбранной системы задается вектором \mathbf{r}^k , где k — номер частицы. Для давления и скорости записываются следующие выражения:

$$p = \sum_{k=1}^{N_1+N_2} \left[H_i^k L_i(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) + H_{ij}^k L_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) + H_{ijl}^k L_{ijl}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) + H_{ijlq}^k L_{ijlq}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) + H_{ijlqs}^k L_{ijlqs}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) + \dots \right],$$

$$\eta u_i = \sum_{k=1}^{N_1+N_2} \left[-\frac{2}{3} H_i^k L_0(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) - \frac{1}{6} H_j^k L_{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{r}^k|^2 - \frac{3}{5} H_{ij}^k L_j(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) - \frac{1}{10} H_{jl}^k L_{ijl}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{r}^k|^2 - \frac{4}{7} H_{ijl}^k L_{jil}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) - \frac{1}{10} H_{jilq}^k L_{ijlq}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{r}^k|^2 - \frac{5}{9} H_{ijlq}^k L_{jilq}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) - \frac{1}{18} H_{jilqs}^k L_{ijlqs}(\mathbf{x}-\mathbf{r}^k) \cdot |\mathbf{x}-\mathbf{r}^k|^2 - \dots \right].$$

Здесь $L_{ijl\dots s}(\mathbf{x})$ — мультиполь, вычисляемый по правилу

$$L_{ijl\dots s}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right),$$

и неизвестные тензорные коэффициенты $H_i^k, H_{ij}^k, H_{ijl}^k, \dots$. Причем между гидродинамической силой и моментом гидродинамической силы, действующими на частицу структуры с номером k , и тензорными коэффициентами имеется связь вида:

$$F_i^k = 4\pi H_i^k, \quad M_i^k = \frac{12}{5} \pi \varepsilon_{ijl} H_{jl}^k.$$

Здесь ε_{ijl} — тензор Леви-Чивиты. В работе [11] представлена процедура записи тензорных коэффициентов в явном виде. Как следует из [11, 12], нахождение тензорных коэффициентов сводится к решению алгебраической системы уравнений, вытекающей из условий (2), (3). Скорости подвижных частиц находятся из условия (5), а реакции связей — из (6). Ввиду большого количества уравнений, а именно $6(N_1 + N_2) + 4$, был применен специальный программный комплекс, аналогичный тому, что использовался в работах [12, 14]. Полученная система уравнений решалась численным способом, и по найденным числовым значениям находились скорости свободных частиц, строились траектории их движения, а также определялись усилия, возникающие в связях, удерживающих частицы в структуре.

3. Моделирование динамики фильтрационного течения

Поскольку размеры частиц реального грунта и, следовательно, эффективный радиус a частиц фиктивного грунта, достаточно малы, что затрудняет нахождение численного решения системы уравнений и визуализацию результатов, то в настоящей работе, по аналогии с работой [14], прибегали к методу подобия. При вычислениях задавались размеры неподвижных частиц \hat{a} , вязкость несущей жидкости $\hat{\eta}$, а также скорость внешнего модельного потока \hat{U} . Так как плотность жидкости ρ не входит в уравнения движения жидкости и частиц явным образом, то ее значение считалось одинаковым для модельной и реальной жидкостей. А в силу того, что размерность модельных и реальных параметров совпадает, в дальнейшем модельные параметры приводятся в безразмерном виде.

Из условия подобия реального и модельного течений имеем следующее равенство, справедливое, соответственно, и для реального течения:

$$\frac{\rho \hat{v} \hat{a}}{\hat{\eta}} = \frac{\rho v a}{\eta}. \tag{7}$$

Из соотношения (7) получаем

$$v = \frac{\hat{v} \hat{a} \eta}{a \hat{\eta}}. \tag{8}$$

Поскольку программа для расчета характеристик течения жидкости через упаковку частиц использует некий промежуток времени, то необходимо найти связь между такими параметрами, как характерное время в реальном процессе фильтрации — $t = a/v$, и модельном — $\hat{t} = \hat{a}/\hat{v}$. Из соотношения (8) устанавливаем зависимость между указанными параметрами:

$$t = \frac{a^2 \hat{\eta} \hat{t}}{\hat{a}^2 \eta}.$$

Теперь, зная время движения частиц через модельную пористую структуру, можно найти время движения реальной частицы при фильтрации.

Для определения скорости течения жидкости с частицами–включениями через упаковку частиц структуры применим следующий подход. Из решения системы физических уравнений для неподвижных модельных частиц, образующих пористую структуру, для частицы с номером i получаем значения составляющих реакций связей \hat{F}_{ik} по оси k , удерживающих частицу на месте. Причем эти реакции учитывают гидродинамическое взаимодействие всех окружающих частиц, как неподвижных N_1 , так и подвижных N_2 . Для каждой неподвижной частицы записываем соотношение

$$6\pi\hat{\eta}\hat{a}\hat{v}_{ik} = -\hat{F}_{ik}. \quad (9)$$

Здесь \hat{v}_{ik} — составляющая скорости потока жидкости в окрестности структурной частицы с номером i , учитывающая гидродинамическое взаимодействие всех частиц. Другими словами, \hat{v}_{ik} — скорость самосогласованного течения жидкости, обусловленная основным потоком и возмущениями от всех частиц. Поскольку для каждой структурной частицы можно получить такого рода течение, то для всей структуры в целом можно считать, что имеется течение со скоростью потока жидкости внутри структуры, определяемой как средняя скорость всех частиц, которая находится из соотношения

$$\hat{v}_k = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} \hat{v}_{ik}}{N_1}. \quad (10)$$

С учетом равенства (9) из (10) следует выражение для средней скорости потока жидкости внутри структуры

$$\hat{v}_k = \frac{-\hat{R}_k}{6\pi\hat{\eta}\hat{a}N_1}, \quad \hat{R}_k = \sum_{i=1}^{N_1} \hat{F}_{ik}. \quad (11)$$

Аналогично записываются выражения и для величин, характерных для реального фильтрационного потока. Принимая во внимание равенства (8), (9), можно вывести соотношение для величин реакций связей \hat{R} и R в модельном и реальном течениях:

$$\frac{R}{\hat{R}} = \frac{\eta}{\hat{\eta}}. \quad (12)$$

Выражение (11) представимо и в другом виде. Вводя такие величины, характеризующие структуру, как пористость ε , удельная поверхность частиц $\hat{\delta}$, составляющая напряжения на поверхности частиц \hat{P}_i , получаем:

$$\hat{v}_k = \frac{2\hat{a}^2 \hat{P}_k \hat{\delta}}{9\hat{\eta}(1-\varepsilon)}.$$

Здесь учтены следующие соотношения:

$$\hat{P}_k = \frac{-\hat{R}_k}{4\pi\hat{a}^2 N_1}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{4\pi\hat{a}^3 N_1}{3\hat{V}_s}, \quad \hat{\delta} = \frac{4\pi\hat{a}^2 N_1}{\hat{V}_s}.$$

Под параметром \hat{V}_s понимается суммарный объем структуры и порового пространства. Необходимо отметить, что параметр пористости ε для модельной и реальной структур одинаков, так как не зависит от масштаба, а обуславливается только геометрией структуры.

Далее возможны два варианта моделирования: или, зная реальные значения параметров, задавать значения двух модельных параметров, а значение третьего находить из условия подобия; или, задавая значения всех трех модельных параметров, отыскивать один из трех реальных параметров при известных значениях двух других.

4. Результаты моделирования

Для моделирования пористой структуры и динамики внутри нее жидкости с частицами–включениями использовалась программа, аналогичная применяемой в [12, 14]. Решались две задачи с разными структурами.

Задача 1. В заданном объеме, имеющем форму параллелепипеда размерами $20 \times 20 \times 20$, случайным образом располагалось 450 частиц. Из них 449, радиусом $\hat{a} = 1$, были неподвижными за счет наложенных связей, а одна, радиусом $k\hat{a}$, считалась подвижной и размещалась внутри структуры. На рисунке 1 показан вид исследуемой структуры.

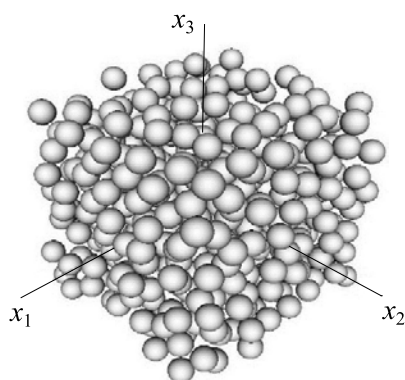


Рис. 1. Структура пористой среды, образованной неподвижными частицами

Рассматривались два размера подвижной частицы: при $k = 0,1$ и $k = 0,3$. Ее начальное положение в обоих случаях было одинаковым и определялось координатами $(0; -7,5; 0)$. Задавались модельные значения скорости невозмущенного потока $\hat{U}_2 = 0,1$ вдоль оси Ox_2 , вязкость жидкости $\hat{\eta} = 1$ и промежуток времени $\Delta t = 0,1$. Затем запускался программный комплекс.

Результаты расчетов сил реакций представлены в таблице 1. Как известно [15], приближение Стокса не позволяет находить силу сопротивления, направленную перпендикулярно скорости набегающего потока. Из таблицы видно, что составляющие \hat{R}_1, \hat{R}_3 , нормальные к скорости \hat{U}_2 , отличны от нуля. Это следствие того, что для расчетов использовалось приближенное решение. Однако погрешность вычислений, определяемая отклонением результирующей силы от направления течения потока жидкости, составила около 2%. Тем не менее, в дальнейшем принимались значения $\hat{R}_1 = 0, \hat{R}_3 = 0$, а величина силы \hat{R}_2 округлялась до целого числа — $\hat{R}_2 = -23$, то есть при нахождении сил реакций учитывалась погрешность в первом знаке после запятой. Необходимо отметить, что такая погрешность есть сумма погрешностей расчета сил реакций для каждой частицы. Следовательно, при числе частиц 449 для одной частицы погрешность в вычислениях сил реакций наблюдается в четвертом разряде после запятой. Так как скорость жидкости определяется делением силы реакции одной частицы на выражение $6\pi\hat{\eta}\hat{a}$, то погрешность вычислений для скорости подвижной частицы проявляется в пятом разряде после запятой.

В таблице 1 показаны расчетные и принятые значения составляющих скорости $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$ подвижной частицы радиусом $0,1\hat{a}$, а также отношения $\hat{u}_1/\hat{v}, \hat{u}_2/\hat{v}, \hat{u}_3/\hat{v}$, где $\hat{v} = (\hat{v}_1^2 + \hat{v}_2^2 + \hat{v}_3^2)^{1/2}$. Принятые значения сил реакций участвуют далее в нахождении средней скорости течения жидкости внутри структуры согласно выражению (11).

Как видно из таблицы 1, подвижная частица перемещается поперек среднего потока жидкости в большей степени, чем вдоль него. В этом состоит существенное отличие предлагаемого подхода к моделированию фильтрации двухфазного потока жидкости, учитывающего микроструктуру потока

Таблица 1. Расчетные и принятые средние значения параметров течения жидкости в 1-й пористой структуре при $k = 0,1$

Значения	Суммарная сила реакции частиц структуры			Средняя скорость потока			Скорость подвижной частицы		
	\hat{R}_1	\hat{R}_2	\hat{R}_3	\hat{v}_1	\hat{v}_2	\hat{v}_3	\hat{u}_1	\hat{u}_2	\hat{u}_3
Вычисленные	-0,17685185	-23,1787684	0,253065654				-0,0016033	0,000440973	-0,00251857
Принятые	0	-23	0	0	0,002718	0	-0,0016	0,0004	-0,0025
\hat{u}_j/\hat{v}							-0,5886	0,1471	-0,9197

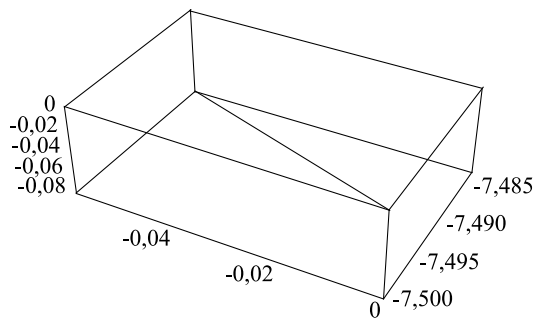


Рис. 2. Траектория движения частицы–включения из точки с координатами $(0; -7,5; 0)$ при $k = 0,1$; общее время счета $\hat{t} = 35,4$

Таблица 2. Принятые средние значения параметров течения жидкости в 1-й пористой структуре при $k = 0,3$

Значения	Скорость подвижной частицы		
	\hat{u}_1	\hat{u}_2	\hat{u}_3
Принятые	-0,0028	0,0009	-0,0026
\hat{u}_j/\hat{v}	-1,0370	0,3333	-0,9629

Траектория движения частицы–включения радиусом $0,3\hat{a}$ представлена на рисунке 3. Наблюдается существенное отличие значений скоростей более крупной частицы по сравнению с частицей меньшего размера, и, как следствие этого, большее продвижение в направлении среднего потока жидкости. Однако результаты вычислений и их анализ показали, что подвижная частица радиусом $0,3\hat{a}$ через промежуток времени $t = 9,5$ попадает в «ловушку» из частиц,

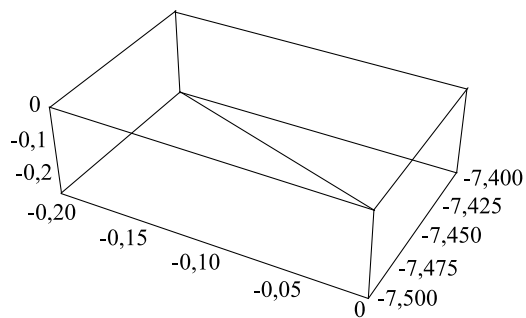


Рис. 3. Траектория движения частицы–включения из точки с координатами $(0; -7,5; 0)$ при $k = 0,3$; общее время счета $\hat{t} = 9,5$

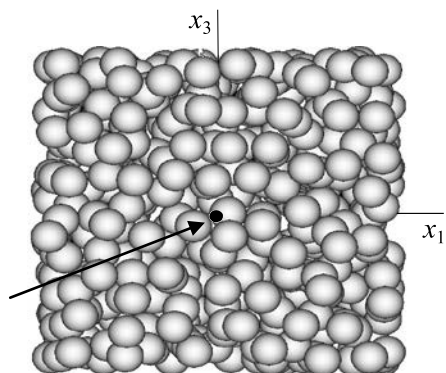


Рис. 4. Сечение структуры 1 с «застывшей» частицей при $k = 0,3$

вязкой жидкости внутри пористой структуры, от подхода, использующего средние величины характеристик течения. Обобщенные результаты расчета динамики подвижной частицы представлены на рисунке 2 в виде траектории ее движения.

Аналогичные приведенным выше результаты получены для подвижной частицы радиусом $0,3\hat{a}$. Принятые значения составляющих скорости \hat{u}_1 , \hat{u}_2 , \hat{u}_3 , а также отношения \hat{u}_1/\hat{v} , \hat{u}_2/\hat{v} , \hat{u}_3/\hat{v} содержатся в таблице 2 (учтена точность вычислений).

образующих пористую структуру, и не может двигаться дальше. Используемый программный комплекс позволяет визуализировать движение, происходящее внутри структуры, и сделать вывод о том, что частица «застыла» в пористой структуре. Возникшая ситуация продемонстрирована на рисунке 4, где представлено сечение Ox_1x_3 1-й структуры, на котором стрелка указывает на «застывшую» частицу. Скорость основного потока перпендикулярна данному сечению и направлена вдоль оси Ox_2 . Видно, что частица–включение находится между тремя неподвижными частицами структуры.

Задача 2. Рассматривалась еще одна структура в качестве модели пористой среды. В заданном объеме, имеющем форму параллелепипеда размерами $24 \times 24 \times 24$, случайным образом располагалось 600 частиц. Из них 599 были неподвижными за счет наложенных связей и имели радиус $\hat{a} = 1$, а одна частица (радиусом $k\hat{a}$) считалась подвижной и находилась внутри структуры.

Вид полученной структуры аналогичен приведенному на рисунке 1. Отличие от предыдущей структуры заключалось в том, что структура 2 была менее плотной, чем 1-я. Если для модельной структуры 1 коэффициент пористости равнялся $\varepsilon = 0,7649$, то для новой он составил $\varepsilon = 0,8185$. Вообще говоря, подобного рода внутреннее строение представляют

Таблица 3. Принятые средние значения параметров течения жидкости во 2-й пористой структуре при $k = 0,1$

Значения	Средняя скорость возмущенного потока			Скорость подвижной частицы		
	\hat{v}_1	\hat{v}_2	\hat{v}_3	\hat{u}_1	\hat{u}_2	\hat{u}_3
Принятые	0	0,002865	0	-0,0047	-0,00003	0,0005
\hat{u}_j/\hat{v}				-1,6405	-0,0104	0,1745

собой фракталы, имеющие в центре упаковку частиц более плотную, чем по краям. Они очень пористы именно за счет частиц, находящихся по их краям на большом расстоянии друг от друга.

Расчёты проведены при двух модельных размерах подвижной частицы: $k = 0,1$ и $k = 0,3$. Начальное положение частицы в обоих случаях было одинаковым и определялось координатами $(-4; -7,4496; 3)$. Задавались модельные значения скорости невозмущенного потока $\hat{U}_2 = 0,1$ вдоль оси Ox_2 , вязкость жидкости — $\hat{\eta} = 1$, и промежуток времени — $\Delta t = 0,1$. Результаты, полученные после реализации задачи 2 при меньшем размере частицы, показаны в таблице 3. Фактическая скорость в направлении оси Ox_2 не превышала уровня погрешности, и ее считали равной нулю.

Обобщенные результаты вычислений динамики подвижной частицы представлены в виде траектории ее движения (см. Рис. 5). Небольшое отрицательное смещение частицы связано с принятой погрешностью, и можно считать, что частица перемещается только поперек среднего потока. Очевидно, что такой результат обусловлен тем, что частица-включение находится вблизи крупной частицы из структуры, и ей необходимо обогнуть структурную частицу по траектории, исключаяющей перемещение по потоку.

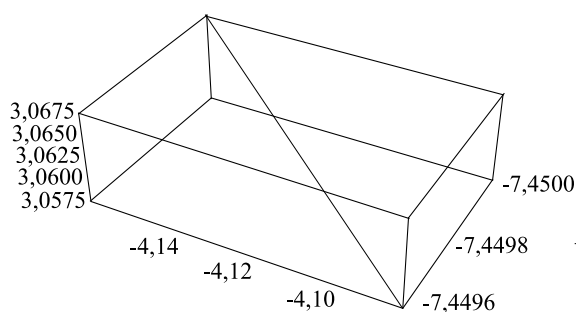


Рис. 5. Траектория движения частицы-включения из точки с координатами $(-4; -7,4496; 3)$ при $k = 0,1$; общее время счета $\hat{t} = 2,1$

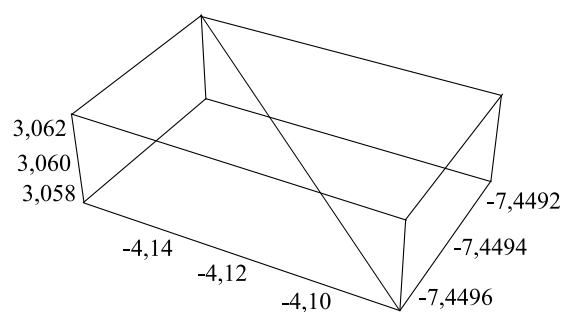


Рис. 6. Траектория движения частицы-включения из точки с координатами $(-4; -7,4496; 3)$ при $k = 0,3$; общее время счета $\hat{t} = 3,7$

Таблица 4. Принятые средние значения параметров течения жидкости во 2-й пористой структуре при $k = 0,3$

Значения	Скорость подвижной частицы		
	\hat{u}_1	\hat{u}_2	\hat{u}_3
Принятые	-0,0035	0,00003	0,0002
\hat{u}_j/\hat{v}	-1,2216	0,0104	0,0698

Для более крупной частицы (радиусом $0,3 \hat{a}$) в таблице 4 приведены расчетные и принятые значения составляющих скорости, а также соответствующие отношения. Обобщенные результаты, описывающие динамику подвижной частицы, показаны в виде траектории ее движения на рисунке 6. Здесь так же, как и в предыдущем случае, скорость вдоль оси Ox_2 имеет значение, сравнимое по величине с уровнем погрешности, и ее можно считать равной нулю. Небольшое положительное смещение частицы связано с принятой погрешностью, в целом же частица перемещается только поперек среднего потока. Аналогично предыдущим случаям, такой результат обусловлен тем, что подвижная частица находится вблизи крупной частицы из структуры, и необходимо эту частицу обойти по траектории, исключаяющей перемещение по потоку. Это наглядно демонстрирует приведенный ниже рисунок 7, на котором представлено сечение Ox_1x_3 2-й структуры с подвижной частицей, отмеченной стрелкой. Скорость основного потока направлена перпендикулярно данному сечению вдоль оси Ox_2 .

Как видно из рисунка, перед подвижной частицей находится неподвижная, которую следует обходить, смещаясь, согласно траектории движения, перпендикулярно потоку влево и вверх. Подобная картина наблюдается и в рассмотренных выше структурах с подвижной частицей. Это связано с характером

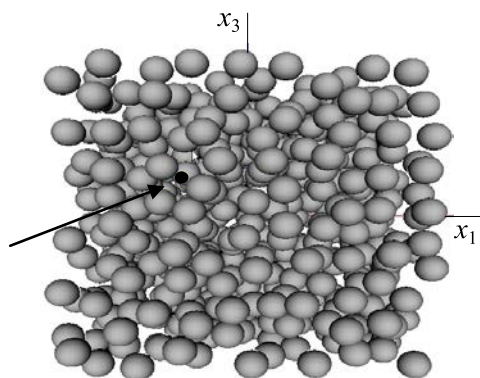


Рис. 7. Сечение структуры с подвижной частицей при $k = 0,3$

течения жидкости внутри модельных структур: составляющая скорости жидкости вдоль оси Ox_2 (по направлению внешнего потока) увеличивается при перемещении от центра к краю структуры. Поэтому, исходя из полученных выше результатов и свойств структур, можно утверждать, что подвижные частицы будут перемещаться главным образом от центра к краю структуры (перпендикулярно направлению течения внешнего потока) до тех пор, пока составляющая скорости вдоль оси Ox_2 не станет больше составляющей скорости, перпендикулярной внешнему потоку при условии, конечно, что подвижная частица не попадет в ловушку типа той, что изображена на рисунке 4.

5. Заключение

Предложена модель фильтрации двухфазной жидкости, основанная на представлении пористой структуры как системы неподвижных частиц, а диспергированной фазы — как системы подвижных частиц, находящихся в жидкости, текущей внутри пористой структуры. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц, как подвижных, так и неподвижных.

Для компьютерного исследования такого рода течений разработан программный комплекс. Проведен численный расчет течения жидкости в пористой среде на примере двух модельных структур, образованных, соответственно, из 450 и 599 частиц эффективного размера. Размеры частицы-включения в вязкой жидкости составляли 0,3 и 0,1 размера эффективных частиц.

Вычислительными экспериментами показано, что динамика подвижных частиц количественно и качественно отличается от течения осредненного потока вязкой жидкости внутри пористой структуры. Это означает, что использование осредненных уравнений фильтрации типа Дарси дает неверную картину течения двухфазной жидкости. Необходимо учитывать микротечения внутри пористой среды.

Моделирование фильтрации с учетом влияния микротечений на перенос каждой из фаз позволяет более качественно предсказывать массоперенос каждой фазы и находить способы его увеличения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-0007-р_урал_a).

Литература

1. Лаевский Ю.М., Попов П.Е., Калинин А.А. Моделирование фильтрации двухфазной жидкости смешанным методом конечных элементов // Матем. моделирование. – 2010. – Т. 22, № 3. – С. 74-90.
2. Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Моделирование задач фильтрации на гибридных вычислительных системах // Матем. моделирование. – 2012. – Т. 24, № 10. – С. 33-39.
3. Бervenо Е.В., Калинин А.А., Лаевский Ю.М. Фильтрация двухфазной жидкости в неоднородной среде на компьютерах с распределенной памятью // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. – 2014. – № 4. – С. 57-62.
4. Никифоров А.И., Садовников Р.В., Никифоров Г.А. О переносе дисперсных частиц двухфазным фильтрационным потоком // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 47-53. DOI
5. Sukop M., Thorne D. Lattice Boltzmann modeling. An introduction for geoscientists and engineers. – Berlin: Springer, 2006. – 172 p.
6. Guo Z., Zhao T.S. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 66. – 036304. DOI
7. Zaretskiy Y., Geiger S., Sorbie K. Direct numerical simulation of pore-scale reactive transport: applications to wettability alteration during two-phase flow // IJOGCT. – 2012. – Vol. 5, no. 2/3. – P. 142-156. DOI
8. Sadhukhan S., Gouze P., Dutta T. Porosity and permeability changes in sedimentary rocks induced by injection of reactive fluid: A simulation model // J. Hydrol. – 2012. – Vol. 450-451. – P. 134-139. DOI
9. Molins S. Reactive interfaces in direct numerical simulation of pore-scale processes // Rev. Mineral. Geochem. – 2015. – Vol. 80. – P. 461-481. DOI
10. Gray W.G., Miller C.T. Introduction to the thermodynamically constrained averaging theory for porous medium systems // Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics. – 2014. – 582 p. DOI
11. Мартынов С.И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // МЖГ. – 1998. – № 2. – С. 112-119.
12. Баранов В.Е., Мартынов С.И. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости // МЖГ. – 2004. – № 1. – С. 152-164. (English version DOI).
13. Мартынов С.И. Замечания по статье О.Б. Гуськова «Метод самосогласованного поля применительно к динамике вязких суспензий». ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 557-572 // ПММ. – 2015. – Т. 79, № 1. – С. 147-149. (English version DOI).

14. Мартынов С.И., Ткач Л.Ю. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости // ЖВММФ. – 2015. – Т. 55, № 2. – С. 285-294. (English version [DOI](#)).
15. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 632 с.

References

1. Laevsky Yu.M., Popov P.E., Kalinkin A.A. Simulation of two-phase fluid filtration by mixed finite element method. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2010, vol. 22, no. 3, pp.74-90.
2. Morozov D.N., Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G. Simulation of filtration problems on hybrid computer systems. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2012, vol. 24, no. 10, pp. 33-39.
3. Berveno E.V., Kalinkin A.A., Laevskii Yu.M. Two-phase fluid filtration in nonuniform media on clusters. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2014, no. 4, pp. 57-62.
4. Nikiforov A.I., Sadovnikov R.V., Nikiforov G.A. About transport of dispersed particles by a two-phase filtration flow. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 47-53. [DOI](#)
5. Sukop M., Thorne D. *Lattice Boltzmann modeling*. An introduction for geoscientists and engineers. Berlin: Springer, 2006. 172 p.
6. Guo Z., Zhao T.S. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media. *Phys. Rev. E.*, 2002, vol. 66, 036304. [DOI](#)
7. Zaretskiy Y., Geiger S., Sorbie K. Direct numerical simulation of pore-scale reactive transport: applications to wettability alteration during two-phase flow. *IJOGCT*, 2012, vol. 5, no. 2/3, pp. 142-156. [DOI](#)
8. Sadhukhan S., Gouze P., Dutta T. Porosity and permeability changes in sedimentary rocks induced by injection of reactive fluid: A simulation model. *J. Hydrol.*, 2012, vol. 450-451, pp. 134-139. [DOI](#)
9. Molins S. Reactive interfaces in direct numerical simulation of pore-scale processes. *Rev. Mineral. Geochem.*, 2015, vol. 80, pp. 461-481. [DOI](#)
10. Gray W.G., Miller C.T. Introduction to the thermodynamically constrained averaging theory for porous medium systems. *Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics*, 2014. 582 p. [DOI](#)
11. Martynov S.I. Gidrodinamicheskoe vzaimodejstvie chastits [Hydrodynamic interaction of particles]. *Izv. Ros. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza – Fluid Dynamics*, 1998, no. 2, pp. 112-119.
12. Baranov V.E., Martynov S.I. Effect of the hydrodynamic interaction of a large number of particles on their sedimentation rate in a viscous fluid. *Fluid Dyn.*, 2004, no. 1, pp. 136-147. [DOI](#)
13. Martynov S.I. Comments on the paper by O.B. Gus'kov "A self-consistent field method applied to the dynamics of viscous suspensions", JAMM Vol. 77, No. 4, pp. 401-411, 2013. *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no. 1, pp. 104-105. [DOI](#)
14. Martynov S.I., Tkach L.Yu. Simulation of particle aggregate dynamics in a viscous fluid. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 2, pp. 282-290. [DOI](#)
15. Happel J., Brenner H. *Low Reynolds number hydrodynamics*. Prentice-Hall, 1965. 553 p.

Поступила в редакцию 23.05.2016; опубликована в электронном виде 30.12.2016

Сведения об авторах

Дерябина Мария Сергеевна, асп., Югорский государственный университет (ЮГУ), 628012, Тюменская область, ХМАО-Югра, Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д. 16, корп. 3; e-mail: martynovsi@mail.ru

Мартынов Сергей Иванович, дфмн, проф., ЮГУ; e-mail: martynovsi@mail.ru