

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.31  
УДК 539.3

## МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ НА ИЗГИБ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

К.А. Жамакочян, С.О. Саркисян

*Гюмрийский государственный педагогический институт, Гюмри, Армения*

В статье сжато излагается общая прикладная микрополярная теория изгибной деформации упругих тонких пластин, находящихся в условиях поперечных сдвиговых деформаций. Теория приводится в двух равносильных формулировках — дифференциальной и вариационной; из используемого вариационного принципа следуют дифференциальные уравнения равновесия, соотношения упругости, геометрические соотношения и естественные граничные условия изгиба. Микрополярная (моментная) теория изгибной деформации для пластин была получена на основе метода гипотез из соответствующей трехмерной теории, адекватно описывающей свойства асимптотического решения в случае тонкой пластинки. Также приводятся основные положения метода конечных элементов при его применении для расчета граничных задач микрополярных упругих тонких пластин, находящихся в условиях изгибной деформации. Для такого класса задач разработаны эффективные четырехугольные конечные элементы. С помощью вариационного принципа Лагранжа, записанного для микрополярных пластин, определяются жесткостные характеристики конечного элемента и, исходя из построенной матрицы жесткостей, выполняется процедура формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений. Рассматривается конкретная задача изгиба квадратной микрополярной упругой пластинки под действием равномерно распределенной силовой нагрузки, когда края пластинки шарнирно оперты. Изучается конкретная пластинка в рамках микрополярной упругости. Численная реализация решения системы линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов осуществлена на персональном компьютере. Для сопоставления тоже численно рассчитаны характеристики для соответствующей классической упругой пластинки (с учетом деформации поперечного сдвига) при остальных равных значениях параметров задачи. Анализ результатов показывает эффективность микрополярного подхода по сравнению с классическим при описании жесткости и прочности пластинки.

*Ключевые слова:* микрополярная теория упругости, пластинка, изгиб, метод конечных элементов

## FINITE ELEMENT METHOD FOR CALCULATION OF BENDING OF MICROPOLAR ELASTIC THIN PLATES

K.A. Zhamakochyan and S.H. Sargsyan

*Gyumri State Pedagogical Institute, Gyumri, Armenia*

A general applied theory of bending deformation of micropolar elastic thin plates subjected to transverse shear deformation is presented in differential and variation formulations. Equilibrium equations, elasticity and geometric relations, natural boundary conditions of bending of micropolar thin plates follow from this variation principle. The theory has been derived from the corresponding three-dimensional theory using the hypothesis method, which adequately expresses the properties of the asymptotic solutions in the case of thin plate. In the present paper, a finite element method is applied to solve the boundary problems of micropolar elastic thin plates under bending loads. On the basis of free displacement and rotation laws, the effective quadrangular finite elements are designed. Application of the constructed stiffness matrix enables us to perform the procedure of formation of the system of algebraic linear equations. A particular problem of bending of a square micropolar elastic plate under evenly distributed power load is considered for the plate with hinged-supported edges. The plate is investigated in the framework of the theory of micropolar elasticity. Numerical implementation of the system of linear algebraic equations of the finite element method is carried out. In parallel, numerical results for the corresponding classical elastic case of the plate material (with consideration of transverse shear deformation) are obtained by the the finite element method, while other values of problem parameters are equal. Analysis of the numerical results shows the advantage of the micropolar approach over the classical one for describing the stiffness and strength of the examined plate.

*Key words:* micropolar theory of elasticity, plate, bend, finite element method

### 1. Введение

В последние десятилетия многие математические модели упругих тонких пластин и оболочек строятся на основе уравнений механики обобщенных континуумов. Обзор работ по теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек (или иначе — по теории пластин и оболочек Коссера) осуществлен в работах [1, 2]. Коллективные монографии [3–5] и выпуск научного журнала [6] целиком посвящены актуальным проблемам обобщенных континуумов и одновременно содержат обзоры современных достижений в названной области вообще и в частности в теории оболочек и пластин Коссера. В работах [7, 8] подход к построению теорий микрополярных упругих тонких пластин и оболочек методом гипотез отличается от соответствующих работ [1–6] тем, что сначала асимптотическим методом сингулярного возмущения [9] изучается трехмерная краевая задача микрополярной теории упругости для тонкой пластинки или оболочки, и выявленные этим путем основные качественные характеристики поведения решения трехмерной теории формулируются в указанных тонких областях как адекватные гипотезы (с учетом поперечных сдвигов). Построенные таким образом прикладные теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек в асимптотическом смысле являются точными и, кроме того, энергетически правильными [10].

В работах [7, 8] с помощью аналитических методов реализованы конкретные задачи деформирования микрополярных упругих тонких пластин и оболочек. Вместе с тем необходимо констатировать, что аналитические решения могут быть получены только для весьма ограниченного круга задач. Поэтому использование численных методов, в частности метода конечных элементов (МКЭ), расширяет возможности для анализа новых задач в прикладной теории упругости микрополярных тонких пластин и оболочек.

Отметим, что МКЭ для микрополярной теории упругости развивается в работах [11, 12], где решаются довольно простые краевые задачи. В работах же [13, 14] этот метод нашел существенное развитие, и соответствующие алгоритмы применены при изучении концентрации напряжений вокруг отверстий и трещин в плоской и пространственной задачах с позиций микрополярной теории упругости.

Из литературы авторам настоящей статьи не известны публикации в смысле разработки и применения МКЭ к решению краевых задач прикладной теории микрополярных упругих пластин и оболочек, особенно по соответствующим новым теориям [7–10]. Что касается решения краевых задач изгибной деформации в рамках прикладной теории классических пластин и оболочек (с учетом поперечных сдвиговых деформаций) методом конечных элементов, то эти приложения весьма обширны, им посвящено множество монографий и статей; из последних к предлагаемой вниманию работе ближе всего [15, 16].

В данной работе описывается алгоритм МКЭ применительно к решению краевых задач на основе прикладной теории изгиба микрополярных упругих тонких пластин [7].

## 2. Постановка задачи. Математическая модель изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин

Рассмотрим задачу изгиба микрополярной изотропной прямоугольной пластинки со сторонами  $l_1, l_2$  и толщиной  $2h$ . Направим соответствующие оси  $x_1$  и  $x_2$  вдоль сторон этой прямоугольной области. В качестве базовой возьмем изложенную в работе [7] общую прикладную теорию, используемую для описания статической изгибной деформации микрополярных упругих тонких пластин и включающую:

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} = -p_3, \quad N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} = hp_1, \quad N_{32} - \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = hp_2, \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + N_{23} - N_{32} = -m_1, \quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + N_{31} - N_{13} = -m_2, \\ L_{33} - \left[ \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} + M_{12} - M_{21} \right] = hm_3; \end{aligned} \quad (1)$$

– соотношения упругости

$$\begin{aligned} N_{13} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{13} + (\mu - \alpha)\Gamma_{31}], \quad N_{23} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{23} + (\mu - \alpha)\Gamma_{32}], \\ N_{31} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{31} + (\mu - \alpha)\Gamma_{13}], \quad N_{32} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{32} + (\mu - \alpha)\Gamma_{23}], \\ M_{11} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11} + \nu K_{22}), \quad M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22} + \nu K_{11}), \\ M_{12} = \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{12} + (\mu - \alpha)K_{21}], \quad M_{21} = \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{21} + (\mu - \alpha)K_{12}], \\ L_{11} = 2h[(2\gamma + \beta)k_{11} + \beta(k_{22} + k_{33})], \quad L_{22} = 2h[(2\gamma + \beta)k_{22} + \beta(k_{11} + k_{33})], \\ L_{33} = 2h[(2\gamma + \beta)k_{33} + \beta(k_{11} + k_{22})], \\ L_{12} = 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{12} + (\gamma - \varepsilon)k_{21}], \quad L_{21} = 2h[(\gamma + \varepsilon)k_{21} + (\gamma - \varepsilon)k_{12}], \\ \Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{13} \right], \quad \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3} \left[ \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{23} \right]; \end{aligned} \quad (2)$$

– геометрические соотношения

$$\begin{aligned} K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad K_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad K_{12} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \iota, \quad K_{21} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \iota, \\ \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, \quad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1, \\ k_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \quad k_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, \quad k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \quad k_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, \quad l_{13} = \frac{\partial \iota}{\partial x_1}, \quad l_{23} = \frac{\partial \iota}{\partial x_2}, \quad k_{33} = \iota; \end{aligned} \quad (3)$$

– граничные условия

$$\begin{aligned}
 M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad K_{11} = K_{11}^*, \quad M_{12} = M_{12}^* \quad \text{или} \quad K_{12} = K_{12}^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*, \\
 L_{11} = L_{11}^* \quad \text{или} \quad k_{11} = k_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \quad \text{или} \quad k_{12} = k_{12}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \quad \text{или} \quad l_{13} = l_{13}^*.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Здесь,  $N_{31}, N_{32}, N_{13}, N_{23}$  — усилия (из них  $N_{13}, N_{23}$  — перерезывающие);  $M_{11}, M_{22}, M_{12}, M_{21}$  — моменты (изгибающие и крутящие) от силовых напряжений;  $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}, L_{33}$  — моменты (изгибающие и крутящие) от моментных напряжений;  $\Lambda_{13}, \Lambda_{23}$  — гипермоменты от моментных напряжений;  $\Gamma_{31}, \Gamma_{32}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}$  — сдвиговые деформации;  $K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{21}$  — изгибно-крутильные деформации, связанные с силовыми напряжениями;  $k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}, k_{33}$  — изгибно-крутильные деформации, связанные с моментными напряжениями;  $l_{13}, l_{23}$  — гиперизгибно-крутильные деформации;  $w$  — прогиб пластинки;  $\psi_1, \psi_2$  и  $\Omega_1, \Omega_2$  — соответственно углы поворота и свободные повороты нормального к срединной поверхности линейного элемента вокруг осей  $x_1, x_2$ ;  $\iota$  — интенсивность поворота нормального элемента вокруг оси перпендикулярной к срединной плоскости пластинки;  $E, \nu, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  — упругие характеристики материала пластинки ( $\mu = E/(2(1+\nu))$ );  $p_1, p_2, p_3$  — внешние усилия; и  $m_1, m_2, m_3$  — внешние моменты, приложенные к поверхности пластинки. Компоненты тензора напряжений (силовых и моментных) выражаются в этой модели через усредненные усилия и моменты (соответствующие формулы см. в [7]).

Рассмотрим элемент  $dx_1 \times dx_2$  срединной плоскости пластинки (Рис. 1) и покажем внутренние усредненные (кроме  $N_{31}, N_{32}$ ) характеристики графически в виде сил, моментов и гипермоментов. Уравнения равновесия общего вида (1) получены в [7] с учетом гипотез, которые положены в основу построения прикладной трехмерной модели микрополярных пластин, после вывода формул для распределения напряжений по координате  $x_3$  путем удовлетворения трехмерным граничным условиям на лицевых плоскостях пластинки ( $x_3 = \pm h$ ). Физически их можно трактовать как условия равновесия каждой из двух частей элемента  $dx_1 \times dx_2 \times 2h$  после его разделения плоскостью  $x_3 = \text{const}$  (подобно выводу формулы Журавского в сопротивлении материалов).

Уравнения равновесия можно построить, если рассмотреть равновесие элемента срединной плоскости пластинки  $dx_1 \times dx_2$  (Рис. 1). Легко заметить, что при таком подходе полученные уравнения будут находиться в согласии с уравнениями (1).

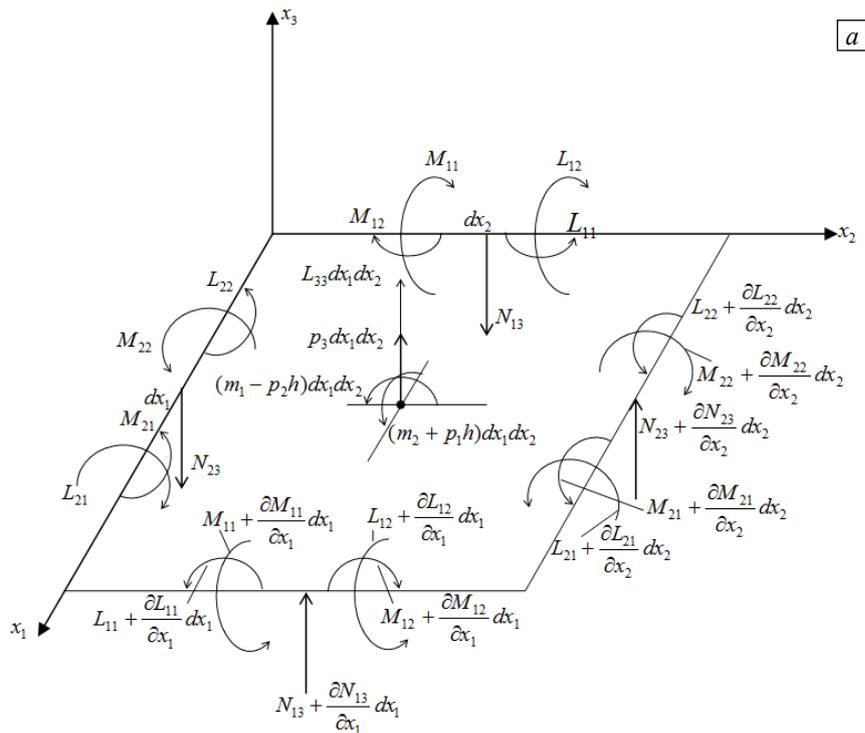


Рис. 1. Схема действия на элемент  $dx_1 dx_2$  срединной плоскости пластинки усредненных сил, моментов и гипермоментов

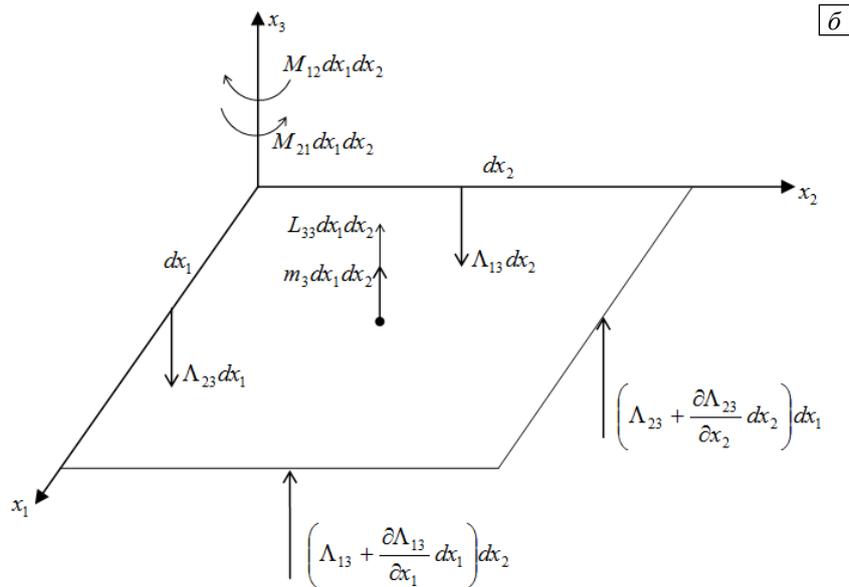


Рис. 1. Продолжение

Полная потенциальная энергия исследуемой системы определяется по формуле [10]:

$$\Pi = W - A,$$

где  $W$  — потенциальная энергия деформации микрополярной пластинки;  $A$  — потенциал внешних сил. При этом потенциальная энергия деформации микрополярной упругой пластинки может быть представлена соотношением

$$W = \iint_{(S)} W_0 ds,$$

где  $(S)$  — площадь срединной плоскости пластинки,  $W_0$  — линейная плотность потенциальной энергии деформации микрополярной пластинки при изгибе, которая (см. [10]) выражается как

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{11}^2 + K_{22}^2] + \frac{2h^3 E\nu}{3(1-\nu^2)} K_{11} K_{22} + \frac{h^3}{3} (\mu + \alpha) [K_{21}^2 + K_{12}^2] + \\ & + \frac{2h^3}{3} (\mu - \alpha) K_{12} K_{21} + h(\mu + \alpha) [\Gamma_{31}^2 + \Gamma_{13}^2 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{23}^2] + 2h(\mu - \alpha) [\Gamma_{13} \Gamma_{31} + \Gamma_{23} \Gamma_{32}] + \\ & + h(2\gamma + \beta) [k_{11}^2 + k_{22}^2 + k_{33}^2] + 2h\beta [k_{11} k_{22} + k_{11} k_{33} + k_{22} k_{33}] + \\ & + h(\gamma + \varepsilon) [k_{21}^2 + k_{12}^2] + 2h(\gamma - \varepsilon) k_{12} k_{21} + \frac{h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} (l_{13}^2 + l_{23}^2), \end{aligned} \quad (5)$$

а потенциал внешних распределенных нагрузок записывается в виде:

$$\begin{aligned} A = & \iint_{(S)} [(hp_1 \psi_1 + hp_2 \psi_2 + p_3 w) + (m_1 \Omega_1 + m_2 \Omega_2 + \nu m_3)] ds + \\ & + \int_{l_1} [(M_{11} \psi_1 + M_{12} \psi_2 + w N_{13}) + (L_{11} \Omega_1 + L_{12} \Omega_2 + \nu \Lambda_{13})] dl + \\ & + \int_{l_2} [(M_{21} \psi_1 + M_{22} \psi_2 + w N_{23}) + (L_{21} \Omega_1 + L_{22} \Omega_2 + \nu \Lambda_{23})] dl. \end{aligned}$$

Получение уравнений метода конечных элементов в перемещениях и свободных поворотах основано на одном из фундаментальных энергетических принципов механики — принципе Лагранжа (который справедлив и в теории микрополярных упругих тонких пластин), согласно которому у системы, находящейся в состоянии равновесия, полная потенциальная энергия принимает стационарное значение:

$$\delta \Pi = 0.$$

Отметим, что если в микрополярной модели (1)–(4) физической постоянной  $\alpha$  присвоить нулевое значение ( $\alpha = 0$ ), тогда из этой модели последует классическая модель для упругих тонких пластин с учетом поперечных сдвиговых деформаций, включающая:

– уравнения равновесия

$$N_1 - \frac{\partial M_1}{\partial x_1} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = hp_1, \quad N_2 - \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} = hp_2, \quad \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} = -p_3;$$

– соотношения упругости

$$N_1 = 2h\mu\Gamma_1, \quad N_2 = 2h\mu\Gamma_2, \quad M_1 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_1 + \nu K_2),$$

$$M_2 = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_2 + \nu K_1), \quad M_{12} = \frac{2h^3}{3}\mu K;$$

– геометрические соотношения

$$K_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad K_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \quad K = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}, \quad \Gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \psi_1, \quad \Gamma_2 = \frac{\partial w}{\partial x_2} + \psi_2;$$

– граничные условия

$$M_1 = M_1^* \text{ или } K_1 = K_1^*, \quad M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K = K^*, \quad N_1 = N_1^* \text{ или } w = w^*;$$

– выражение для плотности потенциальной энергии деформации:

$$\tilde{W}_0 = \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}[K_1^2 + K_2^2] + \frac{2Eh^3\nu}{3(1-\nu^2)}K_1K_2 + \frac{h^3}{3}\mu K^2 + h\mu[\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2];$$

– потенциал внешних усилий:

$$\tilde{A} = \iint_{(S)} (hp_1\psi_1 + hp_2\psi_2 + p_3w) ds + \int_{l_1} (M_{11}\psi_1 + M_{12}\psi_2 + wN_{13}) dl + \int_{l_2} (M_{21}\psi_1 + M_{22}\psi_2 + wN_{23}) dl.$$

### 3. Матрица жесткости конечного элемента микрополярной пластинки

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент. Основными кинематическими параметрами в задаче изгиба микрополярной пластинки являются: перемещения точки базовой пластинки  $w$ ; углы поворота нормального к срединной плоскости элемента в плоскостях  $x_1x_3$  и  $x_2x_3$  —  $\psi_1, \psi_2$ ; углы свободного поворота нормального к срединной плоскости элемента в тех же плоскостях —  $\Omega_1, \Omega_2$ ; интенсивность поворота —  $\iota$  этого элемента вокруг оси  $x_3$ . Распределение принятых основных кинематических переменных по прямоугольнику базовой плоскости элемента будем аппроксимировать полиномами. Для прогиба  $w(x_1, x_2)$  примем:

$$w(x_1, x_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_2^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2^2 + \alpha_9 x_1^3 + \alpha_{10} x_2^3 + \alpha_{11} x_1^3 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^3, \quad (6)$$

а для  $\psi_1, \psi_2, \Omega_1, \Omega_2, \iota$  имеем совершенно аналогичные выражения, что и для  $w$ , но с другими постоянными коэффициентами, обозначение которых начинается с  $\alpha_{13}$  в  $\psi_1$ ) и заканчивается  $\alpha_{72}$  в выражении для  $\iota$ .

Вектор узловых кинематических параметров конечного четырехузлового элемента  $\delta_e$  в общем виде представим в виде  $\delta_e = \{\delta_i\}^T$ , где  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — вектор неизвестных  $i$ -го узла; «Т» — символ операции транспонирования. При этом

$$\delta_i = \left\{ w_i, \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_i, \psi_{1i}, \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right)_i, \psi_{2i}, \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right)_i, \Omega_{1i}, \right.$$

$$\left\{ \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_i, \Omega_{2i}, \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_i, \iota_i, \left( \frac{\partial \iota}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \iota}{\partial x_2} \right)_i \right\}^T.$$

Дальнейшие преобразования выполним в соответствии с алгоритмом вывода матрицы жесткости конечного элемента. Сначала получим соотношения для основных кинематических переменных (6). В развернутом виде можем записать перемещения как

$$w = p_{11}w_1 + p_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_1 + p_{13} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_1 + p_{1,19}w_2 + p_{1,20} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_2 + p_{1,21} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_2 + p_{1,37}w_3 + p_{1,38} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_3 + p_{1,39} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_3 + p_{1,55}w_4 + p_{1,56} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_4 + p_{1,57} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_4; \quad (7)$$

аналогично выглядят выражения для  $\frac{\partial w}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x_2}$ ,  $\psi_1$ ,  $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}$ ,  $\psi_2$ ,  $\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}$ ,  $\Omega_1$ ,  $\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}$ ,  $\Omega_2$ ,  $\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}$ ,  $\iota$ ,  $\frac{\partial \iota}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial \iota}{\partial x_2}$  и отличаются при этом лишь индексами у коэффициентов  $p_{ij}$ , которые представляют собой компоненты матрицы функций форм  $\mathbf{P}$ . Эта матрица имеет размерность  $72 \times 72$  и ввиду громоздкости здесь не приводится.

Перепишем выражение для плотности потенциальной энергии деформации  $W_0$  (5), используя для этого геометрические соотношения (3). Далее подставим разложения (7) в  $W_0$ , а затем результат проинтегрируем по площади конечного элемента. В итоге соотношение для функционала потенциальной энергии деформации  $W$ , записанное для одного конечного элемента пластины, превратится в функцию, зависящую от узловых кинематических переменных:

$$W = W \left\{ w_i, \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_i, \psi_{1i}, \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \right)_i, \psi_{2i}, \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right)_i, \Omega_{1i}, \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} \right)_i, \Omega_{2i}, \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right)_i, \iota_i, \left( \frac{\partial \iota}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial \iota}{\partial x_2} \right)_i \right\} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

В случае изгиба пластины под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки (рассмотрим этот случай просто для того, чтобы избежать громоздкости) потенциал внешних сил, приходящихся на один конечный элемент, после интегрирования становится функцией, зависящей от узловых кинематических параметров:

$$A = A \left( w_i, \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)_i, \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)_i \right) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Реализуя вариационный алгоритм теории МКЭ, придем к системе уравнений равновесия для конечного элемента пластины:

$$\mathbf{K}_e \delta_e = \mathbf{F}_e,$$

где  $\mathbf{K}_e$  — матрица жесткости конечного элемента микрополярной пластины размерностью  $72 \times 72$ ;  $\mathbf{F}_e$  — вектор эквивалентных узловых сил и моментов;  $\delta_e$  — вектор узловых кинематических параметров конечного элемента.

Уравнения равновесия всей пластины в матричном виде можем представить так:

$$\mathbf{K}_\Sigma \Delta = \mathbf{F}_\Sigma,$$

где  $\mathbf{K}_\Sigma$  — глобальная матрица жесткости микрополярной пластины;  $\mathbf{F}_\Sigma$  — глобальный вектор эквивалентных узловых сил и моментов всей пластины;  $\Delta$  — глобальный вектор узловых неизвестных:

$$\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_i, \dots, \delta_N\}^T,$$

где  $N$  — общее число узлов в системе.

Из решения глобальной системы уравнений равновесия, полученного с учетом граничных условий, определим распределения узловых параметров по срединной плоскости пластинки.

#### 4. Модельный расчет микрополярных пластин

В качестве примера рассмотрим микрополярную квадратную пластину, которая шарнирно оперта по всем четырем сторонам и изгибается нормальной нагрузкой  $p_3 = \text{const}$ , (в этом случае  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 \neq 0, m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0$ ). Для граничных условий шарнирного опирания имеем:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{12} = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Psi_2 = 0, \quad \Lambda_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = [0; l_1], \\ w = 0, \quad M_{22} = 0, \quad L_{21} = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Psi_1 = 0, \quad \Lambda_{23} = 0 \quad \text{при } x_2 = [0; l_2], \end{aligned}$$

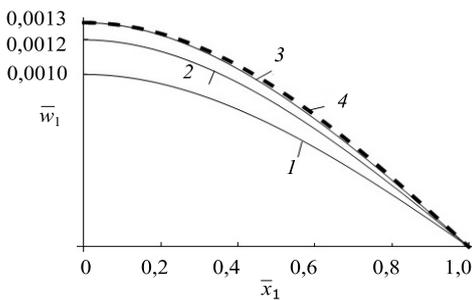
которые равносильны следующим условиям:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Psi_2 = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_1 = [0; l_1]; \\ w = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2} = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Psi_1 = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial x_2} = 0 \quad \text{при } x_2 = [0; l_2]. \end{aligned} \tag{8}$$

После построения матрицы жесткости  $\mathbf{K}_\Sigma$  и вектора эквивалентных узловых сил и моментов  $\mathbf{F}_\Sigma$ , с учетом граничных условий (8) составим систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую поставленной задаче, при разных числах разбиения пластинки на конечные элементы.

Весьма важно знать, какая точность вычислений может быть достигнута в рассматриваемой задаче при уменьшении размеров элементов. Как известно, ошибку можно оценивать или путем сравнения решения с известным точным решением, или по сходимости решения при разном числе разбиений.

В результате расчета пластины  $l_1 = l_2 = 0,1 \text{ м}$ ,  $h = 0,01 \text{ м}$ , находящейся под воздействием равномерно распределенной по верхней грани нагрузки интенсивностью  $p_3 = 49 \text{ Па}$ , при упругих постоянных [17]  $\lambda = Ev / ((1 + \nu)(1 - 2\nu)) = 429 \text{ МПа}$ ,  $\mu = E / (2(1 + \nu)) = 107 \text{ МПа}$ ,  $\alpha = 4,5 \text{ МПа}$ ,  $\gamma = 23,5 \text{ Н}$ ,  $\varepsilon = 23,5 \text{ Н}$ ,  $\beta = 1177 \text{ Н}$  получены кривые прогиба в центре пластинки  $\bar{w}(\bar{x}_1, 0)$ , которые демонстрируются на рисунке 2. Здесь:  $\bar{x}_1 = x_1 / l_1$ ;  $\bar{w} = w / l_1$ . Прогибы найдены при числе элементов  $4 \times 4$ ,  $16 \times 16$ ,  $36 \times 36$ , а также показано аналитическое решение [7]. Из рисунка видно, что сгущением сетки до размеров  $36 \times 36$



**Рис. 2.** График прогиба  $\bar{w}(\bar{x}_1, 0)$  микрополярной пластинки при различном числе конечных элементов  $4 \times 4$  (кривая 1);  $16 \times 16$  (2),  $36 \times 36$  (3); аналитическое решение (4)

можно получить практически точное решение.

В таблице для разбиения  $36 \times 36$  приведены значения максимального безразмерного прогиба микрополярной ( $\bar{w}_{\text{max}}^{\text{мик}} = w_{\text{max}}^{\text{мик}} / l_1$ ) и классической ( $\bar{w}_{\text{max}}^{\text{класс}} = w_{\text{max}}^{\text{класс}} / l_1$ ) пластинок с учетом поперечных сдвигов. Подразумевалось, что обе пластинки имеют одинаковые упругие и геометрические исходные данные (см. указанные выше значения (понятно, что микрополярная пластинка имеет дополнительные упругие постоянные). Данные таблицы подтверждают, что учет микрополярности придает пластинке довольно ощутимую жесткость.

Таблица. Максимальные прогибы микрополярной и классической пластинок

	Микрополярная пластинка	Классическая пластинка	$\bar{w}_{\text{max}}^{\text{мик}} / \bar{w}_{\text{max}}^{\text{класс}}$
$\bar{w}_{\text{max}}$	0,0013	0,0017	0,76

Рассчитаны некоторые общие искомые параметры напряженно-деформированного состояния микрополярной и классической пластинок:  $\bar{M}_{11}^{\text{мик}} = M_{11}^{\text{мик}} / (ql_1^2)$ ,  $\bar{M}_{11}^{\text{класс}} = M_{11}^{\text{класс}} / (ql_1^2)$ ,  $\bar{M}_{12}^{\text{мик}} = M_{12}^{\text{мик}} / (ql_1^2)$ ,  $\bar{M}_{12}^{\text{класс}} = M_{12}^{\text{класс}} / (ql_1^2)$  (Рис. 3).

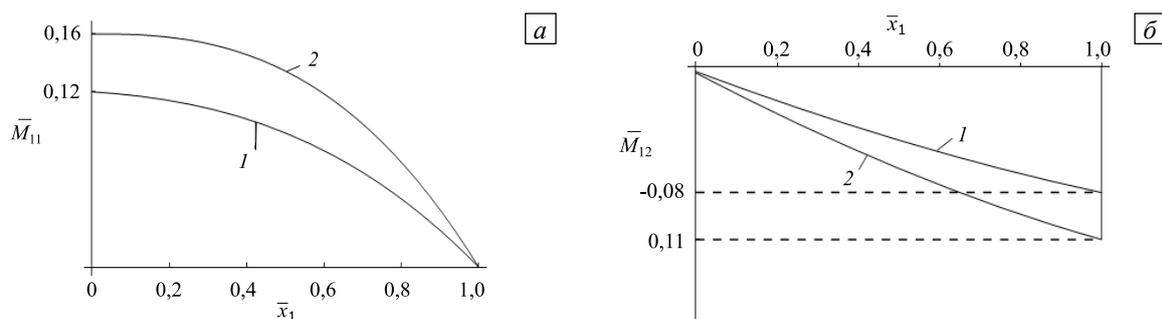


Рис. 3. Графики моментов  $\bar{M}_{12}(\bar{x}_1, 1)$  (а) и  $\bar{M}_{11}(\bar{x}_1, 0)$  (б) микрополярной (линия 1) и классической (2) пластинок

Если сравнивать значения  $\bar{M}_{11\max}^{\text{мик}}$  и  $\bar{M}_{11\max}^{\text{класс}}$ , а также  $\bar{M}_{12\max}^{\text{мик}}$  и  $\bar{M}_{12\max}^{\text{класс}}$ , то разница составляет приблизительно 25%.

Приведем также графики искомых параметров напряженно-деформированного состояния, относящихся именно к микрополярной пластинке, например  $\bar{L}_{11}(\bar{x}_1, 1)$  и  $\bar{L}_{12}(\bar{x}_1, 0)$ ;  $\bar{L}_{11} = L_{11}/(ql_1^2)$   $\bar{L}_{12} = L_{12}/(ql_1^2)$  (Рис. 4).

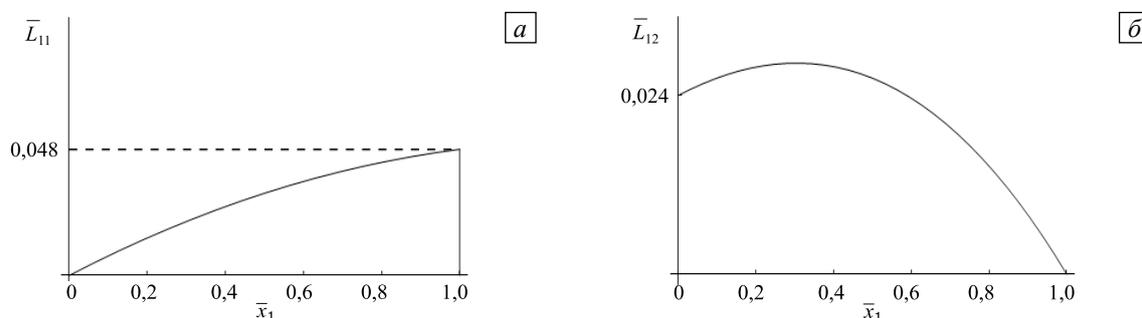


Рис. 4. Графики моментов  $\bar{L}_{11}(\bar{x}_1, 1)$  (а) и  $\bar{L}_{12}(\bar{x}_1, 0)$  (б) микрополярной пластинок

Аналогично можно получить численные решения задач для микрополярной пластинок при других граничных условиях и внешних воздействиях.

## 5. Заключение

Таким образом, осуществлено развитие МКЭ; метод применен к решению краевых задач в рамках прикладной теории изгиба микрополярных упругих тонких пластин, выведены общие формулы для матрицы жесткости и вектора эквивалентных внешних усилий, узловых сил и моментов. Рассматривается пример решения конкретной задачи с помощью разработанного варианта метода МКЭ. Проведен анализ численных результатов и установлено, что, с точки зрения описания жесткости и прочности, микрополярный подход является более эффективным по сравнению с классическим.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета по науке Министерства образования и науки Республики Армения (ГКН МОН РА) в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

## Литература

1. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates // ZAMM. – 2009. – Vol. 89, no. 4. – P. 242-256. DOI
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography // Archive of Applied Mechanics. – 2010. – Vol. 80, no. 1. – P. 73-92. DOI
3. Mechanics of generalized continua: one hundred year after the Cosserats // Advances in Mechanics and Mathematics / Ed. by G. Maugin, A.V. Metrikine. – 2010. – 337 p. DOI
4. Mechanics of generalized continua – from micromechanical basics to engineering applications / Ed. by H. Altenbach, G. Maugin, V. Erofeev. – New York: Springer-Verlag, 2011. – 350 p.
5. Введение в микро- и наномеханику. Математические модели и методы / Под ред. А.И. Потапова. – Н. Новгород: Изд-во НГТУ им. П.Е. Алексеева. – 2010. – 303 с.
6. Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 4.
7. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик // ПМТФ. – 2012. – Т. 53, № 2. – С. 148-156. (English version DOI)
8. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физ. мезомех. – 2011. – Т. 14, № 1. – С. 55-66.

9. Sargsyan S. Asymptotically confirmed hypotheses method for the construction of micropolar and classical theories of elastic thin shells // *Advances in Pure Mathematics*. – 2015. – Vol. 5, no. 10. – P. 629-642. DOI
10. Sargsyan S.H. Energy balance equation, energetic theorems and variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells // *International Journal of Mechanics*. – 2014. – Vol. 8. – P. 93-100.
11. Nakamura S., Benedict R., Lakes R. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity // *Int. J. Eng. Sci.* – 1984. – Vol. 22, no. 3. – P. 319-330. DOI
12. Nakamura S., Lakes R.S. Finite element analysis of stress concentration around a blunt crack in a Cosserat elastic solid // *Comput. Method Appl. M.* – 1988. – Vol. 66, no. 3. – P. 257-266. DOI
13. Корепанов В.В., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости // *МТТ*. – 2008. – № 2. – С. 63-70.
14. Корепанов В.В. Численное обоснование экспериментов по обнаружению эффектов моментного поведения материалов // *Вестник ННГУ*. – 2011. – № 4-4. – С. 1536-1538.
15. Нестеров В.А. Модельный расчет пластины, податливой при трансверсальном сдвиге // *Механика композитных материалов*. – 2015. – Т. 51, № 1. – С. 59-76. (English version DOI)
16. Нестеров В.А. Матрица жесткости конечного элемента пластины, податливой при трансверсальном сдвиге // *Механика композитных материалов*. – 2011. – Т. 47, № 3. – С. 399-418. (English version DOI)
17. Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua // *Continuum models for materials with micro-structure* / Ed. by H. Muhhaus. – New York: Wiley, 1995. – P. 1-22.

## References

1. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM*, 2009, vol. 89, no. 4, pp. 242-256. DOI
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A. On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, vol. 80, no. 1, pp. 73-92. DOI
3. Mechanics of generalized continua: one hundred year after the Cosserats. *Advances in Mechanics and Mathematics*, ed. by G. Maugin, A.V. Metrikine. New York: Springer-Verlag, 2010. 337 p. DOI
4. *Mechanics of generalized continua – from micromechanical basics to engineering applications*, ed. by H. Altenbach, G. Maugin, V. Erofeev. New York: Springer-Verlag, 2011. 350 p.
5. *Introduction to micro- and nanomechanics. Mathematical models and methods*, ed. by A.I. Potapov. Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, 2010. 303 p.
6. *Vychisl. Mech. Splosh. Stred – Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 4.
7. Sarkisyan S.O. Mathematical model of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness characteristics. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 275-282. DOI
8. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells. *Physical Mezomechanics*, 2011, vol. 14, no. 1, pp. 55-66.
9. Sargsyan S. Asymptotically confirmed hypotheses method for the construction of micropolar and classical theories of elastic thin shells. *Advances in Pure Mathematics*, 2015, vol. 5, no. 10, pp. 629-642. DOI
10. Sargsyan S.H. Energy balance equation, energetic theorems and variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells. *International Journal of Mechanics*, 2014, vol. 8, pp. 93-100.
11. Nakamura S., Benedict R., Lakes R. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 1984, vol. 22, no. 3, pp. 319-330. DOI
12. Nakamura S., Lakes R.S. Finite element analysis of stress concentration around a blunt crack in a Cosserat elastic solid. *Comput. Method Appl. M.*, 1988, vol. 66, no. 3, pp. 257-266. DOI
13. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Shardaikov I.N. Numerical study of two-dimensional problems of asymmetrical theory of elasticity. *Mechanics of Solids*, 2008, no. 2, pp. 63-70.
14. Korepanov V.V. Numerical verification of the experiments on detection of couple-stress effects in the behavior of materials. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4-4, pp. 1536-1538.
15. Nesterov V.A. Modal analysis of a plate compliant in transverse shear. *Mechanics of Composite Materials*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 43-54. DOI
16. Nesterov V.A. Stiffness matrix of the finite element of a plate, compliant in transverse shear. *Mechanics of Composite Materials*, 2011, vol. 47, no. 3, pp. 271-284. DOI
17. Lakes R.S. Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized continua, *Continuum models for materials with micro-structure*, ed. by H. Muhhaus. New York: Wiley, 1995. P. 1-22.

Поступила в редакцию 15.02.2016; опубликована в электронном виде 30.09.2016

## Сведения об авторах

Жамакобян Кнарик Араратовна, асп., Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна (ГГПИ), Республика Армения, 3101, Гюмри, ул. Коминтерна, ряд 2, д. 2; e-mail: knarikzhamakochyan@mail.ru  
Саркисян Самвел Оганесович, дфмн, проф., зав. каф., ГГПИ; e-mail: s\_sargsyan@yahoo.com