

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.32
УДК 532.546

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СОВЕРШЕННОЙ СКВАЖИНЫ В АНИЗОТРОПНОМ ОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ ГРУНТА

В.Ф. Пивень, Д.Г. Лекомцев

Орловский государственный университет им. И.С.Тургенева, Орел, Российская Федерация

В статье изучается фильтрационное течение к скважине, находящейся в анизотропном пласте грунта, при произвольном гладком (кусочно-гладком) контуре ее питания. Проницаемость грунта, как пористой среды, характеризуется тензором второго ранга, компоненты которого несимметричны. Решение поставленной задачи затруднено вследствие сложного вида основного уравнения. Исследование существенно упрощается, если преобразовать уравнение к каноническому виду (уравнению Лапласа). Для этого осуществляется переход на вспомогательную плоскость путем гомеоморфных (аффинных) преобразований. Получено в конечном виде аналитическое решение задачи, описывающее работу совершенной скважины с эллиптическим контуром питания, в частном случае, когда на вспомогательной плоскости контур питания принимает форму окружности. При произвольном контуре питания задача определения дебита скважины сводится к системе уравнений, состоящей из сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши и интегрального соотношения. Система решается численным методом дискретных особенностей. Анализируется практическая сходимость решения задачи. Анизотропия грунта сильно сказывается на дебите скважины, может его увеличивать или уменьшать по отношению к дебиту скважины в изотропной среде. Основное влияние на дебит совершенной скважины в анизотропном грунте оказывают компоненты тензора проницаемости, расположенные на его главной диагонали. С увеличением отношения недиагональных компонентов тензора к диагональным влияние анизотропии ослабевает. Данный метод может быть использован для решения различных задач фильтрации в анизотропной пористой среде.

Ключевые слова: скважина, пористая среда, закон Дарси, анизотропный пласт, произвольный контур питания, дебит, тензор проницаемости

ANALYTICAL AND NUMERICAL MODELING OF THE WORK OF A PERFECT WELL IN ANISOTROPIC HOMOGENEOUS SOIL FORMATION

V.F. Piven and D.G. Lekomtcev

Orel State University, Orel, Russian Federation

The extraction of oil and gas reservoirs in complex geological structures is constantly increasing. Thus, it is obvious that the reliable mathematical models governing such porous media must be of interest. The problem is concerned with the work of a well in anisotropic soil formation in the case of a random smooth (piecewise-smooth) external boundary of reservoir. The permeability of the soil is described by an asymmetric second-rank tensor. To find a solution to the problem is difficult because of the complicated form of the basic equation. The solution can be simplified if the equation is transformed into the Laplace equation. To do this, we turn on the auxiliary plane using homeomorphic (affine) transformation. In a special case when the external boundary of reservoir of the auxiliary plane takes the form of a circle, we arrive at a closed-form (analytical) solution. These analytic solutions are useful in testing numerical codes. In the general case, the problem is reduced to a system of integral equations with Cauchy kernel and the integral relation. The system is solved by the method of discrete singularities. Convergence of the algorithm is studied. Convergence solutions are improved with an increase in the number of division points. The convergence solutions with a piecewise-smooth (square) external boundary of reservoir are slightly worse compared with the smooth (circular) ones. Soil anisotropy greatly affects the production rate and can strongly change the production rate compared to the rate of the well in an isotropic soil. Permeability tensor components located on the main diagonal have a major impact on the rate of flow in the anisotropic soil. This method can be used to solve different problems in filtering anisotropic porous medium.

Key words: well, porous medium, Darcy's law, anisotropic layer, arbitrary boundary of reservoir, production, permeability tensor

1. Введение

Реальные нефтеносные породы (породы-коллекторы) и породы, образующие водоносные горизонты, характеризуются весьма сложной структурой. Их свойства в значительной степени зависят от выбранного направления. Например, в трещиновато-пористой среде поток флюидов вдоль трещин существенно отличается от потоков в иных направлениях. В слоистой среде фильтрация в плоскости слоев и в перпендикулярной к ней плоскости также будет неодинаковой. Породы-коллекторы многих крупных месторождений углеводородов характеризуются четко выраженной анизотропией свойств, например, Астраханское и Верхне-Салымское месторождения в России, или месторождение Тенгиз в Казахстане [1].

Решение задач фильтрации в анизотропном грунте имеет большое значение для эксплуатации нефтяных месторождений и работе водозаборов в грунтах сложной геологической структуры. Многочисленные исследования экспериментально подтверждают анизотропию свойств реальных нефтеносных (водоносных) пластов [2–4], при этом проницаемость среды представляется в виде тензора проницаемости, в общем случае — несимметричного. В известных авторам литературных, источниках, посвященных вопросам теории фильтрации, пористая среда, как правило, считается изотропной [5–9]. В некоторых работах

обсуждается среда с ортотропной анизотропией [10–13]. У такой среды проницаемость описывается симметричным тензором. Но для реальных пластов нет оснований считать, что все пористые среды имеют взаимно ортогональные главные оси анизотропии [14, 15]. Математические модели фильтрации в искривлённых анизотропно-неоднородных пластах рассмотрены и обобщены в ряде работ [16–19]. В данной статье ставится граничная задача анализа работы скважины в анизотропном грунте с произвольным контуром питания. Влияние анизотропии на дебит скважины исследуется при эллиптическом, круговом и прямоугольном контуре питания.

2. Постановка задачи на физической плоскости

Совершенная (по степени вскрытия пласта) эксплуатационная скважина с дебитом Q расположена в горизонтальном пласте постоянной толщины. Дебит Q приходится на единицу толщины пласта. Грунт пласта, недеформируемый, анизотропный и однородный, характеризуется коэффициентом проницаемости \mathbf{K} — тензором второго ранга (вообще говоря, несимметричным). В плоскопараллельной задаче $\mathbf{K} = (K_{ij})$ ($i, j = 1, 2$), а его компоненты K_{ij} — постоянные величины.

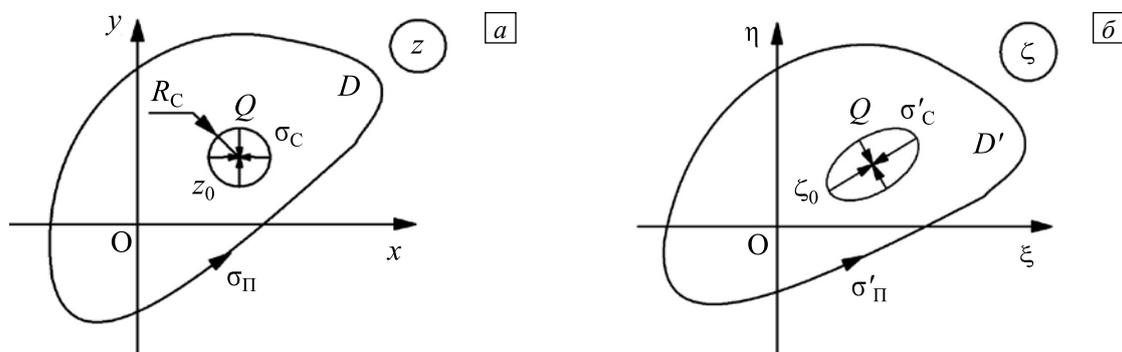


Рис. 1. Схемы к постановке задачи на физической (а) и вспомогательной (б) плоскостях; стрелками показаны направления обхода контура питания, а стрелки внутри контура скважины говорят о том, что скважина представляет собой сток

На физической комплексной плоскости $z = x + iy$ (где x, y — декартовы координаты) положение скважины характеризуется точкой $z_0 = x_0 + iy_0$, и течение происходит в области D с границей Σ , состоящей из контура питания σ_Π и контура скважины σ_c : $\Sigma = \sigma_\Pi \cup \sigma_c$ (Рис. 1). Контур σ_Π моделируем в виде произвольной замкнутой кривой Ляпунова, а контур σ_c — малой окружностью с центром в точке z_0 . Контур σ_Π и σ_c не пересекаются. Контур σ_Π обходится против часовой стрелки.

Полагаем, что жидкость несжимаема, а её течение стационарно. Обобщённый потенциал ϕ и скорость фильтрации \mathbf{v} как функции конкретной точки на физической плоскости z удовлетворяют обобщённому закону Дарси [17]

$$\mathbf{v} = \mathbf{K} \cdot \nabla \phi, \quad \phi = -(p + \rho\Pi)/\mu \quad (1)$$

и уравнению неразрывности

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Здесь: Π — потенциал массовой силы (силы тяжести); p — давление; ρ и μ — плотность и вязкость жидкости; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$ — оператор Гамильтона. Уравнения (1) и (2) записаны в безразмерном виде [17].

Согласно [17] обобщённый потенциал ϕ (за исключением его изолированных особых точек) всюду в области D удовлетворяет следующему из (1) и (2) уравнению:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \nabla \phi(z)) = 0, \quad z \in D. \quad (3)$$

Это уравнение относится к эллиптическому типу, если компоненты тензора проницаемости K_{ij} удовлетворяют условиям [18]:

$$K_{11} > 0 \quad (K_{22} > 0), \quad \det(K_S) = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2}\right)^2 > 0, \quad (4)$$

где $\det(K_S)$ — определитель симметричной части тензора $K_S = (K + K^T)/2$ (T — символ операции транспонирования).

На контуре Σ известны давления, то есть для обобщённого потенциала ϕ выполняются граничные условия

$$\phi^+(z) = \alpha_{\Pi}(z), \quad z \in \sigma_{\Pi}, \quad (5)$$

$$\phi(z) = \alpha_c(z), \quad z \in \sigma_c, \quad (6)$$

где $\alpha_{\Pi}(z)$ и $\alpha_c(z)$ — непрерывные периодические функции. Здесь и далее знаком «+» отмечено предельное значение функции при подходе к контуру питания изнутри области.

Таким образом, имеем задачу Дирихле: по заданным условиям (5) и (6) необходимо найти решение $\phi(z)$ уравнения (3). Это позволит затем определить дебит скважины.

Для исследования влияния на дебит различных компонент тензора $\mathbf{K} = (K_{ij})$ введём коэффициенты:

$$\alpha = K_{22}/K_{11} > 0, \quad \beta = K_S/K_{11}, \quad \gamma = K_a/K_{11} \quad K_S = (K_{12} + K_{21})/2, \quad K_a = (K_{12} - K_{21})/2,$$

причем $\beta^2 < \alpha$, что следует из (4). Коэффициент α характеризует отношение диагональных компонент K_{11} и K_{22} тензора \mathbf{K} , а коэффициенты β и γ — отношение симметричной (K_S) и антисимметричной (K_a) частей тензора \mathbf{K} к его диагональной компоненте K_{11} .

3. Формулировка задачи на вспомогательной плоскости

Трудность решения поставленной задачи обусловлена сложным видом уравнения (3). Исследование задачи значительно упрощается, если привести его к каноническому виду. Для этого введём вспомогательную комплексную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, которая связана с физической плоскостью z гомеоморфным (аффинным) преобразованием координат (прямым и обратным) [18]:

$$\zeta = z + \mu_0 \bar{z}, \quad z = \frac{\zeta - \mu_0 \bar{\zeta}}{1 - |\mu_0|^2}, \quad \text{где } \mu_0 = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{\det(K_S)}}, \quad |\mu_0| < 1. \quad (7)$$

Здесь \bar{z} и $\bar{\zeta}$ — сопряжённые к z и ζ величины. Из (7) получаются соотношения прямого преобразования декартовых координат для плоскостей ζ и z [16]

$$\xi = (1+a)x + by, \quad \eta = bx + (1-a)y, \quad (8)$$

$$x = \frac{(1-a)\xi - b\eta}{1 - \mu_0^2}, \quad y = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1 - \mu_0^2}, \quad (9)$$

$$\text{где } a = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}, \quad b = -\frac{2\beta}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}, \quad \mu_0^2 = a^2 + b^2.$$

На плоскости ζ скважина того же дебита Q расположена в точке ζ_0 и связана с точкой z_0 преобразованием (7). Область течения D' ограничена здесь кривой $\Sigma' = \sigma'_{\Pi} \cup \sigma'_c$ (σ'_{Π} — контур питания, σ'_c — контур скважины, эллипс с центром в точке ζ_0), являющейся, согласно (7), образом кривой Σ (Рис. 1).

Из (3) при учёте преобразований (8) имеем для $\phi(\zeta)$ уравнение Лапласа ($\phi(\zeta)$ — гармоническая функция ζ)

$$\Delta\phi(\zeta) = 0, \quad \zeta \in D'. \quad (10)$$

Условия (5), (6) на границе Σ' принимают вид:

$$\phi^+(\zeta) = \alpha'_\Pi(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_\Pi, \quad (11)$$

$$\phi(\zeta) = \alpha'_C(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_C. \quad (12)$$

Течение к скважине при отсутствии границы Σ' описывает обобщённый потенциал $\phi_0(\zeta)$, который представим в виде (13):

$$\phi_0(\zeta) = Q\Phi(\zeta, \zeta_0). \quad (13)$$

Здесь $\Phi(\zeta, \zeta_0)$ — первое фундаментальное решение уравнения (10) относительно переменной ζ , $\zeta \neq \zeta_0$ [17]:

$$\Phi(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(K_s)}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|}, \quad \left(|\zeta - \zeta_0| = \left[(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 \right]^{1/2} \right). \quad (14)$$

Искомый обобщённый потенциал течения изобразим как

$$\phi(\zeta) = \phi_0(\zeta) + \phi_*(\zeta),$$

где $\phi_*(\zeta)$ — обобщённый потенциал возмущений, связанных с границей Σ' , который является гармонической функцией ζ . Тогда условия (11), (12) для $\phi_*(\zeta)$ примут вид:

$$\phi_*^+(\zeta) = \alpha'_\Pi(\zeta) - \phi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_\Pi, \quad (15)$$

$$\phi_*(\zeta) = \alpha'_C(\zeta) - \phi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_C. \quad (16)$$

Таким образом, определение дебита скважины сводится на вспомогательной плоскости ζ к нахождению функции $\phi_*(\zeta)$, удовлетворяющей условиям (15), (16), в которых далее полагаем $\alpha'_\Pi = \text{const} = C_0$ и $\alpha'_C = \text{const} = C$ ($C_0 \neq C$).

Соотношение (16) выполняется на контуре скважины σ'_C , длина которого незначительна по сравнению с характерным размером области D' , поэтому можно потребовать его выполнения в какой-либо точке ζ_* контура σ'_C ($\zeta = \zeta_* \in \sigma'_C$). Однако в анизотропной среде дебит скважины Q существенно зависит от выбора положения точки ζ_* [20]. Чтобы ослабить эту зависимость, усредним (16), воспользовавшись тем, что обобщённый потенциал $\phi_*(\zeta)$ — гармоническая функция всюду в области D' , включая точку ζ_0 . Контур скважины σ'_C — эллипс с полуосями A_C и B_C , заменим на окружность $\tilde{\sigma}'_C$ «эффективного» радиуса R'_C , такого, что площади круга радиуса R'_C и эллипса равновелики: $\pi R'^2_C = \pi A_C B_C$. Отсюда $R'_C = \sqrt{A_C B_C}$ или, как показано в [21]:

$$R'_C = R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2}. \quad (17)$$

Учитывая (17) и $\alpha'_C = C$, выражение (16) запишем в виде [20]:

$$\phi_*(\zeta_0) = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{\det(K_s)}} \ln \left[R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2} \right]. \quad (18)$$

Далее будем решать задачу фильтрационного течения к скважине с условиями (15) и (18). Задача имеет аналитическое решение в частных случаях, когда контур питания σ_Π — прямая линия [21], и если контур σ'_Π на вспомогательной плоскости ζ принимает форму окружности. В общем случае, когда граница σ_Π произвольная, замкнутая и гладкая, решение задачи находится численным методом дискретных особенностей, а полученное далее аналитическое решение используется для тестирования численного метода.

4. Аналитическое решение задачи нахождения дебита скважины в конечном виде

Эллиптический на физической плоскости z контур питания σ_{Π} принимает на вспомогательной плоскости ζ форму окружности σ'_{Π} радиуса R'_{Π} тогда, когда между полуосями A и B эллипса σ_{Π} и компонентами тензора проницаемости $\mathbf{K} = (K_{ij})$ выполняются соотношения [17]:

$$A = \frac{R'_{\Pi}}{1 + |\mu_0|}, \quad B = \frac{R'_{\Pi}}{1 - |\mu_0|}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что при выполнении неравенства $|\mu_0| < 1$, вытекающего из условий (4), для заданного R'_{Π} всегда найдется эллипс σ_{Π} с полуосями A и B . Если контур питания σ'_{Π} на вспомогательной плоскости ζ есть окружность радиуса R'_{Π} , то, в соответствии с [17, 22], найдём дебит скважины:

$$Q = \frac{2\pi(C - C_0)\sqrt{D(K_S)}}{\ln(R'_{\Pi}/R'_C)}. \quad (20)$$

Для исследования влияния анизотропии грунта на дебит Q введём понятие относительного дебита:

$$\varepsilon = Q/Q_0 - 1, \quad (21)$$

где Q_0 — дебит скважины радиуса R_C с круговым контуром питания радиусом R_{Π} в случае изотропного грунта, определяемый по формуле Дюпюи (см., например, [5]):

$$Q_0 = \frac{2\pi(C - C_0)}{\ln(R_{\Pi}/R_C)}, \quad (22)$$

где C и C_0 — постоянные давления на контурах скважины и питания. Далее выбираем $C = 1$, $C_0 = 0$.

5. Исследование дебита скважины численным методом дискретных особенностей

Для произвольного несамопересекающегося контура σ'_{Π} задачу фильтрационного течения к скважине, находящейся в анизотропном пласте грунта, сведём к решению системы, состоящей из сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши [17, 20]

$$f(M) + 2 \int_{\sigma'_{\Pi}} f(N) \frac{\partial \Psi(N, M)}{\partial l_N} dl_N = 2[\alpha'_{\Pi}(M) - \phi_0(M)], \quad M \in \sigma'_{\Pi} \quad (23)$$

и интегрального соотношения

$$\int_{\sigma'_{\Pi}} f(N) \frac{\partial \Psi(N, M_0)}{\partial l_N} dl_N = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{\det(K_S)}} \ln\left(R_C \sqrt{1 - |\mu_0|^2}\right). \quad (24)$$

Здесь: $f(M)$ — функция класса Гёльдера; $\Psi(N, M)$ — функция, сопряжённая к первому фундаментальному решению (14), имеющая вид

$$\Psi(N, M) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sqrt{\det(K_a)}}{\sqrt{\det(K_S)}} \ln|\zeta_N - \zeta_M| - \arg(\zeta_N - \zeta_M) \right], \quad (25)$$

где $\det(K_a) = (K_{12} - K_{21})^2/4$ — определитель антисимметричной части тензора проницаемости $\mathbf{K} = (K_{ij})$, а $\zeta_N = (\xi_N, \eta_N)$, $\zeta_M = (\xi_M, \eta_M)$ — координаты точек M и N на плоскости ζ .

Решим систему (23), (24) численно относительно функции $f(M)$ и дебита Q , входящего в $\phi_0(\zeta)$, используя метод дискретных особенностей [23]. С учётом (25) ядро интегралов в (23) и (24) представим в виде:

$$\Omega(N, M) = \frac{\partial \Psi(N, M)}{\partial l_N} = -\frac{1}{2\pi} \left[\left(V_\xi \frac{\sqrt{\det(K_a)}}{\sqrt{\det(K_s)}} - V_\eta \right) \mathbf{e}_\xi + \left(V_\eta \frac{\sqrt{\det(K_a)}}{\sqrt{\det(K_s)}} + V_\xi \right) \mathbf{e}_\eta \right] \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (26)$$

где $V_\xi = \frac{\xi_N - \xi_M}{(\xi_N - \xi_M)^2 + (\eta_N - \eta_M)^2}$, $V_\eta = \frac{\eta_N - \eta_M}{(\xi_N - \xi_M)^2 + (\eta_N - \eta_M)^2}$, \mathbf{e}_ξ и \mathbf{e}_η — орты осей $O\xi$ и $O\eta$,

$\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной к контуру σ'_Π (контур σ'_Π обходится против часовой стрелки).

Кривую σ'_Π на вспомогательной плоскости ζ в системе координат $O\xi\eta$ зададим параметрически: $\xi_N = \zeta(s_N)$, $\eta_N = \zeta(s_N)$, $\xi_M = \zeta(s_M)$, $\eta_M = \zeta(s_M)$, s_N и s_M — значения параметра в точках $N \in \sigma'_\Pi$ и $M \in \sigma'_\Pi$. На вспомогательной плоскости ζ в системе координат $O\xi\eta$ получим множество точек $E = \{\zeta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.

Разобьём контур σ'_Π равномерно по длине, для чего интерполируем границу σ'_Π линейными сплайнами. Длина кривой σ'_Π составляет

$$L = \sum_{i=1}^n \Delta l_i, \quad \Delta l_i = \sqrt{(\xi_i - \xi_{i-1})^2 + (\eta_i - \eta_{i-1})^2}.$$

Шаг равномерного разбиения равняется $\Delta l = L/n$. Координаты точек равномерного разбиения $E^p = \{\zeta_k^p, k = 1, 2, \dots, n\}$ найдём по формулам [24]:

$$\xi_k^p = \xi_{i-1} + (-1)^s \frac{k\Delta l - (\Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_{i-1})}{\sqrt{1 - ((\eta_i - \eta_{i-1})/(\xi_i - \xi_{i-1}))^2}},$$

$$\eta_k^p = \eta_{i-1} + \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}} (\xi_k - \xi_{i-1}), \quad \xi_k \in [\xi_{i-1}, \xi_i],$$

где параметр $s = 0$ для $\xi_{i-1} \leq \xi_k^p \leq \xi_i$ и $s = 1$ для $\xi_i \leq \xi_k^p \leq \xi_{i-1}$. Примем во внимание равенства [25]:

$$dl_\tau = \sqrt{(\xi'(s_N))^2 + (\eta'(s_N))^2} ds_N, \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\xi'(s_N)\mathbf{e}_\xi + \eta'(s_N)\mathbf{e}_\eta}{\sqrt{(\xi'(s_N))^2 + (\eta'(s_N))^2}}, \quad (27)$$

$$\mathbf{r}_{MN} = (\xi(s_M) - \xi(s_N))\mathbf{e}_\xi + (\eta(s_M) - \eta(s_N))\mathbf{e}_\eta.$$

Здесь $\xi'_N(s_N)$ и $\eta'_N(s_N)$ — производные $\xi_N(s_N)$ и $\eta_N(s_N)$ по параметру s в точке $N \in \sigma'_\Pi$. Тогда ядро (26) запишем как

$$\Omega(M, N) = -\frac{1}{2\pi} \left[\left(V_\xi \frac{\sqrt{\det(K_a)}}{\sqrt{\det(K_s)}} - V_\eta \right) \xi'_N(s_N) + \left(V_\eta \frac{\sqrt{\det(K_a)}}{\sqrt{\det(K_s)}} + V_\xi \right) \eta'_N(s_N) \right]. \quad (28)$$

Учитывая равенства (26)–(28), приведем систему (23), (24) к следующему виду:

$$f_i + 2 \int_{\sigma'_\Pi} f(N) \Omega(N, M_i) dl_N = 2[\alpha'_{\Pi i} - \phi_{0i}] \quad (i = \overline{1, n}), \quad (29)$$

$$\int_{\sigma'_\Pi} f(N) \Omega(N, M_0) dl_N = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{\det(K_s)}} \ln \left(R_c \sqrt{1 - |\mu_0|^2} \right). \quad (30)$$

Согласно квадратурным формулам прямоугольника заменим интегралы в системе (29), (30) суммами:

$$\int_{\sigma_{\Pi}} f(N)\Omega(N, M_i)dl_N = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f(N_j)\Omega(N_j, M_i)\Delta l_{N_j}, \tag{31}$$

$$\int_{\sigma_{\Pi}} f(N)\Omega(N, M_0)dl_N = \sum_{j=1}^n f(N_j)\Omega(N_j, M_*)\Delta l_{N_j}. \tag{32}$$

Используя соотношения (31) и (32), перейдем от системы (29), (30) к системе $n+1$ неоднородных линейных алгебраических уравнений [20]:

$$f_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \Omega_{ji} \Delta l_j = 2[\alpha'_{\Pi i} - Q\Phi_{Ci}], \quad (i = \overline{1, n}), \tag{33}$$

$$\sum_{j=1}^n f_j \Omega_{*j} \Delta l_j = C + \frac{Q}{2\pi\sqrt{\det(K_s)}} \ln \left(R_c \sqrt{1 - |\mu_0|^2} \right), \tag{34}$$

где

$$\Omega_{ji} = -\frac{1}{2\pi} \left[\left(V_{\xi} \frac{\sqrt{\det(K_a)}}{\sqrt{\det(K_s)}} - V_{\eta} \right) \xi'_j(s) + \left(V_{\eta} \frac{\sqrt{\det(K_a)}}{\sqrt{\det(K_s)}} + V_{\xi} \right) \eta'_j(s) \right], \quad V_{\xi} = \frac{\xi_i - \xi_j}{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2},$$

$$V_{\eta} = \frac{\eta_i - \eta_j}{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2}, \quad \Omega_{*j} = -\frac{1}{2\pi} \left[\left(V_{\xi} \frac{\sqrt{\det(K_a)}}{\sqrt{\det(K_s)}} - V_{\eta} \right) \xi'_j(s) + \left(V_{\eta} \frac{\sqrt{\det(K_a)}}{\sqrt{\det(K_s)}} + V_{\xi} \right) \eta'_j(s) \right],$$

$$V_{\xi} = \frac{\xi_0 - \xi_j}{(\xi_0 - \xi_j)^2 + (\eta_0 - \eta_j)^2}, \quad V_{\eta} = \frac{\eta_0 - \eta_j}{(\xi_0 - \xi_j)^2 + (\eta_0 - \eta_j)^2}.$$

Систему уравнений (33), (34) решим методом Гаусса, определим значения функций f_j ($j = 1, 2, \dots, n$) и искомый дебит Q . Система уравнений (33), (34) позволяет исследовать задачу нахождения дебита скважины с произвольным (без самопересечений) гладким и кусочно-гладким контуром питания, что далее продемонстрировано на примерах с контуром эллиптического и прямоугольного вида.

6. Тестирование численного метода решения

Предложенный алгоритм численного решения системы уравнений (33), (34) в случае произвольного контура σ_{Π} протестирован на примере, когда на плоскости ζ контур σ'_{Π} является окружностью, и дебит Q определяется по формуле (20). В таблице 1 приведены значения относительного дебита ε , полученного численным методом дискретных особенностей и аналитически по формулам (20)–(22) для различных значений коэффициентов α , β при $\gamma = 0$ и различном количестве точек разбиения n . Результаты, установленные численным методом дискретных особенностей, с ростом количества точек разбиения n весьма быстро сходятся к значениям, найденным аналитически.

Таблица 1. Результаты тестирования численного метода решения

| $\alpha = K_{22}/K_{11}$ | $\beta = K_s/K_{11}$ | Количество точек разбиения n | Относительный дебит ε , | |
|--------------------------|----------------------|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| | | | Численное решение | Решение по формулам (20)–(22) |
| 10 | 0 | 10 | 2,066126 | 2,091885 |
| 10 | 3 | 10 | -0,082327 | -0,078608 |
| 10 | 0 | 50 | 2,066465 | 2,091885 |
| 10 | 3 | 50 | -0,079977 | -0,078608 |
| 10 | 0 | 100 | 2,091885 | 2,091885 |
| 10 | 3 | 100 | -0,078608 | -0,078608 |

7. Дебит скважины с произвольным эллиптическим контуром питания

Пусть на плоскости z контур скважины — это окружность σ_c радиусом $x^2 + y^2 = R_c^2$, а контур питания — произвольный эллипс $\sigma_{\Pi}: x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$. Фильтрационное течение происходит в области D , ограниченной контуром $\Sigma = \sigma_{\Pi} \cup \sigma_c$ (на рисунке 1 направление обхода σ_{Π} показано стрелкой).

В соответствии с преобразованиями (7)–(9) эллиптический контур питания σ_{Π} перейдёт на вспомогательной плоскости ζ в эллиптический контур σ'_{Π} . Согласно [21] уравнение контура σ'_{Π} в системе координат $O\xi_1\eta_1$, повернутой на угол ω ($\operatorname{tg}2\omega = b/a$) относительно системы $O\xi\eta$, имеет канонический вид (A' и B' — полуоси эллипса)

$$\frac{\xi_1^2}{A'^2} + \frac{\eta_1^2}{B'^2} = 1,$$

где $A' = A(1 + |\mu_0|)$, $B' = B(1 - |\mu_0|)$.

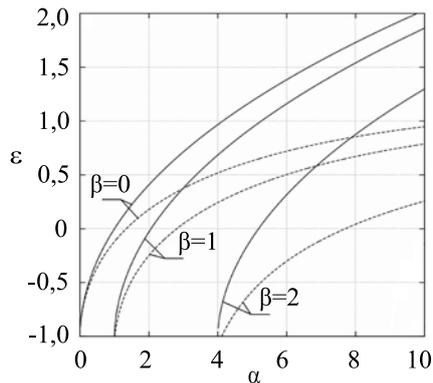


Рис. 2. Зависимости относительного дебита скважины ε от коэффициентов α и β при $\gamma = 0$ и различном отношении полуосей эллипса A/B : 1 – сплошные линии, 100 – пунктирные линии

Решая численно систему уравнений (33), (34) в повернутой системе координат $O\xi_1\eta_1$, находим искомый дебит Q . На рисунке 2 представлены зависимости относительного дебита ε от значений коэффициентов α и β при различном отношении полуосей эллипса A/B . Выбранное число точек разбиения составляло $n = 200$. Видно, что анизотропия грунта может сильно влиять на дебит Q (увеличивать или уменьшать его по отношению к Q_0 , см. (22)). С увеличением отношения недиагональных компонент тензора $\mathbf{K} = (K_{ij})$ к диагональным (увеличение коэффициента β при зафиксированном коэффициенте α) влияние анизотропии уменьшается. Изменение формы контура питания существенно влияет на дебит только при большом эксцентриситете эллипса σ'_{Π} . Как показано в [20], коэффициент $\gamma = K_a/K_{11}$ не оказывает существенного влияния на дебит (при заявленных параметрах задачи γ изменяет дебит не более чем на 2%). В частном случае изотропной среды ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) график, соответствующий круговому контуру питания ($A/B = 1$ — сплошная линия) проходит через точку $\varepsilon = 0$, то есть для изотропной среды численное решение системы (33), (34) совпадает с получаемым по формуле (20). Результаты моделирования показывают, что на дебит скважины в анизотропной среде основное влияние оказывают диагональные компоненты тензора проницаемости K_{11} и K_{22} .

8. Исследование дебита скважины с прямоугольным контуром питания

Предложенный способ численного решения задачи, рассматривающей работу скважины в анизотропной среде, можно использовать также и при контуре питания σ_{Π} , являющемся кусочно-гладким. Продемонстрируем это на примере, когда контур скважины — окружность $\sigma_C: x^2 + y^2 = R_C^2$, а контур питания σ_{Π} — прямоугольник $ABCD$ со сторонами A_0 , B_0 и центром в начале координат. Контур σ_{Π} зададим параметрически. В качестве параметра выберем линейную длину отрезка контура s . С учётом направления обхода контура имеем:

$$\begin{aligned} AB: x &= \frac{A_0}{2} - s, & y &= \frac{B_0}{2}, & s &\in [0, A_0), & \mathbf{n} &= -\mathbf{j}, \\ BC: x &= -\frac{A_0}{2}, & y &= \frac{B_0}{2} - (s - A_0), & s &\in [A_0, A_0 + B_0), & \mathbf{n} &= \mathbf{i}, \\ CD: x &= -\frac{A_0}{2} + (s - (A_0 + B_0)), & y &= -\frac{B_0}{2}, & s &\in [A_0 + B_0, 2A_0 + B_0), & \mathbf{n} &= \mathbf{j}, \\ DA: x &= \frac{A_0}{2}, & y &= -\frac{B_0}{2} + (s - (2A_0 + B_0)), & s &\in [2A_0 + B_0, 2A_0 + 2B_0), & \mathbf{n} &= -\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Согласно преобразованию (7) прямоугольный контур питания σ_{Π} перейдёт на вспомогательной плоскости ζ в четырёхугольный контур σ'_{Π} (σ'_{Π} — параллелограмм). Решая систему уравнений (33), (34)

при σ_{Π} — прямоугольнике $ABCD$, находим искомый дебит Q и аналогично (21) определяем относительный дебит скважины ε :

$$\varepsilon = \frac{Q}{Q_0} - 1,$$

где Q_0 — дебит скважины радиуса R_c с круговым контуром питания радиусом R_{Π} в изотропном грунте; этот дебит вычисляется по формуле (22).

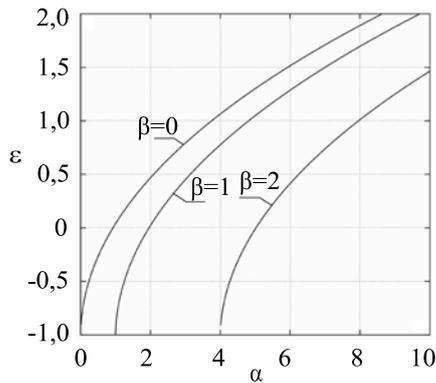


Рис. 3. Зависимости относительного дебита скважины с прямоугольным (квадратным) контуром питания от коэффициентов α и β при $\gamma = 0$, $A_0 = B_0 = \sqrt{\pi}$

На рисунке 3 показаны зависимости относительного дебита ε от коэффициентов α и β для скважины с прямоугольным (квадратным) контуром питания, рассчитанные при количестве точек разбиения $n = 200$. Соотношение сторон прямоугольника A_0 и B_0 выбиралось таким, чтобы площади, ограниченные прямоугольным и эллиптическим контурами σ_{Π} , оказались равновеликими.

Видно, что кривые ведут себя аналогично случаю, когда контур питания σ_{Π} представляет эллипс (окружность), рассмотренный в пунктах 4, 6 и 7. Из результатов, которые содержат рисунки 2 и 3, видно, что при равновеликих площадях форма контура питания не оказывает принципиального воздействия на характер кривых, отображающих изменение дебита скважины в анизотропном грунте. Для кругового и квадратного контуров питания в изотропном грунте ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) относительный дебит ε отличается

на 4%. С ростом анизотропии это различие возрастает, в грунте с сильной анизотропией ($\alpha = 10$, $\beta = 2$) относительный дебит ε отличается на 7%.

9. Исследование практической сходимости решения

При использовании численного метода дискретных особенностей требуется проверка практической сходимости получаемого решения. С этой целью анализировалась зависимость изменения относительного дебита ε от числа точек разбиения n . Результаты представлены в таблице 2 для $\alpha = 2$ и $\alpha = 10$. Кроме того, полагалось $A = B = 1$ для кругового контура σ_{Π} и $A_0 = B_0 = \sqrt{\pi}$ — для квадратного контура, при этом считалось, что $\beta = 0$ и $\gamma = 0$. Определялась практическая сходимость по формуле:

$$\kappa = \left| 1 - \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-50}} \right| \times 100\%,$$

где ε_n и ε_{n-50} — значение относительного дебита при числе точек разбиения, соответственно, n и $n - 50$. Видно, что с ростом количества точек практическая сходимость решения улучшается. В случае кусочно-гладкого (квадратного) контура питания σ_{Π} практическая сходимость решения несколько хуже по сравнению с гладким (круговым) контуром.

Таблица 2. Зависимость изменения относительного дебита ε от числа точек разбиения n при $\alpha = 2$ и $\alpha = 10$

| n | Контур питания σ_{Π} – окружность | | | | Контур питания σ_{Π} – квадрат | | | |
|-----|--------------------------------------------|---------------|----------------------------------|-----------------------|-----------------------------------------|---------------|----------------------------------|-----------------------|
| | Относительный дебит ε | | Практическая сходимость κ | | Относительный дебит ε | | Практическая сходимость κ | |
| | $\alpha = 2$ | $\alpha = 10$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 10$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 10$ | $\alpha = 2$ | $\alpha = 10$ |
| 50 | 0,408195 | 2,053126 | – | – | 0,467179 | 2,216575 | – | – |
| 100 | 0,408280 | 2,053207 | $2,079 \cdot 10^{-2}$ | $3,951 \cdot 10^{-3}$ | 0,467901 | 2,219529 | $1,546 \cdot 10^{-1}$ | $1,333 \cdot 10^{-1}$ |
| 200 | 0,408296 | 2,053231 | $4,111 \cdot 10^{-3}$ | $1,165 \cdot 10^{-3}$ | 0,468270 | 2,220414 | $7,879 \cdot 10^{-2}$ | $3,986 \cdot 10^{-2}$ |
| 400 | 0,408301 | 2,053237 | $1,163 \cdot 10^{-3}$ | $3,143 \cdot 10^{-4}$ | 0,468333 | 2,220646 | $1,342 \cdot 10^{-2}$ | $1,043 \cdot 10^{-2}$ |
| 800 | 0,408302 | 2,053239 | $2,511 \cdot 10^{-4}$ | $8,416 \cdot 10^{-5}$ | 0,468357 | 2,220718 | $5,281 \cdot 10^{-3}$ | $3,248 \cdot 10^{-3}$ |

10. Заключение

Рассмотрена двумерная задача исследования фильтрационного течения к совершенной скважине, находящейся в анизотропном однородном пласте грунта. Задача сводится к системе из сингулярного интегрального уравнения и интегрального соотношения, а затем — к системе алгебраических уравнений, решаемых численным методом дискретных особенностей. В частном случае, когда контур питания скважины на вспомогательной плоскости ζ имеет форму окружности, найдено аналитическое решение задачи в конечном виде.

Проведённое численное моделирование показало, что результаты, полученные методом дискретных особенностей и вычисленные аналитически, весьма близки.

Исследовано влияние анизотропии и формы контура питания на дебит скважины, указаны параметры, при которых можно пользоваться простой формулой Дюпюи. Результаты моделирования показали, что анизотропия грунта сильно сказывается на дебите, может его увеличивать или уменьшать по отношению к изотропному случаю. Установлено, что основное влияние на анизотропию грунта оказывают диагональные компоненты K_{11} и K_{22} тензора проницаемость $\mathbf{K} = (K_{ij})$.

Литература

1. Графутко С.Б. Изменения анизотропных свойств пласта под действием фильтрационного потока / Автореф. дисс... канд. техн. наук: 01.02.05. – Москва, гос. академия нефти и газа им. И.М. Губкина, 1993. – 28 с.
2. Дмитриев Н.М., Максимов В.М., Дмитриев М.Н., Кузьмичев А.Н., Мурадов А.В., Кравченко М.Н. Двухфазная фильтрация в анизотропных средах. Теория и эксперимент // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. докладов, Казань, 20-24 августа 2015 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – С. 1199-1201. (URL: <http://libweb.kpfu.ru/publication/papers/XIMEcon/00419.pdf>).
3. Дмитриев Н.М., Мамедов М.Т., Максимов В.М. Фильтрация с предельным градиентом в анизотропных средах. Теория и эксперимент // Вестник ННГУ. – 2011. – № 4-3. – С. 749-750.
4. Семенов А.А. Экспериментальные исследования фильтрационных течений в анизотропных пористых средах / Автореф. дисс... канд. техн. наук: 01.02.05. – Москва, РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2007. – 26 с.
5. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.
6. Арье А.Г. Физические основы фильтрации подземных вод. – М.: Недра, 1984. – 101 с.
7. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 606 с.
8. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-механические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
9. Щелкачев В.Н., Ланук Б.Б. Подземная гидравлика. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2001. – 736 с.
10. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
11. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 628 с.
12. Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 488 с.
13. Kisick F. Transient flow in elliptical systems / PhD Dissertation in Petroleum Engineering. – Stanford: Stanford University, 1978. – 131 p.
14. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. – М.: Мир, 1964. – 350 с.
15. Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Садовников Р.В. Идентификация тензоров коэффициентов проницаемости неоднородного анизотропного трещиновато-пористого пласта // Вычисл. мех. сплош. след. – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 11-19. DOI
16. Толпаев В.А. Математические модели двумерной фильтрации в анизотропных, неоднородных и многослойных средах / Дисс... докт. физ.-мат. наук: 05.13.18. – Ставрополь, Северо-Кавказский государственный технический университет, 2004. – 293 с.
17. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. – Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2015. – 408 с.
18. Пивень В.Ф. Исследование граничных задач плоскопараллельных течений жидкости в анизотропной пористой среде // Дифференциальные уравнения. – 2009. – Т. 45, № 9. – С. 1286-1297. (English version DOI).
19. Baron V., Coudière Y., Sochala P. Comparison of DDFV and DG methods for flow in anisotropic heterogeneous porous media // Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies nouvelles. – 2014. – Vol. 69, no. 4. – P. 673-686. DOI
20. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Ученые записки ОГУ. Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – 2014. – № 3. – С. 83-88.
21. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта // Ученые записки ОГУ. Серия: Естественные, технические и медицинские науки. – 2012. – № 3. – С. 69-74.
22. Мозгова Е.В. Исследование дебита совершенной скважины в анизотропном грунте // Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2009), Херсон, 8-12 июня 2009 г. – Харьков: Изд-во ХНУ им. В.Н. Каразина, 2009. – С. 366-369.
23. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО Янус, 1995. – 520 с.

24. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта / Дисс... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. – Орел, ОГУ, 2005. – 191 с.
25. Аксюхин А.А. Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта / Дисс... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. – Орел, ОГУ, 2000. – 153 с.

References

1. Grafutko S.B. *Izmeneniya anizotropnykh svoystv plasta pod dejstviem fil'tratsionnogo potoka* [Changes of anisotropic properties of layer under the influence of filtration flows]. Abstract PhD, Moscow, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, 1993. 28 p.
2. Dmitriev N.M., Maksimov V.M., Dmitriev M.N., Kuz'michev A.N., Muradov A.V., Kravchenko M.N. *The XI All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics*. Kazan: Kazan Federal University, 2015, pp. 1199-1201.
3. Dmitriev N.M., Mamedov M.T., Maksimov V.M. Flow with a limiting gradient in anisotropic porous media. Theory and experiment. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4-3, pp. 749-750.
4. Semenov A.A. *Ekspperimental'nye issledovaniya fil'tratsionnykh techeniy v anizotropnykh poristykh sredakh* [Experimental studies of filtration flows in anisotropic porous media]. Abstract PhD, Moscow, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, 2007. 26 p.
5. Charny I.A. *Podzemnaya gidrogazodinamika* [Underground fluid dynamics]. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science, 2006. 436 p.
6. Ar'e A.G. *Fizicheskie osnovy fil'tratsii podzemnykh vod* [Physical principles of underground water filtration]. Moscow: Nedra, 1984. 101 p.
7. Muskat M. *Physical principles of oil production*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1949. 922 p.
8. Bear J., Zaslavsky D., Irmay S. *Physical principles of water percolation and seepage*. Paris: Unesco, 1968. 466 p.
9. Shchelkachev V.N., Lapuk B.B. *Podzemnaya gidravlika* [Underground hydraulics]. Moscow-Izhevsk: SIC "Regular and Chaotic Dynamics", 2001. 736 p.
10. Polubarinova-Kochina P.Ya. *Theory of ground water movement*. Princeton: Princeton University Press, 1962. 613 p.
11. Muskat M. *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Inc. Ann Arbor, 1946. 763 p.
12. Basniev K.S., Dmitriev N.M., Kanevskaya R.D., Maksimov V.M. *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground hydromechanics]. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Science, 2006. 488 p.
13. Kucuk F. *Transient flow in elliptical systems*. PhD Dissertation in Petroleum Engineering, Stanford: Stanford University, 1978. 131 p.
14. Collins R.E. *Flow of fluids through porous materials*. New York: Reinhold Publishing Corporation, 1961. 270 p.
15. Gubaidullin D.A., Nikiforov A.I., Sadovnikov R.V. Identification of permeability tensors of a heterogeneous anisotropic fractured porous reservoir. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 11-19. DOI
16. Tolpaev V.A. *Matematicheskie modeli dvumernoy fil'tratsii v anizotropnykh, neodnorodnykh i mnogoslojnykh sredakh* [Mathematical models of two-dimensional filtration in anisotropic, heterogeneous and multilayer media]. Dissertation of Doctor of Physics and Mathematics, Stavropol, North-Caucasus Federal University, 2004. 293 p.
17. Piven V.F. *Matematicheskie modeli fil'tratsii zhidkosti* [Mathematical models of filtration of fluid]. Orel State University n.a. I.S. Turgenev, 2015. 408 p.
18. Piven V.F. Investigation of boundary value problems for plane-parallel fluid flows in an anisotropic porous medium. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 9, pp. 1313-1325. DOI
19. Baron V., Coudière Y., Sochala P. Comparison of DDFV and DG methods for flow in anisotropic heterogeneous porous media. *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies nouvelles*, 2014, vol. 69, no. 4, pp. 673-686. DOI
20. Piven V.F., Lekomtcev D.G. Research work of a perfect well in an anisotropic homogeneous soil layer. *Scientific notes of Orel State University*, 2014, no. 3, pp. 83-88.
21. Piven V.F., Lekomtcev D.G. The mathematical modeling of work of the drilled well with the direct external boundary of the reservoir in the anisotropic bedlayer. *Scientific notes of Orel State University*, 2012, no. 3, pp. 69-74.
22. Mozgova E.V. *XIV International symposium DSMMPH-2009, 8-12 June 2009, Kherson, V.N. Karazin Kharkiv National University, 2009. pp. 366-369.*
23. Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislenny eksperiment* [The method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow: Yanus, 1995. 520 p.
24. Fedyaev Yu.S. *Matematicheskoe modelirovanie evolyutsii dvumernoy granitsy razdela zhidkostey razlichnoy vyazkosti v kusochno-odnorodnykh i kusochno-neodnorodnykh sloyakh grunta* [Mathematical modeling of evolution of the two-dimensional interface between fluids with different viscosity in the piecewise-homogeneous and piecewise inhomogeneous layers of soil]. PhD Dissertation, Orel State University, Orel, 2005. 191 p.
25. Aksyukhin A.A. *Matematicheskoe modelirovanie granichnykh zadach fil'tratsii k skvazhine v neodnorodnykh sloyakh grunta* [Mathematical modeling of boundary problems of filtration for the well in heterogeneous ground layers]. PhD Dissertation, Orel State University, Orel, 2000. 153 p.

Поступила в редакцию 14.06.2016; опубликована в электронном виде 30.12.2016

Сведения об авторах

Пивень Владимир Федотович, дфмн, проф., Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева (ОГУ им. И.С. Тургенева), 302026, Орел, ул. Комсомольская, д. 95; e-mail: PivenVF@gmail.com

Лekomтцев Денис Геннадьевич, асп., ОГУ им. И.С. Тургенева; e-mail: lekomtcevdg@yandex.ru