

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.34

УДК 539.3

## К ТЕОРИИ ВЛИЯНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ФАКТОРА НА ПРОЧНОСТЬ СОВОКУПНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ СЛОЕВ

В.А. Бабешко<sup>1,2</sup>, О.В. Евдокимова<sup>2</sup>, О.М. Бабешко<sup>1</sup><sup>1</sup>Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация<sup>2</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Рассматривается проблема оценки прочностных свойств объектов типа подземных сооружений, возводимых в материалах с полостями, содержащими арматуру, и в многослойных конструкциях крепления типа межслойных переборок, которые расположены параллельно друг другу и образуют некоторые совокупности. Традиционно исследования выполняются для отдельно взятого крепления, а затем принимается, что все остальные имеют те же параметры. В то же время множественность подобных элементов может стать причиной возникновения еще одного фактора нарушения прочности – фактора, связанного с возможностью образования в объекте зон с локальным напряженно-деформированным состоянием. Характеристики прочности в этих зонах могут иметь значения, превышающие запланированные. В настоящей работе на примере подземных сооружений строится теория расчета прочностных свойств таких объектов. В основе исследования лежит метод блочного элемента, опирающийся на факторизационные подходы. Проблема сводится к системе интегральных уравнений первого рода с разностным ядром, преобразуемой далее в систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Путем вычисления интегралов, описывающих ядра этих уравнений по теории вычетов, удается свести систему уравнений второго рода к системе алгебраических уравнений, доступных для аналитического решения, позволяющего выявлять локализации напряжений или перемещений.

*Ключевые слова:* напряженно-деформированное состояние, штольни, факторизация, деформируемые слои, пластины Кирхгофа, блочные элементы, интегральные и функциональные уравнения, граничные задачи

## ON THE THEORY OF GLOBAL FACTOR INFLUENCE ON THE STRENGTH OF A SET OF PARALLEL CONNECTIONS OF LAYERS

V.A. Babeshko<sup>1,2</sup>, O.V. Evdokimova<sup>2</sup> and O.M. Babeshko<sup>1</sup>*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation**Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, Russian Federation*

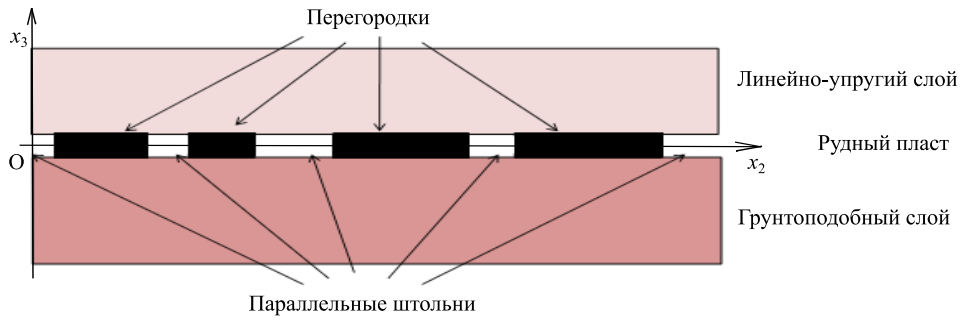
We consider the problem of estimating the strength of facilities such as underground structures placed in materials with armature cavities and fixtures such as diaphragm wall interlayers arranged in parallel in multilayer structures and forming some sets. Traditionally, studies are carried out for an individual fixture and then the parameters found are accepted for all other facilities. At the same time a plurality of such facilities may lead to the occurrence of another factor badly affecting the strength. This factor is associated with the capability to localize the state of strain in one of the structure zones, which results in exceeding the planned strength parameters. In the present work, as a practical example of the theory for calculation of the strength properties of these objects, underground structures are investigated. The block element method having its origin in factorization approaches forms the basis of our research. The problem is reduced to the system of Fredholm integral equations of the second kind. We have succeeded to reduce the system of integral equations to that of algebraic equations, which are accessible to the analytical analysis allowing finding the localization of strain and shift during the calculation of integrals describing the kernels of these equations by the theory of residue. An algorithm realizing this investigation is presented. The applicability of factorization methods for such problems is discussed.

*Key words:* stress-strain state, drifts, factorization, deformable layers, interface layer, Kirchhoff plates, block elements, differential and integral equations

### 1. Введение

Рассматривается совокупность параллельных подземных сооружений как блочная структура, состоящая из верхнего линейно-упругого слоя толщиной  $H_1$  и пласта толщиной  $h$ , моделируемого пластиной Кирхгофа. Пласт, содержащий добываемые полезные ископаемые, лежит на слое, механические характеристики среды которого полагаются грунтоподобными и позволяют моделировать его в виде постели Винклера. Предположим, что толщина  $h$  пласта много меньше  $H_1$ , что имеет место в реальных условиях разработки многих месторождений полезных ископаемых. Расположим систему координат  $Ox_1x_2x_3$  таким образом, что плоскость  $Ox_1x_2$  совпадает со срединной плоскостью пластины, а ось  $Ox_3$  направлена строго вверх. Считаем, что вдоль оси  $Ox_1$ , перпендикулярно оси  $Ox_2$ , расположено  $N$  параллельных между собой бесконечно длинных штолен (Рис. 1). Штольни находятся в рудном пласте, и ширина каждой из них равна  $b_{2n+1} - b_{2n}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), где  $(b_{2n}, b_{2n+1})$  — координаты на оси  $Ox_2$  штольни с номером  $2n$ .

Итак, рудный пласт накрыт сверху деформируемым слоем и лежит на основании Винклера, для которого связь между напряжениями  $t(x_1, x_2)$  и перемещениями верхней границы  $u_{32}(x_1, x_2)$



**Рис. 1.** Схематическое изображение блочной структуры в сечении, перпендикулярном штольням; перегородки моделируются как пластины ввиду их малой относительной толщины

задается соотношением  $u_{32}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \upsilon t(x_1, x_2)$ ,  $\varepsilon_6^{-1} \upsilon > 0$ . Здесь  $\upsilon$  — коэффициент постели Винклера. Области между штольнями с координатами  $\{b_{2n-1}, b_{2n}\}$  шириной,  $b_{2n} - b_{2n-1}$ ,  $b_1 = -\infty$ ,  $b_{2N} = \infty$  являются опорами. Допускается, что верхний упругий слой с плотностью материала  $\rho$  имеет свободную от напряжений верхнюю границу и, воздействуя на пласт сверху, создает нормальные напряжения  $g_0 = \rho g H_1$  (где  $g$  — ускорение свободного падения) и пренебрежимо малые по сравнению с ними касательные напряжения.

## 2. Формулировка задачи

Уравнения теории пластин Кирхгофа, описывающие поведение пласта, в том числе опорных зон, которые должны быть достаточно протяженными для удержания высокого давления верхнего слоя, имеют вид [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) &\equiv \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0, \\
 \mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} &\equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b}, \\
 U_{3b} &= \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b} \quad (b = \lambda, r), \\
 M_b &= -D_{b1} \left( \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right), \quad D_{b1} = \frac{D_b}{H_1^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H_1^3}, \\
 Q_b &= -D_{b2} \left( \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right), \\
 D_b &= \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H_1^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H_1}{\mu}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь:  $u_{3b}$  — вертикальные перемещения опор-пластин между штольнями, сформированных из пласта, условно помеченных индексом  $b$ , которому в будущем будут приданы значения  $\lambda$  для левой стороны опоры,  $r$  — для правой стороны и  $2n-1$  — для всей опоры; опоры занимают области  $\Omega_b$  с границами  $\partial\Omega_b$  при вертикальных статических воздействиях  $g_{3b}$  сверху и  $t_{3b}$  снизу;  $E_b$ ,  $\nu_b$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластин;  $\mu$  и  $\nu$  — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала верхнего слоя;  $M_b$  и  $Q_b$  — изгибающий момент и перерезывающая сила в плоскости  $Ox_1x_2$ ;  $h_b$  — толщины пластин;  $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$  и  $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$  — одномерный и двумерный операторы преобразования Фурье соответственно.

Перемещение нижней границы верхнего слоя происходит за счет его веса и описывается соотношением [3–5]:

$$\begin{aligned}
 u_{31}(x_1, x_2) &= \mathbf{K}_{31} g = \varepsilon_6^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{31}(x_1, -\xi_1, x_2 - \xi_2) [g(\xi_1, \xi_2) - g_0] d\xi_1 d\xi_2, \\
 k_{31}(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{31}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \\
 G(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь:  $g(\xi, \eta)$  — воздействия рудного пласта на нижнюю границу лежащего на нем слоя, то есть контактные напряжения, создаваемые в верхнем слое опорами между штольнями;  $\mathbf{K}$  — интегральный оператор; функция  $K(\alpha_1, \alpha_2)$ , называемая символом интегрального уравнения, для линейно-упругого слоя представляет собой мероморфную функцию двух комплексных переменных  $\alpha_1, \alpha_2$  (полюса функции по одной из комплексных переменных —  $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ , при фиксированной вещественной второй переменной являются дискретными комплексными числами, не лежащими на вещественной оси в статических задачах); воздействие со стороны пласта на верхнюю границу нижнего слоя обозначается  $t(\xi_1, \xi_2)$ , вертикальное перемещение этой границы при принятых предположениях есть  $u_{32}(x_1, x_2)$ .

### 3. Свойства блочных элементов пласта

В основе решения граничной задачи (1), (2) лежит метод блочного элемента в сочетании с факторизационными подходами [1–5]. Следуя им, функциональные уравнения граничной задачи для каждой опоры можно записать (см.[1, 2]) так:

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)U_{3b} = - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (3)$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}) \quad (b = \lambda, r).$$

Здесь  $\omega_b$  — внешние формы, имеющие вид:

$$\omega_b = e^{i(\alpha, x)} \left\{ - \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right] dx_1 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \right] dx_2 \right\} \quad (b = \lambda, r).$$

Интеграл в (3) вычисляется по границе опоры в направлении против часовой стрелки. Для прямолинейной границы внешняя форма выражается следующим образом:

$$\omega_b = e^{i(\alpha, x)} \left\{ - \left[ i\alpha_1 M_b D_b^{-1} - Q_b D_b^{-1} - (\alpha_2^2 + v_b \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + i\alpha_2 [\alpha_2^2 + (2 - v_b) \alpha_1^2] u_{3b} \right] \right\} dx_1.$$

Определив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, и учитывая принятые обозначения, можем представить псевдодифференциальные уравнения граничной задачи отдельно для каждой из опор с текущими номерами  $\lambda$  и  $r$ , где  $\lambda$  — опора слева от штольни, а  $r$  — справа. Пусть пластина занимает область  $\Omega_n$  ( $|x_1| \leq \infty$ ,  $b_{2n-1} \leq x_2 \leq b_{2n}$ ). Тогда имеем:

– для опоры справа

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \left\{ i\alpha_{2-} D_{r1}^{-1} M_r - D_{r2}^{-1} Q_r - (\alpha_{2-}^2 + v_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - v_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n}} dx_1 + \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{2-} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{2-}^2 + v_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - v_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})} dx_1 + \varepsilon_{53b} e^{i\alpha_{2+} b_{2n-1}} S_3(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\rangle = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ iD_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i[3\alpha_{2+}^2 + (2 - v_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2+} b_{2n-1}} dx_1 + \right. \\ \left. + \int_{\partial\Omega_r} \left\{ iD_{r1}^{-1} M_r - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + i[3\alpha_{2+}^2 + (2 - v_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})} dx_1 + \varepsilon_{53b} S'_3(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\rangle = 0;$$

– для опоры слева

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{2+} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - (\alpha_{2+}^2 + v_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - v_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2+} b_{2n-1}} dx_1 + \int_{\partial\Omega_r} \left\{ i\alpha_{2+} D_{r1}^{-1} M_r - D_{r2}^{-1} Q_r - (\alpha_{2+}^2 + v_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +i\alpha_{2+} \left[ \alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2 \right] u_{3r} \left\{ e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})} dx_1 + \varepsilon_{53b} e^{i\alpha_{2+} b_{2n-1}} S_3(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\} = 0, \\
 & \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ iD_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + i \left[ 3\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2 \right] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2+} b_{2n-1}} dx_1 + \right. \\
 & \left. + \int_{\partial\Omega_r} \left\{ iD_{r 1}^{-1} M_r - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + i \left[ 3\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2 \right] u_{3r} \right\} e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_{2+} b_{2n})} dx_1 + \varepsilon_{53b} S_3'(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\rangle = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В подынтегральных функциях принято:  $\alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2}$ ,  $\alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_1^2}$ ;  $S_3'(\alpha_1, \alpha_2) = \partial S_3(\alpha_1, \alpha_2) / \partial \alpha_2$ .

Введем следующую систему обозначений, основываясь на (4) и (5):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_\lambda &= \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Y}_r = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_r = \{z_{1r}, z_{2r}\}, \\
 \mathbf{F}_1 g &= \mathbf{F}_1(\alpha_1) g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) g, \\
 y_{1\lambda} &= D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 Q_\lambda, \quad y_{1r} = D_r^{-1} \mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_r^{-1} \mathbf{F}_1 Q_r, \\
 z_{1\lambda} &= \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda, \quad z_{1r} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_r}{\partial x_2}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r, \\
 \mathbf{K}_\lambda &= \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\}, \quad k_{1\lambda} = \varepsilon_{53\lambda} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2-})(t_\lambda - g_\lambda) = \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}), \\
 k_{2\lambda} &= \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}'(\alpha_1, \alpha_{2-}), \quad k_{1r} = \varepsilon_{53r} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2+})(t_\lambda - g_\lambda) = \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}), \quad k_{2r} = \varepsilon_{53r} S_{3r}'(\alpha_1, \alpha_{2+}).
 \end{aligned}$$

Будем считать, что боковые границы опор штолен свободны от напряжений и изгибающих моментов, то есть  $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y}_r = 0$ . Тогда, вводя обозначения

$$\mathbf{Z}_{\lambda r} = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}, z_{1r}, z_{2r}\}, \quad \mathbf{K}_{\lambda r} = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}, k_{1r}, k_{2r}\}$$

и учитывая направления дифференцирования, для решения псевдодифференциальных уравнений относительно каждой из опор получим систему уравнений вида:

$$\begin{aligned}
 (-1 + \nu_\lambda) \alpha_1^2 z_{1\lambda} - i\alpha_{2+} \left[ (1 - \nu_\lambda) \alpha_1^2 \right] z_{2\lambda} - \left\{ (-1 + \nu_r) \alpha_1^2 z_{1r} - i\alpha_{2+} \left[ (1 - \nu_r) \alpha_1^2 \right] z_{2r} \right\} e^{i\alpha_{2+} b_{2n-1}} &= -k_{1\lambda}, \\
 2\alpha_{2+} z_{1\lambda} + i \left[ (1 + \nu_\lambda) \alpha_1^2 \right] z_{2\lambda} - \left\{ 2\alpha_{2+} z_{1r} + i \left[ (1 + \nu_r) \alpha_1^2 \right] z_{2r} \right\} e^{i\alpha_{2+} b_{2n}} &= -k_{2\lambda}, \\
 (-1 + \nu_r) \alpha_1^2 z_{1r} - i\alpha_{2-} \left[ (1 - \nu_r) \alpha_1^2 \right] z_{2r} - \left\{ (-1 + \nu_\lambda) \alpha_1^2 z_{1\lambda} - i\alpha_{2-} \left[ (1 - \nu_\lambda) \alpha_1^2 \right] z_{2\lambda} \right\} e^{i\alpha_{2-} b_{2n-1}} &= -k_{1r}, \\
 2\alpha_{2-} z_{1r} + i \left[ (1 + \nu_r) \alpha_1^2 \right] z_{2r} - \left\{ 2\alpha_{2-} z_{1\lambda} + i \left[ (1 + \nu_\lambda) \alpha_1^2 \right] z_{2\lambda} \right\} e^{i\alpha_{2-} b_{2n}} &= -k_{2r},
 \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{A}_{\lambda r} \mathbf{Z}_{\lambda r} = -\mathbf{K}_{\lambda r}, \quad \mathbf{Z}_{\lambda r} = -\mathbf{A}_{\lambda r}^{-1} \mathbf{K}_{\lambda r}. \tag{6}$$

#### 4. Сопряжение пласта со слоями

Установив решения системы (6) и внося их в псевдодифференциальные уравнения, найдем полный набор граничных условий на каждой границе. После этого подставим их в правые части функциональных уравнений (3). В результате соотношения для опор могут быть представлены в следующем виде:

$$U_{2n-1} = -R^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \left[ \int_{\partial\Omega_n} \omega_{2n-1} + \varepsilon_{53b} \mathbf{F}_2(t_{2n-1} - g_{2n-1}) \right]. \tag{7}$$

Приняв теперь во внимание, что в рудном слое число опор с обозначениями сторон  $\lambda = 2n - 1$ ,  $r = 2n$  равно  $N + 1$ , в результате сопряжения этих блочных элементов с верхним линейно-упругим слоем и основанием получим следующую систему уравнений:

$$U_{31}(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_6^{-1} K_{31} \left( \sum_{n=1}^{N+1} G_{2n-1} - G_0 \right), \quad G_{2n-1} = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) g_{2n-1},$$

$$U_{32}(\alpha_1, \alpha_2) = \varepsilon_6^{-1} \nu \sum_{n=1}^{N+1} T_{2n-1}, \quad T_{2n-1} = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) t_{2n-1} \quad (n = 1, \dots, N+1).$$

Здесь  $U_{32}(\alpha_1, \alpha_2)$  — перемещения основания по закону постели Винклера;  $G_0 = \sum_{n=1}^{N+1} \mathbf{F}_2 P_{2n-1} g_0$ , где  $P_{2n-1}$  — проектор на опору с номером  $2n-1$ . Кроме этого, имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} U_{2n-1} &= -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \left[ \int_{\partial\Omega_{\lambda, 2n-1}} \omega_{\lambda, 2n-1} - \int_{\partial\Omega_{r, 2n-1}} \omega_{r, 2n-1} + \varepsilon_{53b} S_{312n-1}(\alpha_1, \alpha_2) \right], \\ \omega_{\lambda, 2n-1} &= e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n-1}} \left\{ -\left[ (\alpha_2^2 + \nu\alpha_1^2) \frac{\partial u_{\lambda, 2n-1}}{\partial x_2} + i\alpha_2 \left[ \alpha_2^2 + (2-\nu)\alpha_1^2 \right] u_{\lambda, 2n-1} \right] \right\} dx_1, \\ \omega_{r, 2n-1} &= e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n}} \left\{ -\left[ (\alpha_2^2 + \nu\alpha_1^2) \frac{\partial u_{r, 2n-1}}{\partial x_2} + i\alpha_2 \left[ \alpha_2^2 + (2-\nu)\alpha_1^2 \right] u_{r, 2n-1} \right] \right\} dx_1, \\ \langle \alpha, x \rangle &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2. \end{aligned}$$

В результате ряда преобразований приходим к следующему функциональному уравнению, описывающему поведение отдельно выбранной опоры.

$$\begin{aligned} & \left[ \varepsilon_6^{-1} K_{31} + \varepsilon_{53b} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} (1 + \nu^{-1} K_{31}) \right] G_{2n-1} = \\ & = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \left\{ \left[ Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n}} \right] + \varepsilon_6^{-1} K_{31} (\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53b} \nu^{-1}) G_0 \right\}. \end{aligned}$$

Значение  $t_{2n-1}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1} T_{2n-1}$  находится из соотношения:

$$t_{2n-1}(x_1, x_2) = \nu^{-1} \mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}} \mathbf{F}_2^{-1} K_{31} (G_0 - G_{2n-1}). \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}}$  — проектор на область  $\Omega_{2n-1}$ . Соотношение (8) можно приближенно представить в виде:  $t_{2n-1}(x_1, x_2) = \nu^{-1} \mathbf{F}_2^{-1} K_{31} (G_0 - G_{2n-1})$ . Это оправдано тем, что в статических задачах правая часть выражения (8) экспоненциально убывает при удалении от зоны контакта.

Для сведения функционального уравнения к системе интегральных уравнений введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} & \left[ \varepsilon_6^{-1} K_{31} + \varepsilon_{53b} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} (1 + \nu^{-1} K_{31}) \right] = K(\alpha, \beta), \\ \mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}} \mathbf{F}_2^{-1} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \left\{ \left[ Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n}} \right] + \varepsilon_6^{-1} K_{31} (\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53b} \nu^{-1}) G_0 \right\} &= f_{2n-1}(x_1, x_2), \\ \mathbf{P}_{\Omega_{2n}} \mathbf{F}_2^{-1} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \left\{ \left[ Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n}} \right] + \varepsilon_6^{-1} K_{31} (\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53b} \nu^{-1}) G_0 \right\} &= \varphi_{2n}(x_1, x_2), \\ U_{2n-1} &= -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \left\langle (A_{2n-1} \alpha_1^3 + B_{2n-1} \alpha_2^2 + C_{2n-1} \alpha_2 + D_{2n-1}) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + \right. \\ & \quad \left. + (A_{2n} \alpha_1^3 + B_{2n} \alpha_2^2 + C_{2n} \alpha_2 + D_{2n}) e^{i\alpha_2 b_{2n}} + \varepsilon_{53} (T_{2n-1} - G_{2n-1}) \right\rangle, \\ (A_{2n-1} \alpha_1^3 + B_{2n-1} \alpha_2^2 + C_{2n-1} \alpha_2 + D_{2n-1}) &= Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2), \\ (A_{2n} \alpha_1^3 + B_{2n} \alpha_2^2 + C_{2n} \alpha_2 + D_{2n}) &= Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

## 5. Построение и исследование интегрального уравнения

Приняв во внимание наличие  $N+1$  опоры, функциональное уравнение можно записать в виде интегрального уравнения [3, 5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}g &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \sum_{n=1}^N g_{2n-1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{n=1}^{N+1} f_{2n-1}(x_1, x_2) + \sum_{n=2}^N \varphi_{2n}(x_1, x_2), \quad -\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty, \\ k(x_1, x_2) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad G(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} d\xi_1 d\xi_2, \\ f_{2n-1}(x_1, x_2), \quad g_{2n-1}(x_1, x_2) &\in \Omega_{2n-1} \quad (b_{2n-1} \leq x_2 \leq b_{2n}, \quad |x_1| \leq \infty, \quad n = 1, \dots, N+1), \\ \varphi_{2n}(x_1, x_2) &\in \Omega_{2n} \quad (b_{2n} \leq x_2 \leq b_{2n+1}, \quad |x_1| \leq \infty), \\ f_1(x_1, x_2) &\in \Omega_1 \quad (-\infty = b_1 \leq x_2 \leq b_2, \quad |x_1| \leq \infty), \\ f_{2N+1}(x_1, x_2) &\in \Omega_{2N+1} \quad (b_{2N+1} \leq x_2 \leq \infty, \quad |x_1| \leq \infty). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь:  $\varphi_{2n}(x, y)$  — новые неизвестные;  $\Omega_k$  — носители функций в интегральном уравнении.

Для исследования и решения (9) применим метод факторизации, разработанный в [3, 5]. При этом приняты обозначения факторизации функций по параметру  $\alpha_2$  в виде суммы и в виде произведения:

$$\Psi(\alpha_1, \alpha_2) = \{\Psi(\alpha_1, \alpha_2)\}^+ + \{\Psi(\alpha_1, \alpha_2)\}^-, \quad \text{где } \{\Psi(\alpha_1, \alpha_2)\}^\pm = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\alpha_1, \eta)}{(\eta - \alpha_2)} d\eta, \quad \alpha_2 \in C^\pm,$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = K_+(\alpha_1, \alpha_2) K_-(\alpha_1, \alpha_2), \quad \text{где } K_\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \exp \left[ \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \Psi(\alpha_1, \eta)}{(\eta - \alpha_2)} d\eta \right], \quad \alpha_2 \in C^\pm.$$

Здесь  $C^+$  и  $C^-$  обозначают верхнюю и нижнюю комплексные полуплоскости соответственно. Функции  $\{\Psi(\alpha_1, \alpha_2)\}^\pm$  и  $K_\pm(\alpha_1, \alpha_2)$  регулярны в областях  $C^\pm$  и, кроме того, не имеют там нулей. Условия, налагаемые на функции для выполнения факторизаций, оговорены в [5] и в данном случае выполняются. Применяя метод факторизации в варианте работ [3, 5], сводим интегральное уравнение к решению системы одномерных интегральных уравнений с вполне непрерывным оператором в пространстве непрерывных с весом функций на всей оси.

$$\begin{aligned} X_{2p-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) + \left\{ R(\alpha_1, \alpha_2) X_{2p-3}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2(p-1)})} \right\}^+ - \left\{ R(\alpha_1, \alpha_2) X_{2p}^+(\alpha) e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2p})} \right\}^+ &= \{\Psi_2(\alpha_1, \alpha_2)\}^+, \\ X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2) - \left\{ R(\alpha_1, \alpha_2) X_{2p-3}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2(p-1)})} \right\}^- + \left\{ R(\alpha_1, \alpha_2) X_{2p}^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2p})} \right\}^- &= -\{\Psi_2(\alpha_1, \alpha_2)\}^-, \\ X_{2p-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) + \left\{ R^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) X_{2p+1}^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2(p+1)})} \right\}^- - \left\{ R^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2(p-1)})} \right\}^- &= \{\Psi_1(\alpha_1, \alpha_2)\}^-, \\ X_{2p}^+(\alpha_1, \alpha_2) + \left\{ R^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) X_{2p+1}^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2(p+1)})} \right\}^+ - \left\{ R^{-1} X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2(p-1)})} \right\}^+ &= \\ &= -\{\Psi_1(\alpha_1, \alpha_2)\}^+ \quad (p = 1, 2, \dots, N+1), \end{aligned}$$

$$X_{2N+1}^+(\alpha_1, \alpha_2) = X_{-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) = X_{2N}^+(\alpha_1, \alpha_2) = X_0^-(\alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

$$R(\alpha_1, \alpha_2) = K_+(\alpha_1, \alpha_2) K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Введена следующая система обозначений:

$$F_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} f_{2n-1}(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2, \quad \Phi_{2n-2}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{b_{2n-2}}^{b_{2n-1}} \varphi_{2n-2}(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} dx_1 dx_2,$$

$$F_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2 b_{2n-1}} = F_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2), \quad F_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2 b_{2n}} = F_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\Phi_{2n}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2 b_{2n}} = \Phi_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2), \quad \Phi_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2 b_{2n+1}} = \Phi_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2) = K_-(\alpha_1, \alpha_2) K_+(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$X_{2p-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) = K_-(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=1}^p G_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2n})}, \quad X_{2p-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) = K_+(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=p}^{N+1} G_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2n-1})},$$

$$\Psi_{2p-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=1}^p F_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2n})}, \quad \Psi_{2p+1}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=p+1}^{N+1} F_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2n-1})},$$

$$X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2) = K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=1}^{p-1} \Phi_{2n}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2n+1})}, \quad X_{2p}^+(\alpha_1, \alpha_2) = K_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=p}^{N+1} \Phi_{2n}^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2n})},$$

$$K_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=1}^p F_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2n})} + K_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=p+1}^{N+1} F_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2n-1})} = \Psi_1(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=1}^{p-1} F_{2n-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2n})} + K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n=p}^{N+1} F_{2n-1}^+(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2n-1})} = \Psi_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

С помощью вычисления вычетов эти интегральные уравнения сводятся к системе линейных алгебраических уравнений, имеющих экспоненциально убывающие коэффициенты, поэтому для расчетов достаточно ограничиться небольшим числом членов. Определив неизвестные  $X_{2p-1}^-(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2)$ , для нахождения напряжений  $g_{2p-1}(x_1, x_2)$ , действующих по всей длине опоры, и отвисания кровли  $\varphi_{2p}(x_1, x_2)$  между опорами  $2p-1$  и  $2p+1$  нужно рассчитать интегралы:

$$g_{2p-1}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1} \left[ X_{2p-1}^-(\alpha_1, \alpha_2) - X_{2p-3}^-(\alpha_1, \alpha_2) \right] K_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\varphi_{2p}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1} \left[ X_{2p}^-(\alpha_1, \alpha_2) - X_{2(p-1)}^-(\alpha_1, \alpha_2) \right] K_-(\alpha_1, \alpha_2).$$

## 6. О возможности локализации напряженно-деформированного состояния

Анализируя интегральные уравнения (9) с позиции теории выявленного в [8] высокочастотного резонанса, заключаем, что присутствие у символа интегрального уравнения  $K(\alpha_1, \alpha_2)$  чисто вещественных двумерных нулевых множеств указывает на возможность образования в подземных объектах локальных зон с иными физико-механическими свойствами и появление неограниченных резонансов при некоторых соотношениях размеров штолен и перегородок, а также на наличие специальных внешних воздействий. Если же корни оказываются комплексными, но в них присутствует не равная нулю вещественная составляющая, то локализации возможны, и связаны они с геометрическими параметрами или специальными внешними воздействиями, но без неограниченных резонансов. Наконец, при чисто мнимых корнях может иметь место локализация напряженно-деформированного состояния только при специальных внешних воздействиях. Более детально это описано в [9]. Резонансная ситуация может складываться при существовании источников высокочастотных колебаний в подобной блочной структуре.

Однако в данной работе обсуждается более простая граничная задача — статическая. Покажем, что и в этом случае, при определенных соотношениях геометрических параметров штолен и перегородок, напряженно-деформированное состояние в разных зонах такой блочной структуры может быть существенно различным. Применим к интегральным уравнениям (9) преобразование Фурье по параметру  $x_1$ . В результате система интегральных уравнений становится одномерной по параметру  $x_2$ , а символ системы интегральных уравнений — это одномерная функция  $K(\alpha_1, \alpha_2)$  параметра  $\alpha_2$  при любом фиксированном значении  $\alpha_1$ .

Рассмотрим случай, когда контактирующий с перегородками сверху линейно-упругий слой имеет в описывающем его интегральном уравнении символ вида:

$$K(u) \equiv K(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{(1-\nu)\text{sh}^2 u}{u(\text{sh}(2u) + 2u)} + \frac{\varepsilon}{u^2}, \quad u = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{u^2 - \alpha_1^2}. \quad (10)$$

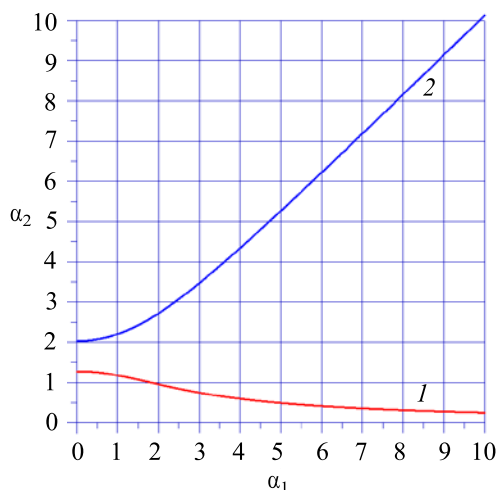


Рис. 2. Нуль символа интегрального уравнения: вещественная составляющая (кривая I), мнимая (2)

На рисунке 2 построен график функции  $\alpha_2 = \sqrt{u^2 - \alpha_1^2}$  в первом квадранте для первого нуля  $u_1 = (1,28153, 2,027)$  функции  $K(u)$  при  $\nu = \varepsilon = 0,1$ . Наличие вещественной составляющей (кривая I), свидетельствует о том, что возможны локализации контактных напряжений, вызываемые как геометрическими параметрами штолен и перегородок, так и внешними воздействиями на перегородки. Дальнейшее исследование параметров, при которых появляется глобальный фактор нарушения прочности — фактор, связанный с образованием в объекте зон с локальным напряженно-деформированным состоянием — требует конкретных данных относительно параметров блочной структуры, числа штолен, механических и геометрических параметров сред. При их присутствии представленные формулы позволяют находить параметры локализации.

## 7. Заключение

Разработанный метод оценки напряженно-деформированного состояния подземных объектов с произвольным числом параллельных штолен разной ширины может достаточно просто переноситься на подобные изделия из иных материалов и других масштабов.

Заметим, что локальное состояние штолен при добыче полезных ископаемых изучалось во многих работах, например в [6]. Условия локализации, позволяющие исследовать влияние глобального фактора на напряженно-деформированное состояние в рассматриваемых блочных структурах, определяются с использованием подхода, изложенного в [7]. Выполнив указанные там построения, можно организовать мониторинг состояния всей блочной структуры на предмет изменения напряженно-деформированного состояния как по причине изменения параметров имеющихся штолен, так и в связи с пробиванием новых.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 14-08-00404) и программы Президиума РАН № 33.

## Литература

1. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В., Федоренко А.Г., Шестопалов В.Л. К проблеме покрытий с трещинами в наноматериалах и сейсмологии // МТТ. – 2013. – № 5. – С. 39-45. (English version DOI).
2. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность // ДАН. – 2016. – Т. 466, № 6. – С. 664-669. (English version DOI).
3. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
5. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
6. Баренблатт Г.И., Христианович С.А. Об обрушении кровли при горных выработках // Изв. АН СССР. ОТН. – 1955. – № 11. – С. 73-82.
7. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О «вирусной» теории некоторых аномальных природных явлений // ДАН. – 2012. – Т. 447, № 1. – С. 33-37. (English version DOI).
8. Бабешко В.А., Ворович И.И., Образцов И.Ф. Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // МТТ. – 1990. – № 3. – С. 74-83.
9. Бабешко В.А., Ритцер Д., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О локализации энергии природных процессов и природные вирусы // ДАН. – 2013. – Т. 448, № 4. – С. 406-409. (English version DOI).

## References

1. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V., Fedorenko A.G., Shestopalov V.L. Cracked coating problem in nanomaterials and seismology. *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 514-519. DOI
2. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The problem of physical and mechanical precursors of an earthquake: Place, time, and intensity. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, no. 2, pp. 92-97. DOI
3. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains]. Moscow: Nauka, 1979. 320 p.
4. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical mixed problems of elasticity theory]. Moscow: Nauka, 1974. 456 p.
5. Babeshko V.A. *Obobshchenny metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti* [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. Moscow: Nauka, 1984. 256 p.
6. Barenblatt G.I., Khristianovich S.A. Ob obrushenii krovli pri gornykh vyrabotkakh [On roof collapse in mine workings]. *Proceedings of the Academy of Sciences of USSR. Tech. Ser.*, 1955, no. 11, pp. 73-82.
7. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Virus theory of certain anomalous natural phenomena. *Doklady Physics*, 2012, vol. 57, no. 11, pp. 442-446. DOI
8. Babeshko V.A., Vorovich I.I., Obratsov I.F. Yavlenie vysokochastotnogo rezonansa v poluogranichennykh telakh s neodnorodnostyami [High-frequency resonance in semi-infinite bodies with inhomogeneities]. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 1990, no. 3, pp. 74-83.
9. Babeshko V.A., Ritzer J., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Energy localization in natural processes and natural viruses. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 2, pp. 51-55. DOI

Поступила в редакцию 22.04.2016; опубликована в электронном виде 30.12.2016

## Сведения об авторах

Бабешко Владимир Андреевич, академик, зав. каф., Кубанский государственный университет (КубГУ), 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, д. 149; e-mail: babeshko41@mail.ru

Евдокимова Ольга Владимировна, дфмн, доц., гнс, Южный научный центр РАН, 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, д. 41; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Бабешко Ольга Мефодиевна, дфмн, КубГУ; e-mail: babeshko49@mail.ru