

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.33

УДК 539.3

## О ВЫДЕЛЕНИИ РАЗРЫВОВ В РАСЧЕТАХ ДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

А.А. Буренин<sup>1</sup>, Г.М. Севастьянов<sup>1</sup>, В.И. Штука<sup>2</sup><sup>1</sup>*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация*<sup>2</sup>*Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Российская Федерация*

Задача алгоритмического выделения близко отстоящих друг от друга разрывов деформаций решается на примере одномерных цилиндрических поверхностей разрывов (ударных волн). Ударные волны создаются в цилиндрическом слое несжимаемой нелинейной упругой среды посредством скручивающего ударного воздействия в присутствии предварительно полученных антиплоских деформаций. Деформации среды (как предварительные, так и приобретенные в результате внешнего нагружения) полагаются конечными, в качестве их меры используется тензор Альманси. Показано, что граничное ударное возмущение вызывает в среде две фронтальные поверхности разрыва деформаций: плоскополяризованную ударную волну нагрузки, увеличивающую предварительный антиплоский сдвиг, и нейтральную волну круговой поляризации, меняющую направление сдвига в соответствии с производимым воздействием. Найдены скорости распространения образующихся поверхностей разрыва в среде. Выявлено, что скорость распространения плоскополяризованной волны нагрузки зависит от предварительных деформаций среды и интенсивности граничного возмущения. Скорость распространения ударной волны круговой поляризации (нейтральной ударной волны) полностью определяется предварительными деформациями среды. Для целей алгоритмического выделения при вычислении положения поверхностей разрывов и интенсивностей разрывов на каждом временном шаге строятся специальные прифронтные лучевые разложения решений, которые встраиваются в расчетные конечно-разностные схемы, записанные для узлов сетки, не входящих в прифронтную область. Указан способ построения прифронтных лучевых разложений за поверхностями разрывов деформаций, опирающийся на рекуррентность свойств геометрических и кинематических условий совместности разрывов. Построен численный алгоритм реализации поставленной задачи и создана программа для расчета полей перемещений и компонент тензора напряжений Коши. Осуществлен вычислительный эксперимент для резиноподобного материала с заданными свойствами.

*Ключевые слова:* динамика упругой среды, численные методы, ударные волны, несжимаемая среда, метод лучевых рядов

## ON THE LOCALIZATION OF DISCONTINUITIES IN CALCULATIONS OF INCOMPRESSIBLE ELASTIC MEDIA DYNAMICS

A.A. Burenin<sup>1</sup>, G.M. Sevastyanov<sup>1</sup> and V.I. Shtuka<sup>2</sup><sup>1</sup>*Institute of Machine Engineering and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russian Federation*<sup>2</sup>*Institute of Automatics and Controlled Processes FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation*

The problem of algorithmic localization of closely spaced discontinuities of strains is considered in the present paper by the example of one-dimensional cylindrical rupture surfaces (shock waves). These shock waves are generated in a cylindrical layer of an incompressible elastic medium through the twisting impact action in the presence of preliminary antiplanar strain. We assume that strains (preliminary and acquired in the course of propagation of boundary perturbation in the environment) are finite, and the Almansi tensor is used as their measure. It is shown that the boundary shock perturbation causes in a medium two front surfaces of strain discontinuity: the plane-polarized shock wave of load, which increases the preliminary antiplane shear, and the neutral circularly polarized wave, which changes the shift direction in accordance with the impact produced. Velocity values, with which the discontinuity surfaces propagate in the elastic medium, are determined. The propagation velocity of a plane-polarized shock wave of load depends on the pre-strain in the medium and the intensity of the boundary impact. The propagation velocity of the shock wave of circular polarization (neutral shock wave) is completely determined by pre-strain in the medium. In order to determine the position of the discontinuity surfaces and calculate the intensity of discontinuities at each time step, we are building special frontline ray expansions, which are embedded in the finite-difference calculation scheme. These expansions are written for grid points outside the frontal region. A way of constructing frontline ray expansions behind the surface of the strain discontinuity is specified. It is based on the recurrence properties of geometric and kinematical compatibility conditions. A numerical algorithm and a program for calculating the displacement fields and a component of the Cauchy stress tensor are constructed for the specified problem. Results of the computational experiment for the rubber-like material with the specified properties are obtained.

*Key words:* dynamics of elastic medium, numerical methods, shock waves, incompressible medium, ray series method

### 1. Введение

Основная трудность в численных расчетах существенно нестационарных задач механики сплошных сред связана с возникновением и последующим распространением в среде поверхностей разрывов. Закономерности движения этих поверхностей определяются только из решения соответствующей краевой задачи, и потому положение таких поверхностей, а также величины разрывов обязательно должны отслеживаться на каждом временном шаге алгоритма. В газовой динамике подобные алгоритмы — их называют алгоритмами выделения разрывов — давно и хорошо известны [1–7]. Однако большинство из них в динамике деформирования применить непосредственно невозможно. Связано это главным образом с тем, что в деформируемой в условиях динамического нагружения среде одновременно присутствуют два процесса: распространение объемных деформаций (как и в газовой динамике) и

распространение деформаций изменения формы. Процессы взаимосвязаны и взаимозависимы, поэтому разрывы оказываются комбинированными. Из-за этого, например, затруднительно рассчитать распад разрыва, и потому непосредственное приложение метода выделения разрыва С.К. Годунова становится невозможным. Выход из такого положения находят в использовании схем сквозного счета [8–13] и их многочисленных модификаций. Но такой подход не является универсальным, тем более что немонотонность схем в этом случае заставляет прибегать к специальным приемам, в частности к введению искусственной вязкости, что вызывает неоправданное сглаживание разрывов. Как пример монотонной схемы отметим построенную в [10] схему второго порядка точности, свободную от указанного недостатка.

При необходимости непосредственного выделения разрывов, например, при взаимодействии волн между собой и с преградами, построение численных алгоритмов испытанными методами газовой динамики, как уже отмечалось, встречает большие трудности. В работе [14], по-видимому, впервые предложено для целей алгоритмического выделения разрывов в численных расчетах встраивать в численную разностную схему прифронтовые лучевые разложения решения. Таким способом рассчитывался процесс распространения плоских ударных волн в одномерном случае. В работе [15] этот же алгоритмический прием применен к одномерной задаче с осевой симметрией.

Здесь так же, как и в [15], рассмотрим осесимметричную задачу, но отличную в том, что принимается условие присутствия деформаций, предвещающих поверхности разрывов. Это обстоятельство приводит к тому, что передний фронт распространяющихся вглубь несжимаемой среды деформаций изменения формы разделяется на две поверхности разрывов. Особенности построения лучевых разложений при этом и способы их встраивания в разностную схему, записанную вне прифронтовой области, являются предметом настоящей публикации. Заметим, что в работе [16] построено приближенное решение задачи в аналогичной постановке, но в качестве прифронтовых разложений используются решения эволюционных уравнений, которые также можно было бы употребить для целей выделения разрывов, но только при малой интенсивности ударных волн.

Приближенный метод решения задачи динамического деформирования в форме степенного ряда по лучевой координате [8] или по времени [17], когда коэффициенты ряда находятся путем решения задачи для вытекающего из уравнений модели обыкновенного дифференциального уравнения (уравнения затухания), известен давно. Наличие достаточно полного и квалифицированного обзора [18] избавляет от необходимости вникать в историю развития этого метода. Отметим только принципиальную особенность в приложении метода тогда, когда лучевое разложение строится за поверхностью сильных разрывов (за ударной волной). При этом из-за несовпадений скоростей распространения по среде возмущений и ударных волн обыкновенные дифференциальные уравнения для коэффициентов лучевых рядов не вытекают из уравнений модели, и требуются иные подходы [19, 20]. Нужно отметить еще публикацию [21], где лучевая асимптотика использовалась для выделения разрывов в случае криволинейных и расходящихся лучей, но при распространении одной ударной волны.

## 2. Исходные модельные зависимости

Движение изотропной несжимаемой упругой среды в ее адиабатическом приближении свяжем первоначально с прямоугольной системой пространственных координат  $x_1, x_2, x_3$ . Тогда в переменных Эйлера имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho a_i, \\ a_i &= \dot{v}_i + v_j v_{i,j}, \quad \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}, \quad v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \\ v_i &= \dot{u}_i + v_j u_{i,j}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \\ \sigma_{ij} &= -P \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}} (\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ 2\alpha_{ij} &= u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь:  $u_i, v_i, a_i$  — компоненты векторов перемещений, скоростей и ускорений;  $\alpha_{ij}, \sigma_{ij}$  — компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Коши–Эйлера;  $P$  — добавочное всестороннее давление;  $\rho = \text{const}$  — плотность среды.

Система уравнений (1) окажется замкнутой, если задать упругий потенциал (плотность распределения внутренней энергии)  $W = W(I_1, I_2)$  в форме разложения в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния среды:

$$W = W(I_1, I_2) = -2\mu I_1 + bI_1^2 - \mu I_2 - aI_1^3 - (\mu - b)I_1 I_2 + \dots, \quad (2)$$

$$I_1 = \alpha_{kk}, \quad I_2 = \alpha_{ik} \alpha_{ki}.$$

Постоянную  $\mu$  соотносят обычно с модулем сдвига, тогда  $a$  и  $b$  — модули упругости третьего порядка. Сокращение числа упругих постоянных в (2) связано с характером изучаемого далее винтового движения среды [22]. Для компонент вектора перемещений в таком частном случае движения среды в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  принимаем распределения

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t).$$

Таким образом, искомыми зависимыми переменными задачи являются осевое перемещение  $u(r, t)$  и крутка  $\psi(r, t)$ . Для компонент тензора напряжений, следуя (1), получим зависимости:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \dots, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + \mu r^2 \psi_{,r}^2 - \theta_3 m u_{,r}^2, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + \mu u_{,r}^2 - \theta_3 m r^2 \psi_{,r}^2, & \sigma_{r\varphi} &= \mu r \psi_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots) = \rho h r \psi_{,r}, \\ \sigma_{rz} &= \mu u_{,r} (1 + \chi_1 m^2 + \dots) = \rho h u_{,r}, & \sigma_{\varphi z} &= r \psi_{,r} u_{,r} (\mu + \theta_3 m + \dots), \\ m &= (r \psi_{,r})^2 + (u_{,r})^2, & h &= c^2 (1 + \chi_1 m^2 + \dots), \quad c^2 = \mu / \rho, \\ \theta_1 &= (\mu + b) / 2, & \theta_2 &= 3(\mu + a - b) / 4, \quad \theta_3 = (b - \mu) / 2, \quad \chi_1 = \theta_2 / \mu. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) и далее индексами после запятой обозначены частные производные функции по соответствующим переменным.

Подстановка (3) в уравнения движения приводит к системе трех дифференциальных уравнений относительно независимых переменных  $P(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$  и  $u(r, t)$

$$\begin{aligned} P_{,r} + r^{-1} (\mu r^2 \psi_{,r}^2 + \theta_3 u_{,r}^2) + \omega (\theta_1 + 2\theta_2 m) + \dots &= r \psi_{,t}^2, & 1 \\ (1 + \chi_1 m^2) (\psi_{,rr} + 3r^{-1} \psi_{,r}) + 2\chi_1 \omega m \psi_{,r} + \dots &= c^{-2} \psi_{,tt}, & 2 \\ (1 + \chi_1 m^2) (u_{,rr} + r^{-1} u_{,r}) + 2\chi_1 \omega m u_{,r} + \dots &= c^{-2} u_{,tt}, & 3 \\ \omega &= 2 (u_{,rr} u_{,r} + r^2 \psi_{,rr} \psi_{,r} + r \psi_{,r}^2). & 4 \end{aligned} \quad (4)$$

Первое из уравнений (4) служит для вычисления добавочного давления  $P(r, t)$  по найденным из двух других уравнений функциям  $\psi(r, t)$  и  $u(r, t)$ . Многоточием в (4), как в (2) и (3), обозначены слагаемые с функциями  $\psi(r, t)$  и  $u(r, t)$  и их производными более высокого порядка, которые здесь опущены.

Передними фронтами распространяющихся по среде граничных ударных возмущений являются, как правило, ударные волны, то есть поверхности разрывов скоростей, деформаций и напряжений. Какие же поверхности разрывов при этом возникают?

Из закона сохранения импульса вытекает динамическое условие совместности разрывов:

$$[\sigma_{ij}] n_j = \rho (v_k n_k - G) [v_i]. \quad (5)$$

Здесь: квадратные скобки обозначают разрыв функции на ударной волне, так что  $[f] = f^+ - f^-$ , где  $f^+$  — значение функции непосредственно перед поверхностью разрывов, а  $f^-$  — сразу за такой поверхностью;  $n_j$  — компоненты единичной нормали в данной точке поверхности разрывов;  $G$  — скорость движения ударной волны в направлении ее нормали. В рассматриваемом случае из (5) следует

$$\begin{aligned} [\sigma_{rr}] &= 0, & 1 \\ [\sigma_{r\varphi}] &= -\rho G [v_\varphi], & 2 \\ [\sigma_{rz}] &= -\rho G [v_z]. & 3 \end{aligned} \quad (6)$$

Если в (6) подставить зависимости для напряжений из (3) и воспользоваться кинематическими условиями совместности разрывов Адамара  $[u_{,t}] = -G [u_{,r}]$ ,  $[\psi_{,t}] = -G [\psi_{,r}]$ , то получим три уравнения,

связывающих разрывы  $[u_r]$ ,  $[\psi_r]$  и  $[P]$  при неизвестной скорости  $G$ . Соотношение (6)<sub>1</sub> служит для вычисления  $[P]$  на поверхности разрывов, так же, как и (4)<sub>1</sub> — для вычисления  $P(r,t)$ , а (6)<sub>2</sub> и (6)<sub>3</sub> приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} h[r\psi_r] + (r\psi_r - [r\psi_r])[h] &= G^2[r\psi_r], & 1 \\ h[u_r] + (u_r - [u_r])[h] &= G^2[u_r], & 2 \\ [h] &= G^2[m](\chi_1(m - 2[m]) + \dots). & 3 \end{aligned} \quad (7)$$

Знаки «+» у параметров, вычисляющихся перед поверхностью разрывов, опущены, так как в (7) и далее встречаются только такие значения функций и величины разрывов. Умножим соотношение (7)<sub>1</sub> на  $[u_r]$ , (7)<sub>2</sub> — на  $[r\psi_r]$  и вычтем второе произведение из первого. Таким способом найдем конечное выражение связи между  $[u_r]$  и  $[\psi_r]$ , которое следует назвать условием существования ударных волн:

$$[h](r\psi_r[u_r] - u_r[r\psi_r]) = 0. \quad (8)$$

В несжимаемой упругой среде одномерные цилиндрические ударные волны могут распространяться только в условиях (8), согласно которым возможно существование волн двух типов.

Тун 1. Пусть выполнение (8) обеспечивается равенством нулю выражения, стоящего в круглых скобках. Тогда

$$\frac{r\psi_r}{[r\psi_r]} = \frac{u_r}{[u_r]}. \quad (9)$$

Согласно (9) разрывы пропорциональны предварительным деформациям, и, значит, данная волна является плоскополяризованной. На такой поверхности разрывов меняется скачкообразно только интенсивность разрыва без изменения направления предварительных деформаций. Когда, например,  $u_r = 0$ , то на ударной волне  $[u_r] = 0$ , и  $u_r$  остается равной нулю и за этой поверхностью разрывов. Аналогично при  $\psi_r = 0$  равен нулю разрыв  $[r\psi_r]$ , и после прохождения плоскополяризованной ударной волны  $\psi_r = 0$ . Одномерные плоские волны (ранее отмечались в [21, 23, 24]) назывались волной нагрузки. Термодинамические ограничения (аналог теоремы Цемплена для совершенного газа) в абсолютном большинстве случаев приводят к существованию только ударных волн [23], увеличивающих предварительный сдвиг, запрещая разгружающие плоскополяризованные разрывы. Для скорости распространения данной ударной волны  $G_1$ , согласно (7), можно найти

$$G_1 = \left( h - [h] + \frac{u_r}{[u_r]}[h] \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Согласно (10) скорость распространения плоскополяризованной волны нагрузки зависит от предварительных деформаций в среде и интенсивности разрывов  $[m]$  и  $[u_r]$ .

Тун 2. Существование второй ударной волны связано с выполнением (8) при условии  $[h] = [m] = 0$ . На такой поверхности разрывов интенсивность предварительного сдвига остается неизменной ( $[m] = 0$ ), и может скачкообразно поменяться только его направление. Эта поверхность разрывов названа в [21] ударной волной круговой поляризации, а в [23] — нейтральной ударной волной, являющейся изэнтропической [23], и скорость ее  $G_2$  полностью определяется величиной предварительных деформаций

$$G_2 = h^{1/2}. \quad (11)$$

Можно показать [23], что в упругой несжимаемой среде всегда справедливо неравенство:  $G_1 > G_2$ .

### 3. Постановка задачи

Пусть несжимаемая упругая среда заполняет часть пространства, расположенную между жесткими цилиндрическими поверхностями  $r = r_0$  и  $r = R$  ( $R > r_0$ ). Считаем, что на ограничивающих поверхностях выполняются условия жесткой спайки, при этом на поверхности  $r = R$  до начального момента времени  $t = 0$  перемещения отсутствуют ( $u(R,0) = 0$ ), а поверхностью  $r = r_0$  несжимаемой среде сообщено поле деформаций, связанное с краевым условием  $u(r_0,0) = u_0 = \text{const}$ . Итак, материал упругого слоя находится к моменту времени  $t = 0$  в условиях антиплоского сдвига. Из решения уравнения равновесия с учетом зависимостей (3) легко вычисляется напряженно-деформированное состояние в слое. Далее полагаем его известным.

Считаем, что, начиная с момента времени  $t = 0$ , жесткий вал ( $r \leq r_0$ ) поворачивается по закону

$$\psi(r_0, t) = \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \dots, \quad u(r_0, t) = u_0. \tag{12}$$

Такое воздействие на материал слоя приведет к распространению по нему двух ударных волн  $\Sigma_1$

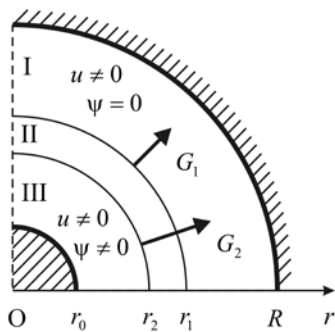


Рис. 1. Схема распространения ударных волн

(со скоростью  $G_1$ ) и  $\Sigma_2$  (со скоростью  $G_2$ ) (Рис. 1). Волна  $\Sigma_1$  вызовет только увеличение антиплоского сдвига, и, следовательно, за ней (см. область I) функция  $\psi(r, t)$  останется нулевой, поскольку сюда еще не пришло граничное возмущение. В области II окружные перемещения отсутствуют ( $\psi = \psi^{II} = 0$ ), так как ударная волна  $\Sigma_1$  является плоскополяризованной, и на ней выполняются условия (9). Окружные перемещения появятся после прохождения нейтральной ударной волны  $\Sigma_2$ , то есть только в области III, где  $u = u^{III} \neq 0$  и  $\psi = \psi^{III} \neq 0$ .

В области деформирования II представим перемещения  $u^{II}(r, t)$  в форме лучевого ряда

$$u^{II}(r, t) = u^I(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(t - t_1)^j}{j!}, \quad \kappa_j = \left[ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_1}, \quad t_1 = \int_{r_0}^r \frac{d\xi}{G_1(\xi)}. \tag{13}$$

Для скорости  $G_1$  ударной волны  $\Sigma_1$ , следуя зависимости (10), получаем

$$G_1 = c \left( 1 + \chi_1 (u_{,r}^I)^4 (5 - 10\zeta + 10\zeta^2 - 5\zeta^3 + \zeta^4 + \dots) \right), \quad \zeta = \kappa_1 (cu_{,r}^I)^{-1}. \tag{14}$$

Коэффициенты  $\kappa_j$  лучевого ряда (13) являются разрывами производных функции  $u(r, t)$  на поверхности разрывов  $\Sigma_1$ . С целью их вычисления нужно уравнение движения, а в данном случае это будет соответствующим образом переписанное уравнение (4)<sub>4</sub>, продифференцировать необходимое число раз по времени и записать в разрывах на  $\Sigma_1$ . Кроме этого потребуются геометрические и кинематические условия совместности разрывов [25–27], которые в прямоугольной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] &= -G [f_{,j}] n_j + \frac{\delta [f]}{\delta t}, & 1 \\ [f_{,i}] &= [f_{,j}] n_j + \tau^{\alpha\beta} [f]_{,\beta} g_{ij} x_{j,\alpha}, & 2 \\ [f] &= f^+ - f^-, \quad \tau_{\beta\gamma} = x_{i,\beta} x_{i,\gamma}, \quad \tau^{\alpha\beta} \tau_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, & 3 \\ x_{i,\beta} &= \frac{\partial x_i}{\partial y^\beta}, \quad x_i = x_i(t, y_1, y_2). & 4 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь:  $y_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — поверхностные координаты на поверхности разрывов  $\Sigma(t)$ ;  $f(t, x_1, x_2, x_3)$  — функция, теряющая разрыв на  $\Sigma(t)$ ;  $g_{ij}$ ,  $\tau_{\beta\gamma}$  — компоненты пространственного и поверхностного метрических тензоров, греческие индексы принимают значения 1, 2 (такими индексами после запятой

обозначена операция ковариантного дифференцирования по соответствующей поверхностной координате);  $\delta/\delta t$  — операция  $\delta$ -дифференцирования по времени функции на движущейся поверхности  $\Sigma(t)$ . Условия совместности (15) записаны для производных только первого порядка. Их обобщение на случай, когда закон движения поверхности разрывов  $\Sigma(t)$  изначально задается не в прямоугольной системе координат, как в (15)<sub>4</sub>, а в произвольной криволинейной, было получено в [27]. При  $[f]=0$  из (15) получаются классические условия совместности Адамара, которые вместе с динамическими условиями совместности разрывов (7) служат выполнению первого шага на рекуррентном пути вычисления коэффициентов лучевого ряда (13). Следующий шаг связан с записью в разрывах на  $\Sigma_1(t)$  уравнения движения (4)<sub>4</sub> при условии, что  $\psi=0$ . На последующих шагах данное уравнение необходимо продифференцировать по времени соответствующее число раз и результат записать в разрывах. Выражение, завершающее такие рекуррентные действия, здесь не приводится из-за его громоздкости. Заметим, что его можно представить в форме:

$$M_n \kappa_n + N_{n-1} \frac{\delta^{n-1} \kappa_{n-1}}{\delta t^{n-1}} - Y_{n-2} = 0. \tag{16}$$

В (16)  $n$  — натуральное число;  $N_{-1} = N_0 = 0$ ,  $Y_{-2} = Y_{-1} = Y_0 = 0$ ,  $N_1 = N_2 = \dots$ ,  $M_2 = M_3 = \dots$ , но  $M_1 \neq M_2$ . При этом  $M_k$ ,  $N_k$ ,  $Y_k$  зависят от предварительных деформаций,  $\kappa_j$  (при этом  $j < k$ ) и  $\delta$ -производных функций, заданных на движущейся поверхности  $\Sigma(t)$ . При  $n=1$  равенство (16) требует, чтобы  $M_1=0$ , поскольку именно из этого условия вычисляется скорость распространения поверхности разрывов. Для поверхностей разрывов ускорений (слабых волн) условие имеет вид:  $M_1 = M_2$ , и тогда (16) распадается на рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнения затухания).

Но для обсуждаемых здесь ударных волн этот классический случай исключен, так как  $M_1 \neq M_2$ . Согласно (16) возможно только считать, что

$$\frac{\delta \kappa_n}{\delta t} = b_k(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n+1}), \tag{17}$$

либо наоборот, рекуррентно найти

$$\kappa_{n+1} = d_n \left( \kappa_1, \frac{\delta \kappa_1}{\delta t}, \dots, \frac{\delta^n \kappa_1}{\delta t^n} \right). \tag{18}$$

Следовательно, условия совместности разрывов позволяют на каждом шаге расчетов связать  $\kappa_{n+1}$  с  $\delta^n \kappa_1 / \delta t^n$ .

Такая связь законов сохранения и кинематических условий совместности разрывов дала возможность (см. [19, 20]) преодолеть отмеченную особенность в построении приближенных решений в областях, находящихся за ударными волнами. Интенсивность ударной волны при этом, а это была  $\kappa_1$ , представлялась степенным рядом

$$\kappa_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma_k t^k, \quad \gamma_k = \left. \frac{\delta^k \kappa_1}{\delta t^k} \right|_{t=0}. \tag{19}$$

Использование в ряде (19)  $\delta$ -производных по времени диктуется тем, что  $\kappa_1(t)$  задается на движущейся поверхности  $\Sigma_1(t)$ . Постоянные  $\gamma_k$  подлежат определению через выполнение краевых и начальных условий ударного нагружения. Как правило, из таких условий находятся  $\kappa_{k+1}$  при  $t=0$ ; тогда зависимости вида (17) и (18) служат рекуррентными условиями для вычисления  $\gamma_k$ . В случае  $k=1$ , то есть на первом шаге вычислений, из (17) и (18) следует:

$$\frac{\delta \kappa_1}{\delta t} = \frac{5}{2} u_{,r}^4 \kappa_2 \chi_1 + \kappa_1 \left( -\frac{c}{2r} - 10 c u_{,r}^3 u_{,rr} \chi_1 + \frac{10 u_{,r}^3 \kappa_2 \chi_1}{c} \right) + \kappa_1^2 \left( \frac{15 u_{,r}^3 \chi_1}{2r} - 15 u_{,r}^2 u_{,rr} \chi_1 + \frac{15 u_{,r}^2 \kappa_2 \chi_1}{c^2} \right) + \dots \tag{20}$$

За поверхностью разрывов круговой поляризации  $\Sigma_2(t)$  — в области деформирования III (Рис. 1) — лучевые ряды для искомым функций  $u^{\text{III}}(r, t)$  и  $\psi^{\text{III}}(r, t)$  запишем так:

$$\begin{aligned}
 u^{\text{III}}(r, t) &= u^{\text{II}}(r, t) \Big|_{t=t_2} - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{(t-t_2)^j}{j!}, \\
 \psi(r, t) &= - \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{(t-t_2)^j}{j!}, \\
 \eta_j &= \left[ \frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad \omega_j = \left[ \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad t_2 = \int_{\theta_0}^r \frac{d\theta}{G_2(\theta)}.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Скорость  $G_2(t)$  распространения данной нейтральной ударной волны найдем с помощью зависимости (11)

$$G_2 = c \left( 1 + \chi_1 u_{,r}^{\text{II}} \Big|_{r=t_2} + \dots \right)^{1/2}.
 \tag{22}$$

Для того чтобы записать на  $\Sigma_2(t)$  соотношения, аналогичные (17) и (18), необходимо уравнения движения (4)<sub>3</sub> и (4)<sub>4</sub> продифференцировать по времени требуемое число раз и результат записать в разрывах на этой ударной волне. Следует иметь в виду, что интенсивности разрывов  $\omega_1$  и  $\eta_1$  связаны на нейтральной ударной волне  $\Sigma_2(t)$  условием  $[m]=0$ . Из-за этого результат обозначенных вычислений представим в обобщенной форме

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \eta_j}{\delta t} &= q_j(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{j+1}), \\
 \frac{\delta \omega_j}{\delta t} &= s_j(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{j+1}),
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

или наоборот

$$\begin{aligned}
 \eta_{j+1} &= \tilde{q}_j \left( \eta_1, \frac{\delta \eta_1}{\delta t}, \dots, \frac{\delta^j \eta_1}{\delta t^j} \right), \\
 \omega_{j+1} &= \tilde{s}_j \left( \eta_1, \frac{\delta \eta_1}{\delta t}, \dots, \frac{\delta^j \eta_1}{\delta t^j} \right).
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Для дальнейшего достаточно будет в разложениях (21) ограничиться второй степенью по времени. Тогда зависимости (23) и (24) принимают следующую форму:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \eta_1}{\delta t} &= \frac{u_{,r}^4 \eta_2 \chi_1}{2} + \frac{2u_{,r}^3 \eta_1 \kappa_2 \chi_1}{c} - \eta_1 c \left( \frac{3}{2r} + 2u_{,r}^3 u_{,rr} \chi_1 \right) + \\
 &+ \kappa_1 \left( \frac{2u_{,r}^3 \eta_2 \chi_1}{c} + \frac{6u_{,r}^2 \eta_1 \kappa_2 \chi_1}{c^2} + 3\eta_1 u_{,r}^2 \chi_1 \left( \frac{u_{,r}}{r} - 2u_{,rr} \right) + \frac{14r^2 u_{,r} \chi_1}{5c^3} \eta_1^2 \eta_2 \left( u_{,r}^4 \chi_1 - \frac{1}{2} \right) \right) + \\
 &+ \kappa_1^2 \left( \frac{3u_{,r}^2 \eta_2 \chi_1}{c^2} + \frac{14r^2 \chi_1}{5c^4} \eta_1^2 \eta_2 (6u_{,r}^4 \chi_1 - 1) + \frac{3\eta_1 \kappa_2 u_{,r} \chi_1}{c^3} (2 - 79u_{,r}^4 \chi_1) + \right. \\
 &\left. + \frac{3\eta_1 \chi_1 u_{,r}}{c} \left( \frac{u_{,r}}{r} + 2u_{,rr} (32u_{,r}^4 \chi_1 - 1) \right) \right) + \dots, \\
 \omega_2 &= - \frac{r^2 \eta_1 \eta_2}{c u_{,r}} + \frac{r \eta_1^2}{u_{,r}} \left( \frac{13}{10} + \frac{1}{2u_{,r}^4 \chi_1} \right) + \frac{r^2 u_{,r}^2 \eta_1^2 \kappa_2 \chi_1}{c^2} + \\
 &+ \kappa_1^2 \left( \eta_1^2 \kappa_2 \frac{r^2}{5c^4 u_{,r}^4} (-12 - 77u_{,r}^4 \chi_1 + 1601u_{,r}^8 \chi_1^2) + \eta_1 \eta_2 \frac{4r^2}{5c^3 u_{,r}^3} (-1 - 3u_{,r}^4 \chi_1 + 7u_{,r}^8 \chi_1^2) + \right. \\
 &\left. + \eta_1^2 \left( \frac{r(25 + 7u_{,r}^4 \chi_1 + 14u_{,r}^8 \chi_1^2 + 41u_{,r}^{12} \chi_1^3)}{5c^2 u_{,r}^7 \chi_1} - \frac{2r^2 u_{,rr} (-6 - 131u_{,r}^4 \chi_1 + 458u_{,r}^8 \chi_1^2)}{5c^2 u_{,r}^4} \right) \right) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \kappa_1 \left( \eta_1 \eta_2 \frac{4r^2}{5c^2 u_r^2} (1 - u_r^4 \chi_1) + \eta_1^2 \kappa_2 \frac{r^2}{5c^3 u_r^3} (6 - 61u_r^4 \chi_1 + 221u_r^8 \chi_1^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \eta_1^2 \left( -\frac{r(2 - u_r^4 \chi_1 + u_r^8 \chi_1^2)}{cu_r^6 \chi_1} - \frac{2r^2 u_{,rr} (3 + 2u_r^4 \chi_1 + 8u_r^8 \chi_1^2)}{5cu_r^3} \right) \right) \right\} + \dots, \\
 & \omega_1 = -\frac{r^2 \eta_1^2}{2cu_r} + \dots
 \end{aligned} \tag{3}$$

Необходимо иметь в виду, что производные функции  $u(r, t)$  в (25) вычисляются при  $t = t_2$ , так же, как в (20) — при  $t = t_1$ .

Для  $\eta_1$  по аналогии с (19) принимаем разложение

$$\eta_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \beta_k t^k, \quad \beta_k = \left. \frac{\delta^k \eta_1}{\delta t^k} \right|_{t=0}.$$

Поскольку  $\omega_1$  и  $\eta_1$  связаны на  $\Sigma_2(t)$  условием  $[m]=0$  (последнее соотношение из (25)), то  $\omega_1$  также представляется степенным рядом по времени. Зависимости (13) и (21), таким образом, тоже приобретают форму степенного ряда. Рекуррентным степенным рядом представляются с помощью (14) и (22) и зависимости для  $t_1$  и  $t_2$ . Неизвестные постоянные  $\gamma_k$  и  $\beta_k$  находятся из граничных условий, для чего в переписанных в соответствующем виде выражениях (21) следует положить  $t_2 = 0$  (или, что то же самое, —  $r = r_0$ ) и сравнить с (12). Зависимости (17) и (23) позволяют рекуррентно пересчитать  $\gamma_k$  и  $\beta_k$  через параметры граничного воздействия  $u_0$  и  $\psi_k$ . Если всюду ограничиться только слагаемыми, содержащими время до второй степени, то можно получить:

$$\begin{aligned}
 \psi(r, t) = & \left( \beta_1 - t_2 \left( \frac{3c}{2r} \beta_1 + u_{,r}(r_0) \frac{\chi_1 r^2 \beta_1^2 \beta_2 \gamma_1}{3c^3} \left( 1 - \frac{29}{3} u_r^4(r_0) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \chi_1 \left( \frac{3c}{2r} \beta_1 + \frac{\beta_2}{2} \right) u_r^4(r_0) - 6\chi_1 \gamma_1 \beta_1 u_r^2(r_0) \left( \frac{\gamma_2}{c^2} - u_{,rr}(r_0) \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \chi_1 u_r^3(r_0) \left( \frac{2\gamma_1 \beta_2}{c} - \beta_1 \left( 2cu_{,rr}(r_0) - \frac{3}{r} \gamma_1 - \frac{2}{c} \gamma_2 \right) \right) \right) \right) \times (t - t_2) - (\beta_2 + \dots)(t - t_2)^2 + \dots, \\
 u^-(r, t) = & u(r) - \left( \gamma_1 + t_1 \cdot \left. \frac{\delta \kappa_1}{\delta t} \right|_{t=0} + \dots \right) (t - t_1) - (\gamma_2 + \dots)(t - t_1)^2 + \\
 & r^2 \beta_1 \left( \beta_1 - t_2 \left( \frac{3c\beta_1}{2r} + \frac{r^2 u_r(r_0) \beta_1^2 \beta_2 \chi_1 \gamma_1}{3c^3} - \frac{29r^2 u_r^5(r_0) \beta_1^2 \beta_2 \chi_1^2 \gamma_1}{9c^3} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + u_r^4(r_0) \frac{\chi_1}{2r} (3c\beta_1 + r\beta_2) + 6u_r^2(r_0) \frac{\beta_1 \chi_1 \gamma_1}{c^2} (c^2 u_{,rr}(r_0) - \gamma_2) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - u_r^3(r_0) \chi_1 \left( \frac{2\beta_2 \gamma_1}{c} + \beta_1 \left( \frac{3\gamma_1}{r} + \frac{2\gamma_2}{c} - 2cu_{,rr}(r_0) \right) \right) \right) \right) \times (t - t_2) - \\
 & \frac{2cu_{,r}(r_0) (1 + \chi_1 u_r^4(r_0) + 6\chi_1 u_r^2(r_0) \gamma_1^2 / c^2)}{2cu_{,r}(r_0) (1 + \chi_1 u_r^4(r_0) + 6\chi_1 u_r^2(r_0) \gamma_1^2 / c^2)} \times (t - t_2) - \\
 & \left( \frac{22r\beta_1^2}{9u_{,r}(r_0)} - \frac{r^2 \beta_1 \beta_2}{cu_{,r}(r_0)} + \frac{539r\beta_1^2 \gamma_1}{27cu_{,r}^2(r_0)} + \frac{4r^2 \beta_1 \beta_2 \gamma_1}{3c^2 u_r^2(r_0)} + \beta_1^2 \frac{2r^2 \gamma_1}{c^3 u_r^3(r_0)} (\gamma_2 - c^2 u_{,rr}(r_0)) + \right. \\
 & \left. + \frac{5r\beta_1^2}{6u_r^5(r_0) \chi_1} - \frac{50r\beta_1^2 \gamma_1}{9cu_r^6(r_0) \chi_1} + u_r(r_0) \frac{\beta_1^2 r^2 \gamma_1 \chi_1}{c^3} \left( 8c^2 u_{,rr}(r_0) - \frac{62\gamma_2}{9} \right) - \right. \\
 & \left. - u_r^5(r_0) \frac{\beta_1^2 r^2 \gamma_1 \chi_1^2}{3c^3} \left( 298c^2 u_{,rr}(r_0) - \frac{4037\gamma_2}{9} \right) + u_r^3(r_0) \chi_1 r \beta_1 \left( \frac{22}{27} \beta_1 + \frac{r\beta_2}{c} \right) - \right. \\
 & \left. - u_r^2(r_0) \frac{r^2 \chi_1 \beta_1}{9c^2} \left( 56\beta_2 \gamma_1 + \beta_1 \left( \frac{3029\gamma_1 c}{3r} + 15\gamma_2 \right) \right) + \dots \right) \times (t - t_2)^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{26}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Здесь } t_1 &= \frac{r-r_0}{c \left( 1 + 5\chi_1 u_r^2(r_0) \left( u_r^2(r_0) + 2\gamma_1/c (\gamma_1/c - u_r(r_0)) \right) \right)} - \frac{5\chi_1 \cdot \frac{\delta\kappa_1}{\delta t} \Big|_{t=0} \cdot u_r^2(r_0) (2\gamma_1/c - u_r(r_0)) (r-r_0)^2}{c^3 \left( 1 + 5\chi_1 u_r^2(r_0) \left( u_r^2(r_0) + 2\gamma_1/c (\gamma_1/c - u_r(r_0)) \right) \right)^3}, \\
 t_2 &= \frac{r-r_0}{c \left( 1 + \chi_1 u_r^2(r_0) \left( u_r^2(r_0) + 2\gamma_1/c (3\gamma_1/c - 2u_r(r_0)) \right) \right)} - \frac{2\chi_1 \cdot \frac{\delta\kappa_1}{\delta t} \Big|_{t=0} \cdot u_r^2(r_0) (3\gamma_1/c - u_r(r_0)) (r-r_0)^2}{c^3 \left( 1 + \chi_1 u_r^2(r_0) \left( u_r^2(r_0) + 2\gamma_1/c (3\gamma_1/c - 2u_r(r_0)) \right) \right)^3}.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты лучевых рядов в (26), определенные из начально-краевых условий, принимают значения:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{r_0^2 \psi_1^2}{c u_r(r_0)} + \dots, \quad \gamma_2 = c^2 u_{rr}(r_0) + \dots, \quad \beta_1 = -\psi_1, \quad \beta_2 = -\psi_2.$$

**4. Применение лучевых рядов к выделению разрывов в разностной схеме**

Полученное в предыдущем разделе с помощью модифицированного лучевого метода решение может считаться справедливым только для малых послееударных времен. Обусловлено это тем, что в выражениях (20), (25), описывающих эволюцию интенсивности разрывов, и в (26), представляющих непосредственно движение точек сплошной среды после прохождения через них ударной волны, не учитывается нелинейный характер затухания. Поэтому применение (26) для идентификации кинематики точек среды ограничивается далее некоторым малым значением времени —  $t_q$ . При  $t > t_q$  в расчетную схему включается процедура удовлетворения уравнений динамики в той части области, где уже прошла ударная волна круговой поляризации, и где возможно записать в разностном виде вторые производные по времени функций  $\psi(r,t)$  и  $u(r,t)$ . Здесь необходимо проинтегрировать уравнение движения и, положив существование близ фронта волны лучевых разложений, но только с неизвестными коэффициентами в лучевых рядах, срассить эти два решения, варьируя коэффициенты лучевых разложений. Параметр  $t_q$  в определенной степени произволен, однако не может превышать значения, при котором линейное приближение скорости затухания волны даст падение до нуля ее интенсивности. Для реализации означенного подхода построен специальный алгоритм.

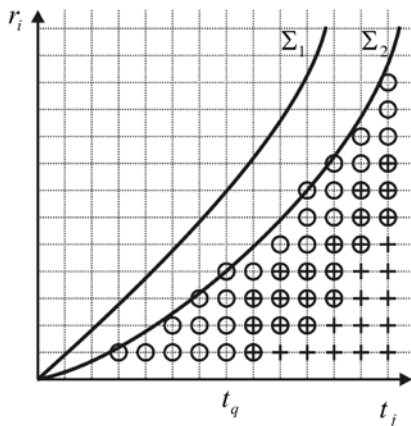


Рис. 2. Маркировка узлов пространственно-временной сетки

«+» и «⊕» на Рис. 2). Одно из них — условие (12) на нагружаемой границе, второе — перемещение, вычисленное с помощью приближенного аналитического решения в ближайшем к границе  $\Sigma_2(t_{j-2})$  узле  $r_i \geq \Sigma_2 \Sigma_2(t_{j-2})$ .

Система уравнений решается численно, таким образом, находится поле перемещений за второй ударной волной. Исключение составляет прифронтальная зона, где запись дискретизированного уравнения движения невозможна (в узлах, обозначенных символом «⊙» на Рис. 2). Предполагается, что в этой зоне функции  $\psi(r,t)$  и  $u(r,t)$  также описываются лучевыми рядами в форме (13), (21) с той лишь разницей, что значения дельта-производных аппроксимируются конечно-разностными выражениями, а коэффициенты лучевых рядов являются неизвестными априори и подлежат идентификации. Возможность для такой

Область  $t > t_q$  и  $r \in [r_0, r_2]$  покрывается равномерной сеткой с шагами  $\Delta t$  по времени и  $\Delta r$  по пространственной координате. Пространственные производные функций  $\psi(r,t)$  и  $u(r,t)$  записываются с использованием центрально-разностной аппроксимации, для записи производных по времени применяется чисто неявная разностная схема.

Положения фронтов поверхностей разрывов деформаций в момент времени  $t_j$  обозначим  $\Sigma_1(t_j)$  и  $\Sigma_2(t_j)$ . Таким образом, в текущий момент времени  $t_j$  для точек  $r_i \in [r_0, \Sigma_2(t_{j-2})]$  (именно в этой области возможна разностная запись вторых производных по времени  $\ddot{\psi}$  и  $\ddot{u}$ ) исходному уравнению движения ставится в соответствие его дискретный аналог в виде системы нелинейных алгебраических уравнений, замкнутой краевыми условиями (в узлах, обозначенных

идентификации дает выполнение естественного условия гладкости решения на всей области за второй ударной волной. В силу этого относительно указанных параметров решается задача минимизации невязки лучевого разложения и перемещений, полученных интегрированием уравнения динамики, в нескольких соседних узлах вблизи границы  $\Sigma_2(t_{j-2})$  (обозначены символом « $\oplus$ » на Рис. 2). Этим завершается текущий шаг алгоритма по времени: теперь во всей области за ударной волной круговой поляризации определены перемещения точек среды и идентифицированы значения величин разрывов.

Указанный алгоритм реализован программно в среде Mathematica 10.4.1. Его работа протестирована на решении задачи динамического нагружения резиноподобного материала со свойствами  $c = 55$  м/с,  $\chi_1 = 200$ ,  $\mu = 2,6 \cdot 10^6$  Па. Геометрические размеры слоя составляли:  $r_0 = 0,01$  м,  $R = 0,02$  м. Параметры движения внутренней границы равнялись:  $u_0 = 0,001$  м,  $\psi_1 = 20\pi$ ,  $\psi_2 = 300\pi$ . На рисунках 3, 4 и 5 представлены эпюры углового смещения  $\psi$ , нормированной компоненты тензора напряжений Коши-Эйлера  $\sigma_{\varphi z} / \mu$ , а также нормированной интенсивности  $|\eta_1 / \psi_1|$  соответственно.

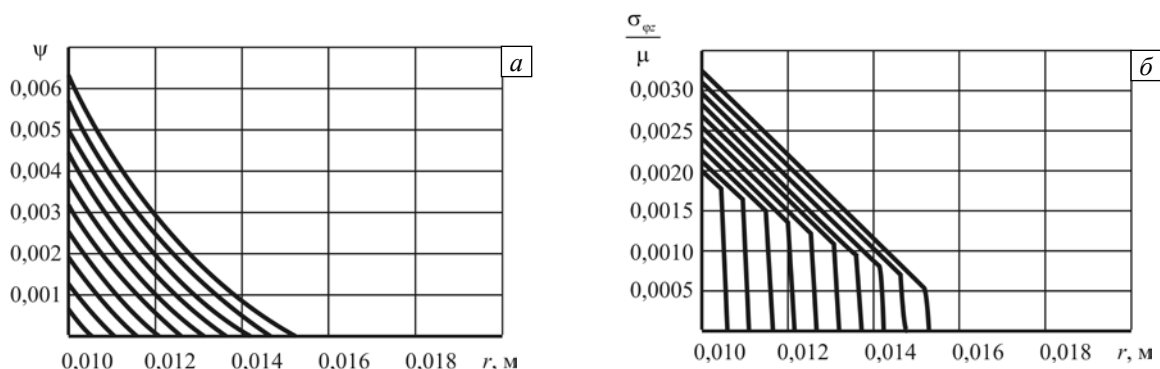


Рис. 3. Эпюры углового смещения  $\psi$  (а) и нормированного касательного напряжения (б) в различные моменты времени (шаг по времени составлял  $10^{-5}$  с)

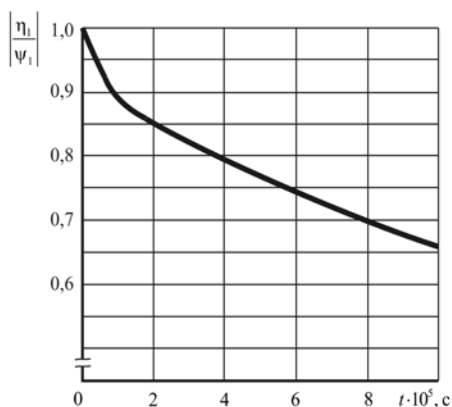


Рис. 5. Эволюция нормированной интенсивности разрыва

### 5. Выводы

На основании приближенного метода построения лучевых разложений решений за поверхностями разрывов и специального алгоритма решена задача выделения разрывов, распространяющихся в несжимаемом упругом цилиндрическом слое, подвергнутом предварительному деформированию. Созданные деформации оказывают существенное влияние на скорости ударных волн: чем они больше, тем дальше с течением времени отстоят друг от друга соответствующие поверхности разрывов. При этом предположений о малости деформаций или интенсивностей разрывов не делалось, что позволяет использовать полученные решения для процессов с большими интенсивностями прикладываемых ударных нагрузок.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00292).

### Литература

1. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984. – 519 с.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – 608 с.
3. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
4. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
5. Moretti G. On the matter of shock fitting // Proc. of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. – Vol. 35. – P. 287-292. DOI

6. Алалыкин Г.Б., Годунов С.К., Киреева И.Л., Плинер Л.А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. – М.: Наука, 1970. – 112 с.
7. Азарова О.А., Власов В.В., Грудницкий В.Г., Попов Н.Н., Рыгалин В.Н. Разностная схема на минимальном шаблоне и ее применение в алгоритмах выделения разрывов // Алгоритмы для численного исследования разрывных течений. Труды ВЦ РАН / Под ред. В.М. Борисова. – М.: ВЦ РАН, 1993. – С. 9-55.
8. Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численное решение не одномерных задач динамики твердого тела // Проблемы динамики упругопластических сред. Серия «Механика». – 1975. – № 5. – С. 39-84.
9. Куропатенко В.Ф. Методы расчета ударных волн // ДВМЖ. – 2001. – Т. 2, № 2. – С. 45-59.
10. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Бозульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. – Новосибирск: Сиб. унив. Изд-во, 2002. – 352 с.
11. Кондауров В.И., Петров И.Б., Холодов А.С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую преграду // ПМТФ. – 1984. – № 4. – С. 132-139. (English version [DOI](#)).
12. Афанасьев С.Б., Баженов В.Г. О численном решении одномерных нестационарных задач упругопластического деформирования сплошных сред методом Годунова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1986. – № 33. – С. 21-29.
13. Иванов М.Я., Крайко А.Н. Об аппроксимации разрывных решений при использовании разностных схем сквозного счета // ЖВММФ. – 1978. – Т. 18, № 3. – С. 780-783. (English version [DOI](#)).
14. Буренин А.А., Зиновьев П.В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики. Сб. статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского / Под ред. Д.М. Климова. – М.: Физматлит, 2003. – С. 146-155.
15. Герасименко Е.А., Завертан А.В. Расчеты динамики несжимаемой упругой среды при антиплоском и скручивающем ударе // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2008. – Т. 1, № 3. – С. 46-56. [DOI](#)
16. Буренин А.А., Рагозина В.Е. К закономерностям распространения деформаций // Моделирование и механика: сб. науч. статей / Под ред. С.И. Сенашова. – Красноярск: СибГАУ, 2012. – С. 31-36.
17. Achenbach J.D., Reddy D.P. Note on wave propagation in linearly viscoelastic media // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. – 1967. – Vol. 18, no. 1. – P. 141-144. [DOI](#)
18. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Rev. – 1995. – Vol. 48, no. 1. – P. 1-39. [DOI](#)
19. Буренин А.А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях // Дальневосточный математический сборник. – 1999. – № 8. – С. 49-72.
20. Burenin A.A., Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. A method for solving boundary value problems connected with the propagation of finite amplitude shock waves // Proc. of the 1993 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications. NOLTA 93, Hawaii, December 5-10, 1993. – Vol. 3. – P. 1085-1088.
21. Герасименко Е.А., Завертан А.А. Лучевые прифронтовые разложения решений в качестве средства выделения разрывов в численных расчетах динамики деформирования // ЖВММФ. – 2009. – Т. 49, №4. – С. 722-733. (English version [DOI](#)).
22. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
23. Куликовский А.Г., Свеиникова Е.И. Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. – 1982. – Т. 46, no. 5. – С. 831-840. (English version [DOI](#)).
24. Буренин А.А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21, № 5. – С. 3-8. (English version [DOI](#)).
25. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир, 1964. – 308 с.
26. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.
27. Герасименко Е.А., Рагозина В.Е. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях // ДВМЖ. – 2004. – Т. 5, № 1. – С. 100-109.

## References

1. Belotserkovskii O.M. *Chislennoe modelirovanie v mekhanike sploshnykh sred* [Numerical modeling in continuum mechanics]. Moscow: Nauka, 1984. 519 p.
2. Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh system uravneniy* [Mathematical problems in the numerical solution of hyperbolic systems]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 608 p.
3. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Prokopov G.P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multi-dimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka, 1976. 400 p.
4. Magomedov K.M., Kholodov A.S. *Setochno-kharakteristicheskie chislennyye metody* [Grid-characteristic numerical methods]. Moscow: Nauka, 1988. 288 p.
5. Moretti G. On the matter of shock fitting. *Proc. of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, vol. 35, pp. 287-292.* [DOI](#)
6. Alalykin G.B., Godunov S.K., Kireeva I.L., Pliner L.A. *Reshenie odnomernykh zadach gazovoi dinamiki v podvizhnykh setkakh* [Solution of one-dimensional problems of gas dynamics on movable grids]. Moscow: Nauka, 1976. 112 p.
7. Azarova O.A., Vlasov V.V., Grudnitskii V.G., Popov N.N., Rygalin V.N. *Raznostnaya skhema na minimalnom shablone i ee primenenie v algoritmakh vydeleniya razryvov* [Difference scheme on the minimal template and its application in the allocation of discontinuities algorithms]. *Algoritmy dlya chislennogo issledovaniya razryvnykh techeniy* [Algorithms for the numerical study of discontinuous flows. Computing Centre RAS Proceedings], ed. by V.M. Borisov. Moscow: Computing Centre RAS, 1993. Pp. 9-55.

8. Kukudzhanov V.N., Kondaurov V.I. Chislennoe reshenie neodnomernykh zadach dinamiki tverdogo tela [The numerical solution of multidimensional problems of solids dynamics]. *Problemy dinamiki uprugoplasticheskikh sred. Seriya Mekhanika – The problems of the dynamics of elastoplastic media. Mechanics Series*, 1975, no. 5, pp. 39-84.
9. Kuropatenko V.F. Metody rascheta udarnykh voln [Methods of shock wave calculations]. *Dal'nevostochnyi Matematicheskii Zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*, 2001, vol. 2, no. 2, pp. 45-59.
10. Ivanov G.V., Volchkov Iu.M., Bogulskii I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoe reshenie dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdykh tel* [The numerical solution of dynamic problems of elastic-plastic deformation of solids]. Novosibirsk: Siberian University, 2002. 352 p.
11. Kondaurov V.I., Petrov I.B., Kholodov A.S. Numerical modeling of the process of penetration of a rigid body of revolution into an elastoplastic barrier. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1984, vol. 25, no. 4, pp. 625-632. DOI
12. Afanasev S.B., Bazhenov S.B. O chislennom reshenii odnomernykh nestatsionarnykh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya sploshnykh sred metodom Godunova [On numerical solution of one-dimensional non-stationary problems of elastic-plastic deformation of continuous media by Godunov's method]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti – Applied problems of strength and plasticity*, 1986, vol. 33, pp. 21-29.
13. Ivanov M.Ya., Kraiko A.N. The approximation of discontinuous solutions by using through calculation difference schemes. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1978, vol. 18, no. 3, pp. 259-262. DOI
14. Burenin A.A., Zinovev P.V. K probleme vydeleniya poverkhnostey razryvov v chislennykh metodakh dinamiki deformiruemykh sred [On the problem of allocating of discontinuity surfaces in numerical methods of dynamics of deformable media]. *Problemy mekhaniki. Sbornik statei k 90-letiyu A.Iu. Ishlinskogo* [Problems of mechanics. Collection of articles on the 90th anniversary of A.Yu. Ishlinskii], ed. by D.M. Klimov. Moscow: Fizmatlit, 2003. Pp. 146-155.
15. Gerasimenko E.A., Zavertan A.V. Calculations in dynamics of incompressible elastic medium under antiplane and twisting shock loading. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2008, vol. 1, no 3, pp. 46-56. DOI
16. Burenin A.A., Ragozina V.E. K zakonomernostyam rasprostraneniya deformatsii [On the regularities of strains propagation]. *Modelirovanie i mekhanika* [Modelling and Mechanics: collection of scientific articles], ed. by S.I. Senashov. Krasnoyarsk: Siberian State Aerospace University, 2012. Pp. 31-36.
17. Achenbach J.D., Reddy D.P. Note of wave propagation in linearly viscoelastic media. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik – Journal of Applied Mathematics and Physics*, 1967, vol. 18, no. 1, pp. 141-144. DOI
18. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities. *Appl. Mech. Rev.*, 1995, vol. 48, no. 1, pp. 1-39. DOI
19. Burenin A.A. Ob odnoy vozmozhnosti postroeniya priblizhennykh reshenii nestatsionarnykh zadach dinamiki uprugikh sred pri udarnykh vozdeistviyakh [One possibility for constructing approximate solutions of non-stationary problems of dynamics of elastic media under impact]. *Dalnevostochnyi matematicheskii sbornik – Far Eastern Mathematical Digest*, 1999, vol. 8, pp. 49-72.
20. Burenin A.A., Rossichin Yu.A., Shitikova M.V. A method for solving boundary value problems connected with the propagation of finite amplitude shock waves. *Proc. of the 1993 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications. NOLTA 93, Hawaii, December 5-10, 1993. Vol. 3*, pp. 1085-1088.
21. Gerasimenko E.A., Zavertan A.A. Ray expansions of solutions around fronts as a shock-fitting tool for shock loading simulation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, no. 4, pp. 722-733. DOI
22. Lurie A.I. *Nonlinear theory of elasticity*. Amsterdam: North-Holland, 1990. 617 p.
23. Kulikovskii A.G., Sveshnikova E.I. Investigation of the shock adiabat of quasitransverse shock-waves in a prestressed elastic medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, vol. 46, no. 5, pp. 667-673. DOI
24. Burenin A.A. Impact deformation of an incompressible elastic half-space. *Soviet Applied Mechanics*, 1985, vol. 21, no. 5, pp. 421-426. DOI
25. Thomas T. *Plastic flow and fracture in solids*. NY: Academic Press, 1961. 267 p.
26. Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p.
27. Gerasimenko E.A., Ragozina V.E. Geometrical and kinematics restriction on functions discontinuities on moving surfaces. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal – Far Eastern Mathematical Journal*, 2004, vol. 5, no. 1, pp. 100-109.

Поступила в редакцию 12.08.2016; опубликована в электронном виде 30.12.2016

---

Сведения об авторах

Буренин Анатолий Александрович, чл.-корр. РАН, дфмн, проф., директор, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН (ИМиМ ДВО РАН), Хабаровский край, 681005, Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, д. 1; e-mail: mail@imim.ru  
Севастьянов Георгий Мамиевич, кфмн, снс, ИМиМ ДВО РАН; e-mail: akela.86@mail.ru  
Штука Виктор Игоревич, асп., Институт автоматки и процессов управления ДВО РАН (ИАПУ ДВО РАН), 690041, Владивосток, ул. Радио, д. 5; e-mail: onslice@mail.ru