

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.26

УДК 532.5

## ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАПЛИ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЁМЕ ЖИДКОСТИ

А.А. Алабужев

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация  
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*

Рассматриваются собственные и вынужденные колебания капли жидкости, окружённой другой жидкостью, в цилиндрическом сосуде конечного объёма. В равновесном состоянии капля имеет форму цилиндра и ограничена в осевом направлении двумя параллельными твёрдыми плоскостями. Учитывается динамика линии контакта трех сред: капли–жидкости–твёрдой поверхности; скорость движения контактной линии пропорциональна отклонению краевого угла – угла, образуемого боковой поверхностью капли и твёрдой поверхностью, от его равновесного значения. Данное условие приводит к затуханию колебаний, которое объясняется взаимодействием линии контакта с твёрдой поверхностью. На сосуд действует вибрационная сила, которая направлена вдоль оси симметрии сосуда. Исследована зависимость частот и декрементов затухания собственных колебаний от параметров задачи. Обнаружено, что основная частота свободных колебаний может обращаться в нуль на некотором интервале значений параметра Хокинга. Длина интервала зависит от соотношения размеров капли. Частоты других мод колебаний капли монотонно убывают с увеличением этого параметра. В то же время частоты всех мод колебаний растут с увеличением радиуса капли по отношению к её высоте. При исследовании вынужденных колебаний обнаружены хорошо заметные резонансные эффекты. Кроме того, найдены «антирезонансные» частоты, при которых отклонение линии контакта от равновесного значения отсутствует при любых значениях параметра Хокинга.

*Ключевые слова:* цилиндрическая капля, идеальная жидкость, осевые колебания, собственные колебания, вынужденные колебания, движение линии контакта

## AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF A CYLINDRICAL DROP IN THE FINAL VOLUME OF FLUID

A.A. Alabuzhev

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation  
Perm State University, Perm, Russian Federation*

The eigen and forced oscillations of a fluid drop surrounded by an incompressible fluid in a cylindrical container of a final volume are considered. The drop has a cylindrical shape in equilibrium and is bounded axially by two parallel solid surfaces. The equilibrium contact angle is a right angle. Dynamics of the contact line is taken into account by setting an effective boundary condition derived by Hocking: velocity of the contact line is assumed to be proportional to deviation of the contact angle from the equilibrium value. This condition leads to oscillation damping, which arises from the interaction of the contact line with a solid surface. Hocking's parameter (wetting parameter) is the proportionality coefficient in this condition. A completely pinned contact line (pinned-end edge condition) corresponds to the limiting value of Hocking's parameter, which tends to zero. Hocking's parameter tends to infinity in the opposite case of the fixed contact angle. The solution of the boundary value problem is found using Fourier series of Laplace operator eigenfunctions. Dependence of the eigenfrequency and damping rates on the problem parameters is investigated. It has been established that the main frequency of free oscillations can vanish at a certain value of Hocking's parameter (so-called wetting parameter). The length of this interval depends on the ratio of height to radius of the drop. Other frequencies decrease monotonically with increasing Hocking's parameter. The values of all frequencies increase with increasing relative radius of the drop or the radius of the vessel. Well-marked resonance effects are found in the study of forced oscillations. For the case of a pinned contact line or a fixed contact angle, the amplitude of forced oscillations grows without bound near the eigenfrequency. In other cases, the amplitude is finite. There are "anti-resonant" frequencies at which no deviation of the contact line from the equilibrium value is observed at any values of Hocking's parameter.

*Key words:* cylindrical drop, ideal liquid, free oscillations, axisymmetric oscillations, forced oscillations, dynamics of contact line

### 1. Введение

При исследовании высокочастотного колебательного движения линии контакта разнородных сред влияние вязкости становится существенным лишь в тонких пограничных слоях вблизи твёрдой поверхности, а движение контактной линии определяется в основном быстро осциллирующим полем давления. Таким образом, поведение жидкости в ядре можно считать невязким и учитывать вязкость лишь внутри динамического пограничного слоя вблизи твёрдой подложки. Сложные процессы, происходящие в непосредственной близости линии контакта, из рассмотрения исключаются с помощью эффективных граничных условий, накладываемых на динамику видимого краевого угла [1, 2].

Обычно используют эффективное граничное соотношение, допускающее линейную связь между скоростью движения линии контакта и краевым углом [3]:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \Lambda^* \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*, \quad (1)$$

где  $\zeta^*$  — отклонение поверхности от равновесного положения;  $t^*$  — размерное время;  $\Lambda^*$  — феноменологическая постоянная (параметр Хокинга);  $k$  — вектор нормали к твёрдой поверхности; равновесный краевой угол считается прямым. Данное выражение описывает при этом два важных предельных состояния: фиксированное положение контактной линии и фиксированное значение краевого угла при  $\partial\zeta^*/\partial t = 0$  и  $k \cdot \nabla\zeta^* = 0$  соответственно. Как показано в [3], принятие граничного условия (1) предполагает, за исключением предельных случаев, затухание колебаний, которое возникает из-за взаимодействия линии контакта с твёрдой поверхностью. В работе [3] проводится также качественное сравнение с экспериментальными работами (например, с [4]). Показано, что заметные расхождения между экспериментальными (измеренными) и теоретическими (рассчитанными другими авторами с учётом только вязкого трения в пограничном слое) декрементами затухания колебаний объясняется диссипацией энергии в окрестности контактной линии.

Так, условие (1) использовалось при исследовании колебаний полусферической капли несжимаемой жидкости на подложке [5, 6], полусферического газового пузырька в жидкости с конечной глубиной на подложке [7], цилиндрической капли в бесконечном объёме жидкости [8], цилиндрического пузырька в жидкости с конечным объёмом [9, 10], сжатой капли (имеющей форму фигуры вращения) [11, 12] и капиллярного моста в невесомости [13]. Во всех перечисленных работах было показано, что затухание колебаний связано главным образом с движением контактной линии (за исключением названных выше предельных случаев). В работе [14] сделано предположение, что изменение положения контактной линии происходит не обязательно в одной фазе с краевым углом, то есть постоянная Хокинга  $\Lambda^*$  является комплексной.

Фиксированная контактная линия, как предельное состояние (1), применялась при исследовании собственных колебаний капиллярного моста (жидкой зоны) в поле силы тяжести [15] и параметрической неустойчивости полуцилиндрической капли слабовязкой жидкости на подложке [16]. Другое предельное состояние — фиксированный контактный угол, рассматривалось при изучении колебаний сжимаемой полусферической капли на подложке [17] и цилиндрической капли несжимаемой жидкости при многочастотном воздействии [18].

В работе [19] была предложена более сложная связь величин на линии контакта, допускающая неоднозначную зависимость краевого угла от скорости движения контактной линии (равновесный краевой угол считается прямым):

$$\frac{\partial\zeta^*}{\partial t^*} = \Lambda^* \begin{cases} \gamma - \gamma_c, & \gamma > \gamma_c, \\ 0, & |\gamma| < \gamma_c, \\ \gamma + \gamma_c, & \gamma < -\gamma_c, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\gamma = \partial\zeta^*/\partial z^*$  — отклонение краевого угла от равновесного значения;  $z^*$  — координата, ортогональная твёрдой поверхности и увеличивающаяся вглубь жидкости. Условие (2) хорошо описывает результаты экспериментальных работ [20, 21] при малых отклонениях краевого угла. Оно использовалось при исследовании вынужденных колебаний полусферической капли [22] и газового пузырька [23] на подложке, совершающей поперечные колебания, и трансляционных вынужденных колебаний цилиндрической капли [24].

В работе [25] сделано предположение, что изменение контактной линии происходит не в одной фазе с краевым углом, то есть параметр смачивания  $\Lambda^*$  является комплексным. В этой же работе для больших отклонений краевого угла от равновесного значения вводится выражение вида:

$$\cos\gamma - \cos\gamma_c = -\Lambda_m^* \frac{\mathbf{v}^*}{|\mathbf{v}^*|}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{v}^*$  — скорость движения линии контакта;  $\Lambda_m^*$  — параметр, характеризующий свойства контактирующих сред.

В экспериментах [26, 27] при исследовании движения линии контакта поверхности жидкости вдоль вертикальной твёрдой стенки сделана попытка получения феноменологической формулы для параметра Хокинга  $\Lambda^*$ , то есть он был переменным. Показано, что при малоамплитудных колебаниях (малых числах Рейнольдса) поведение линии контакта хорошо описывается условием закреплённой контактной линии. С увеличением амплитуды линия контакта начинает проскальзывать, то есть она движется. При высокоамплитудных колебаниях (больших числах Рейнольдса) авторы работы [27] предполагают, что в этом случае комплексный параметр  $\Lambda_m^*$  в (3) надо задавать как функцию, зависящую от времени.

В данной работе исследуются собственные и вынужденные продольные (параллельные оси симметрии сосуда) колебания цилиндрической капли, находящейся в сосуде конечного объёма и окружённой другой

жидкостью. Отметим, что динамика капли подобной формы (свойственна капиллярному мосту, жидкой зоне, «сжатой» капле) изучается при исследовании способов скоростной печати и выращивания кристаллов, в нефтедобыче, при электросмачивании и адгезии, в биологии, трибологии и микрофлюидике [13, 15, 28–31].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим каплю несжимаемой жидкости, которая находится в цилиндрическом сосуде радиуса  $R_0^*$ , высотой  $h^*$  и обладает плотностью  $\rho_i^*$  (Рис. 1). В равновесном состоянии капля ограничена от растекания

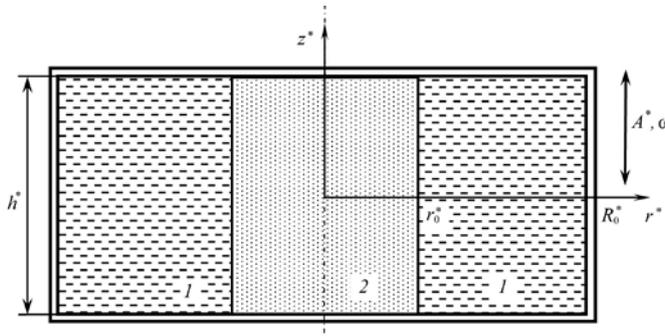


Рис. 1. Геометрия задачи (1 – жидкость, 2 – капля)

в осевом направлении параллельными твёрдыми плоскостями (дном и крышкой сосуда) и имеет форму цилиндра радиуса  $r_0^*$ . Равновесный краевой угол равен  $90^\circ$ . Капля в сосуде окружена несжимаемой жидкостью с плотностью  $\rho_e^*$ . На сосуд действует направленная вдоль его оси симметрии вибрационная сила с частотой  $\omega^*$  и амплитудой  $A^*$ .

Очевидно, что приложенное вибрационное воздействие будет возбуждать осесимметричное течение, которое не зависит в нормальном оси симметрии

сечении от угла  $\alpha^*$ . Таким образом, в цилиндрической системе координат  $(r^*, \alpha^*, z^*)$ , в которой ось  $Oz$  совпадает с осью симметрии сосуда, боковую поверхность капли можно описать функцией  $r^* = r_0^* + \zeta^*(z^*, t^*)$ , где член  $\zeta^*(z^*, t^*)$  изображает отклонение поверхности от равновесного положения.

Выберем в качестве единицы измерения радиальной координаты радиус  $r_0^*$ , осевой координаты —  $h^*$ , отклонения поверхности —  $A^*$ , времени —  $\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)r_0^{*3}/\sigma^*}$ , скорости —  $A^* \sqrt{\sigma^*/((\rho_e^* + \rho_i^*)r_0^{*3})}$ , плотности —  $\rho_e^* + \rho_i^*$ , давления —  $A^* \sigma^*/r_0^{*2}$ , где  $\sigma^*$  — коэффициент поверхностного натяжения. Как видно, для осевого и радиального направлений выбраны разные масштабы, поэтому безразмерные двумерные операторы градиента ( $\nabla_2$ ) и Лапласа ( $\Delta_2$ ) с учётом соотношения  $b = r_0^*/h^*$  примут вид:

$$\nabla_2 = j \frac{\partial}{\partial r} + kb \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + b^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

где  $r = r^*/r_0^*$ ,  $z = z^*/h^*$ ,  $j$  и  $k$  — орты осей  $Or^*$  и  $Oz^*$  соответственно.

Будем рассматривать движение жидкости как потенциальное:  $v = \nabla_2 \phi$ , где  $v$  — безразмерная скорость жидкости, а  $\phi$  — безразмерный потенциал скорости. Амплитуду вибраций  $A^*$  считаем малой по сравнению с характерными масштабами длины  $r_0^*$  и  $h^*$ , таким образом, задача линейризуется по малой безразмерной амплитуде внешнего воздействия  $\varepsilon = A^*/r_0^*$ . В пренебрежении вязким затуханием представим уравнения Бернулли (запишем их в неинерциальной системе отсчёта, связанной с сосудом) и непрерывности в безразмерной форме:

$$p_q = -\rho_q \left( \frac{\partial \phi_q}{\partial t} + \omega^2 b z \cos(\omega t) \right), \quad \Delta_2 \phi_q = 0 \quad (q = i, e), \quad (4)$$

где  $p$  — безразмерное давление; величины с индексом  $i$  относятся к капле, с индексом  $e$  — к окружающей жидкости. Последнее слагаемое в уравнении Бернулли (4) представляет собой внешнюю вибрационную силу.

На поверхности раздела жидкостей должны выполняться условия непрерывности нормальной компоненты скорости и баланса нормальных напряжений, а также кинематическое условие:

$$r = 1 : \left[ \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] = 0, \quad [p] = \zeta + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (5)$$

где квадратные скобки означают скачок величины на поверхности раздела.

На твёрдых поверхностях поставим условия непротекания:

$$r = R_0: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad (6)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Учтём динамику линии контакта с помощью эффективного граничного условия (1):

$$r = 1, \quad z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \lambda \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (8)$$

Краевая задача (4)–(8) содержит следующие безразмерные параметры: радиус сосуда —  $R_0 = R_0^*/r_0^*$ , высоту сосуда —  $h = h^*/z^*$ , геометрический параметр —  $b = r_0^*/h^*$ , параметр Хокинга —  $\lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^*/\sigma^*}$ , частоту внешнего воздействия —  $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3}/\sigma^*}$ , плотность внешней жидкости  $\rho_e = \rho_e^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$ , плотность жидкости в капле  $\rho_i = \rho_i^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$ . Безразмерные плотности связаны соотношением  $\rho_i + \rho_e = 1$ .

Оценим предварительно масштабы используемых величин для определения границ применимости предположений, сделанных автором настоящей работы. Итак, условие несжимаемости жидкости записывается как  $\omega^* r_0^* \ll c^*$ , где  $c^*$  — скорость звука. Толщина вязкого пограничного слоя составляет:

$l^* = \sqrt{\nu_{i,e}^*/\omega^*}$ , где  $\nu_{i,e}^*$  — кинематическая вязкость жидкости. В рассматриваемом случае жидкость можно считать невязкой, если  $l^* \ll r_0^*$ . Напомним, что в данной работе частота имеет масштаб  $\sqrt{\sigma^*/((\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3})}$ .

Например, для капли воды с  $r_0^* = 1 \cdot 10^{-2}$  м в воздухе при нормальных условиях этот масштаб равняется  $\sim 8,5$  Гц. Следовательно, здесь безразмерная частота  $\omega = 1$  соответствует размерной частоте  $\omega^* = 8,5$  Гц. Для вязкого погранслоя в воде характерна толщина  $l^* = 3,4 \cdot 10^{-4}$  м,  $l^*/r_0^* \approx 30$ ; условие несжимаемости выполняется при  $\omega^* r_0^* = 8,5 \cdot 10^{-2}$  м/с,  $c_i^* = 1,5 \cdot 10^3$  м/с,  $c_e^* = 3,4 \cdot 10^2$  м/с. Легко показать, что  $\omega = 5$  отвечает  $\omega^* = 42,5$  Гц,  $\omega = 20$  —  $\omega^* = 170$  Гц,  $\omega = 50$  —  $\omega^* = 425$  Гц. Для капли радиуса  $r_0^* = 1 \cdot 10^{-3}$  м частота  $\omega = 1$  составляет  $\omega^* = 2,7 \cdot 10^2$  Гц,  $l^* = 6,1 \cdot 10^{-5}$  м,  $\omega^* r_0^* = 2,7 \cdot 10^{-1}$  м/с. Для капли воды с  $r_0^* = 1 \cdot 10^{-2}$  м в бензоле  $\omega = 1$  соотносится с  $\omega^* = 4,3$  Гц,  $l^* = 4,8 \cdot 10^{-4}$  м,  $\omega^* r_0^* = 4,3 \cdot 10^{-2}$  м/с,  $c_i^* = 1,5 \cdot 10^3$  м/с,  $c_e^* = 1,3 \cdot 10^3$  м/с. Из приведённых оценок следует, что для капель размером 0,1–1 см приближения несжимаемости и невязкости выполняются и являются оправданными. Отметим также, что с увеличением частоты толщина вязкого пограничного слоя будет уменьшаться.

### 3. Собственные колебания

Рассмотрим осесимметричные собственные колебания цилиндрической капли. Решение краевой задачи (4)–(8), за исключением величины внешней силы, будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа (4) с учётом граничных зависимостей (6) и (7):

$$\varphi_i(r, z, t) = \text{Re} \left( i\Omega \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k R_k^{ie}(r) \cos(2\pi k z) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k R_k^{io}(r) \sin((2k+1)\pi z) \right) e^{i\Omega t} \right), \quad (9)$$

$$\varphi_e(r, z, t) = \text{Re} \left( i\Omega \left( \sum_{k=1}^{\infty} (c_k R_k^{ie}(r) + d_k R_k^{ee}(r)) \cos(2\pi k z) + \sum_{k=0}^{\infty} (f_k R_k^{io}(r) + g_k R_k^{eo}(r)) \sin((2k+1)\pi z) \right) e^{i\Omega t} \right), \quad (10)$$

где  $\Omega$  — частота собственных колебаний;  $i$  — мнимая единица;  $k$  — волновое число;  $R_k^{ie}(r) = I_0(2k\pi br)$ ,  $R_k^{io}(r) = I_0((2k+1)\pi br)$ ,  $R_k^{ee}(r) = K_0(2k\pi br)$ ,  $R_k^{eo}(r) = K_0((2k+1)\pi br)$ ;  $I_0$ ,  $K_0$  — модифицированные функции Бесселя;  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $d_k$ ,  $f_k$ ,  $g_k$  — неизвестные амплитуды. Первые суммы в решении (9) и (10) являются суммами чётных мод собственных колебаний, вторые — нечётных. Под чётностью мод подразумевается чётность функций (9) и (10) относительно смены знака координаты  $z$ .

Условие баланса нормальных напряжений и кинематическое условие (5) определяют общий вид функции  $\zeta(z, t)$ :

$$\zeta(z, t) = \operatorname{Re} \left( \left( \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos(2\pi k z) + \sum_{k=0}^{\infty} n_k \sin((2k+1)\pi z) + h_1 \sin\left(\frac{z}{b}\right) + h_2 \cos\left(\frac{z}{b}\right) \right) e^{i\Omega t} \right), \quad (11)$$

где  $m_k$ ,  $n_k$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  — неизвестные амплитуды. Два последних слагаемых являются частным решением уравнения баланса нормальных напряжений (5) для нечётных и чётных мод соответственно.

Подставив решения (9), (10) в задачу (4)–(8) без неоднородного слагаемого в уравнении Бернулли (4), получим задачу на собственные значения. Собственными числами в ней являются частоты собственных колебаний  $\Omega$ , которые находятся из решения следующих уравнений:

– для чётных мод

$$i\Omega \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Omega^2 C_k}{\Omega_{ek}^2 - \Omega^2} - C_0 + \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \right) - \frac{\lambda}{b} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) = 0, \quad (12)$$

$$\Omega_{ek}^2 = \frac{4\pi^2 k^2 b^2 - 1}{\rho_i F_{ek} + \rho_e G_{ek}}, \quad F_{ek} = \frac{R_k^{ie}(1)}{R_{kr}^{ie}(1)}, \quad G_{ek} = \frac{R_{kr}^{ie}(R_0) R_k^{ee}(1) - R_k^{ie}(1) R_{kr}^{ee}(R_0)}{R_{kr}^{ie}(1) R_{kr}^{ee}(R_0) - R_{kr}^{ie}(R_0) R_{kr}^{ee}(1)},$$

$$C_0 = 2b \sin\left(\frac{1}{2b}\right), \quad C_k = -\frac{4b(-1)^k}{4\pi^2 k^2 b^2 - 1} \sin\left(\frac{1}{2b}\right);$$

– для нечётных мод

$$i\Omega \left( \Omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{\Omega_{ok}^2 - \Omega^2} + \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \frac{\lambda}{b} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) = 0, \quad (13)$$

$$\Omega_{ok}^2 = \frac{(2k+1)^2 \pi^2 b^2 - 1}{\rho_i F_{ok} + \rho_e G_{ok}}, \quad F_{ok} = \frac{R_k^{io}(1)}{R_{kr}^{io}(1)}, \quad G_{ok} = \frac{R_{kr}^{io}(R_0) R_k^{eo}(1) - R_k^{io}(1) R_{kr}^{eo}(R_0)}{R_{kr}^{io}(1) R_{kr}^{eo}(R_0) - R_{kr}^{io}(R_0) R_{kr}^{eo}(1)},$$

$$S_k = \frac{4b(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2 b^2 - 1} \cos\left(\frac{1}{2b}\right).$$

Здесь:  $\Omega_{ok}$ ,  $\Omega_{ek}$  — частоты собственных колебаний капли со свободной контактной линией (то есть при  $\lambda \rightarrow \infty$ );  $C_k$  и  $S_k$  — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции, зависящей от  $\cos(z/b)$  и  $\sin(z/b)$ , по базисным функциям  $\cos(2\pi k z)$  и  $\sin((2k+1)\pi z)$ ;  $R_{kr}^{ie}(r) = \partial R_k^{ie}(r)/\partial r$ ,  $R_{kr}^{ee}(r) = \partial R_k^{ee}(r)/\partial r$ ,  $R_{kr}^{io}(r) = \partial R_k^{io}(r)/\partial r$ ,  $R_{kr}^{eo}(r) = \partial R_k^{eo}(r)/\partial r$ . Полученные уравнения (12), (13) в пределе  $R_0 \rightarrow \infty$  переходят в аналогичные уравнения для частот собственных колебаний цилиндрической капли в бесконечном объёме несжимаемой жидкости [8]. Отметим также, что данные уравнения в пределе  $\rho_i \rightarrow 0$  не превращаются в аналогичные для цилиндрического пузырька [9].

Уравнения (12), (13) имеют комплексные решения, причем  $\operatorname{Im}(\Omega) > 0$ , что означает затухание свободных колебаний. Это затухание связано лишь с условием на линии контакта и не зависит от вязкости. Заметим также, что времена затухания имеют сравнимый с периодом колебаний порядок величины, то есть при конечных значениях параметра смачивания капля успевает совершить лишь несколько колебаний.

При предельных значениях параметра Хокинга  $\lambda$  — бесконечно малом и бесконечно большом — анализ уравнений (12), (13) можно провести аналитически. В случае закреплённой линии контакта, то есть при  $\lambda \rightarrow 0$ , частоты и декременты затухания свободных колебаний находятся из следующих уравнений:

– для чётных мод

$$\operatorname{Re}(\Omega)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k}{\Omega_{ek}^2 - \operatorname{Re}(\Omega)^2} - C_0 + \cos\left(\frac{1}{2b}\right) = 0,$$

$$\operatorname{Im}(\Omega) = \frac{\lambda}{2b} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \left( \cos\left(\frac{1}{2b}\right) - C_0 - \operatorname{Re}(\Omega)^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k}{(\Omega_{ek}^2 - \operatorname{Re}(\Omega)^2)^2} \right)^{-1};$$

– для нечётных мод

$$\operatorname{Re}(\Omega)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{\Omega_{ok}^2 - \operatorname{Re}(\Omega)^2} + \sin\left(\frac{1}{2b}\right) = 0,$$

$$\operatorname{Im}(\Omega) = \frac{\lambda}{2b} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \left( \operatorname{Re}(\Omega)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{\left(\Omega_{ok}^2 - \operatorname{Re}(\Omega)^2\right)^2} - \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right)^{-1}.$$

При фиксированном контактном угле, то есть при  $\lambda \rightarrow \infty$ , частоты собственных колебаний совпадают с частотами  $\Omega_{ok}$ ,  $\Omega_{ek}$  собственных колебаний цилиндрической капли, а декременты затухания  $k$ -й моды свободных колебаний определяются выражениями:

– для чётных мод:

$$\operatorname{Im}(\Omega_k) = -\frac{\Omega_{ek}^2 (-1)^k b C_k}{2\lambda} \operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2b}\right);$$

– для нечётных мод:

$$\operatorname{Im}(\Omega_k) = \frac{\Omega_{ok}^2 (-1)^k b S_k}{2\lambda} \sec\left(\frac{1}{2b}\right).$$

Для произвольного значения  $\lambda$  уравнения (12), (13) решались численно методом двумерных секущих. По аналогии с [10], для удобства будем обозначать частоты чётных мод, представляемых уравнением (12), как  $\Omega_{2k}$  ( $k=1,2,\dots$ ), а частоты нечётных мод, которые являются решением уравнения (13), как  $\Omega_{2k+1}$  ( $k=0,1,\dots$ ). Таким образом, частоты  $\Omega_n$  собственных колебаний с нечётным индексом  $n$  будут соответствовать нечётным модам (13), а с чётным  $n$  — чётным модам (12).

Зависимости собственной частоты  $\operatorname{Re}(\Omega)$  и декремента затуханий  $\operatorname{Im}(\Omega)$  нескольких первых мод от параметра Хокинга  $\lambda$  при различных значениях геометрического параметра  $b$  показаны на рисунках 2 и 3. Отметим, что для  $\operatorname{Re}(\Omega)$  строится только одно решение, чётное относительно оси абсцисс (сопряженное к нему на графиках не приводится). Из рисунков 2а–в и 3а–в видно, что частоты, за исключением отвечающей первой моде, монотонно уменьшаются с увеличением  $\lambda$ : наибольшей частотой обладает капля с закреплённой линией контакта, а наименьшей — с фиксированным краевым углом. Декременты затухания имеют максимум при конечном капиллярном параметре и стремятся к нулю при  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$ . С возрастанием величины  $b$  значения частот  $\operatorname{Re}(\Omega)$  и декрементов  $\operatorname{Im}(\Omega)$  растут (см. Рис. 2б, в, 3а–в и Рис. 2д, е, 3в–д соответственно).

Кроме колебательного (периодического) режима существует еще и монотонный (аперриодический) режим, при котором корни уравнения (13) имеют только мнимую часть (Рис. 2ж, з). Эти два режима не взаимодействуют до тех пор, пока частота колебательного режима не обращается в нуль.

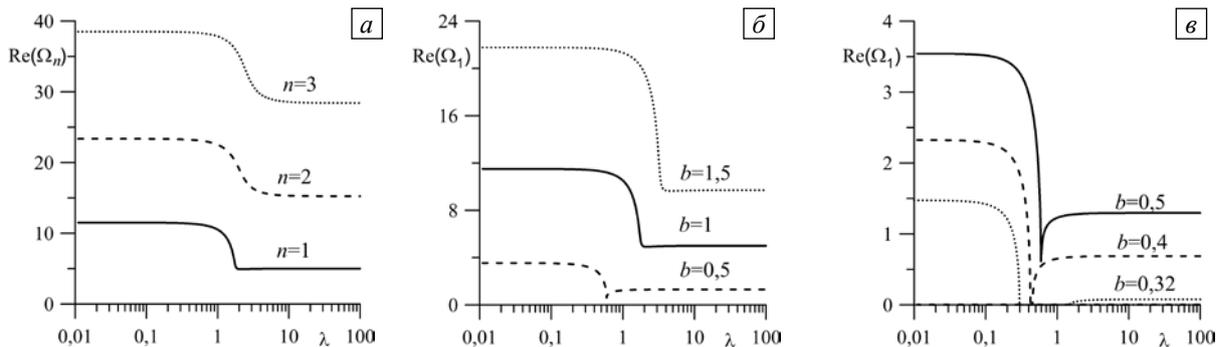


Рис. 2. Зависимости частоты  $\operatorname{Re}(\Omega)$  и декремента затухания  $\operatorname{Im}(\Omega)$  от параметра Хокинга  $\lambda$  при  $\rho_i = 0,7$ ,  $R_0 = 5$ :  $b=1$  (а, в);  $b=0,32$  (у)

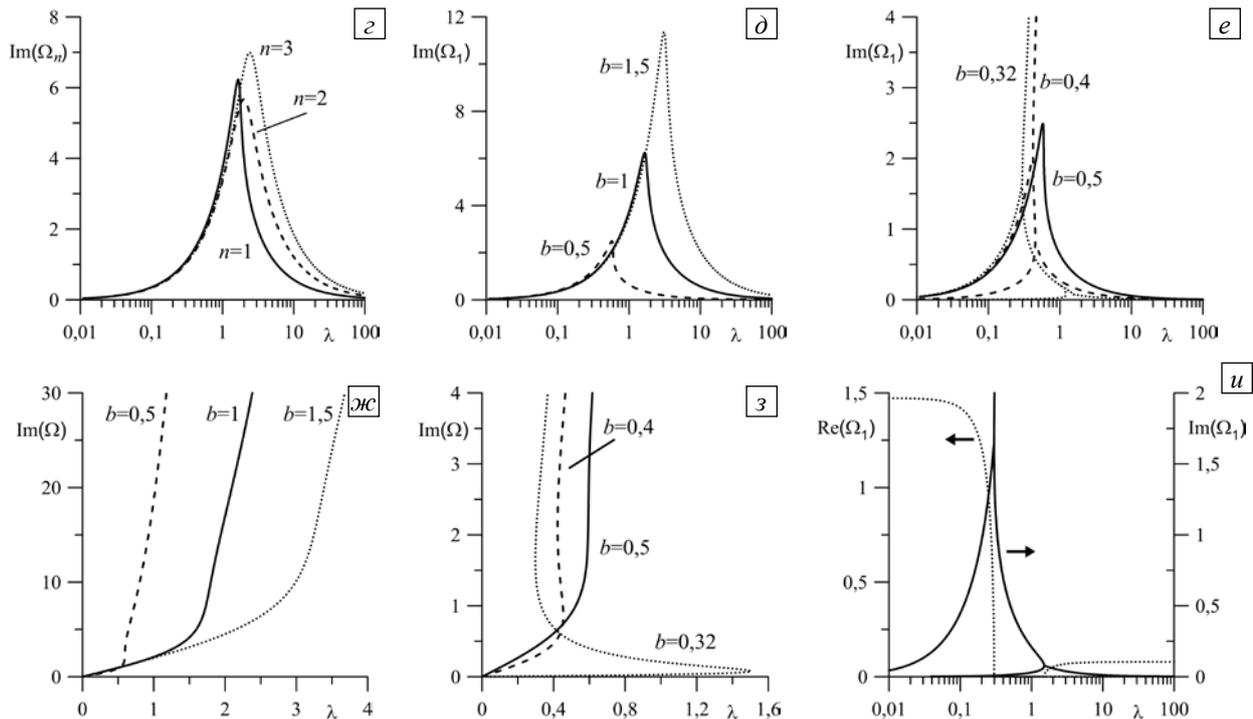


Рис. 2. Продолжение

У частоты первой моды собственных колебаний  $\text{Re}(\Omega_1)$  наблюдается особенность: эта частота может обращаться в нуль на некотором интервале значений параметра Хокинга  $\lambda$  (Рис. 2в, u). Ширина интервала уменьшается с увеличением значения  $b$  (Рис. 2б, в). На этом интервале инкремент затухания  $\text{Im}(\Omega_1)$  имеет три значения (Рис. 2е, u), а границы интервала согласуются с точками ветвления решения  $\text{Im}(\Omega_1)$ . Причина обнуления частоты связана с настолько большой диссипацией (параметр  $\lambda$  конечен), что колебания становятся невозможными: для поверхностных мод ( $n > 0$ ) собственных колебаний мощность диссипации пропорциональна площади боковой поверхности капли (чем больше эта поверхность, тем большее требуется энергии для возбуждения поверхностных волн, а энергия колебаний самой капли пропорциональна её объёму). Следовательно, при постоянном объёме капли увеличение  $b$  соответствует уменьшению боковой поверхности капли, то есть снижению диссипации, сопровождающей поверхностные колебания.

Отметим, что частота объёмных колебаний пузырька [9] и основные частоты азимутальных мод ( $n = 0$ ) капли [5, 8], начиная с некоторого значения геометрического параметра  $b$ , могут обращаться в нуль на интервале значений параметра  $\lambda$ , а длина этого интервала растёт с повышением  $b$ . В данном случае мощность диссипации пропорциональна длине линии контакта, так как именно взаимодействие контактной линии и твёрдой подложки является причиной диссипации. Следовательно, увеличением параметра  $b$  при постоянном объёме капли можно вызывать удлинение линии контакта, что приведёт к росту диссипации.

Зависимости частоты  $\text{Re}(\Omega)$  и декремента затухания  $\text{Im}(\Omega)$  от параметра Хокинга  $\lambda$  для второй и третьей мод представлены на рисунке 3. Из приведённых графиков видно, что, в отличие от первой моды, частоты  $\text{Re}(\Omega)$  монотонно уменьшаются с увеличением  $\lambda$  (Рис. 3а–в) при любых значениях  $b$ .

Рисунок 4 содержит зависимости частоты  $\text{Re}(\Omega)$  и инкремента  $\text{Im}(\Omega)$  от геометрического параметра  $b$  для трех значений  $\lambda$ . Отрицательные значения  $\text{Im}(\Omega)$  появляются при  $b < 1/\pi$ . Это соответствует возникновению монотонной неустойчивости (так как  $\text{Re}(\Omega) = 0$ ), что связано с неустойчивостью Релея–Плато для жидкого столба [32, 33], которая развивается при условии  $h^* > 2\pi l_0^*$  или, для безразмерных величин данной работы,  $b < 1/(2\pi)$ . Таким образом, толщина слоя (высота капли) при  $b = 1/\pi$  равняется половине длины волны релеевской неустойчивости. Из приведённых графиков также видно, что, начиная с конечных значений параметра  $b$ , инкременты затухания  $\text{Im}(\Omega)$  не зависят от  $b$ . Отметим, что эффект обнуления частоты существует и у других, более высоких, мод колебаний. Однако этот эффект проявляется лишь за порогом неустойчивости Релея–Плато основной моды.

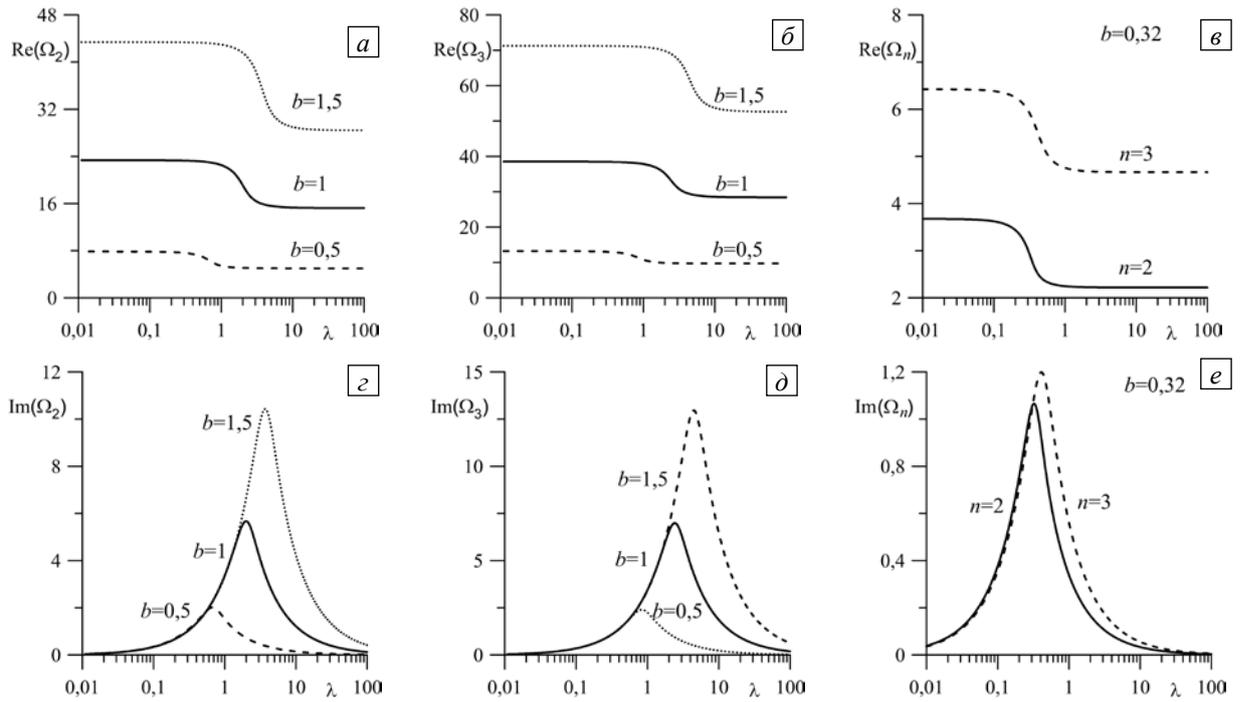


Рис. 3. Зависимости частоты  $Re(\Omega)$  и декремента затухания  $Im(\Omega)$  второй и третьей мод от параметра Хокинга  $\lambda$  при  $R_0 = 5$ ,  $\rho_i = 0,7$  и разных значениях  $b$

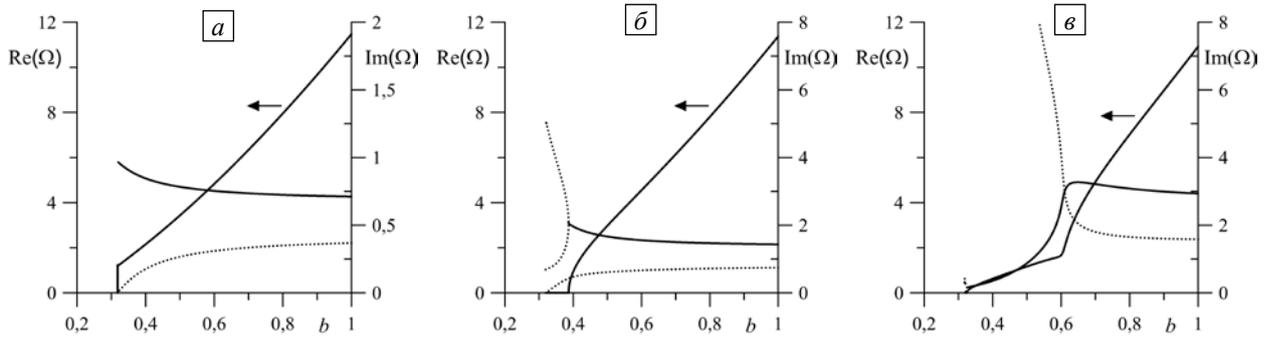


Рис. 4. Зависимости частоты  $Re(\Omega)$  и декремента затухания  $Im(\Omega)$  от геометрического параметра  $b$  при  $\rho_i = 0,7$  и разных значениях  $\lambda$ : 0,2 (а); 0,4 (б); 0,8 (в); (сплошная линия – колебательный, пунктирная – монотонный режимы)

Изменение безразмерной плотности капли  $\rho_i$  не приводит к качественному изменению спектра частот. Очевидно, что с уменьшением  $\rho_i$  в капле частота колебаний будет увеличиваться (см. Рис. 5а). Это связано с увеличением общей массы жидкости в системе, так как объем окружающей каплю жидкости всегда больше её объема. Таким образом, наименьшие частоты вибраций имеет капиллярный мост, а наибольшие — газовый пузырек.

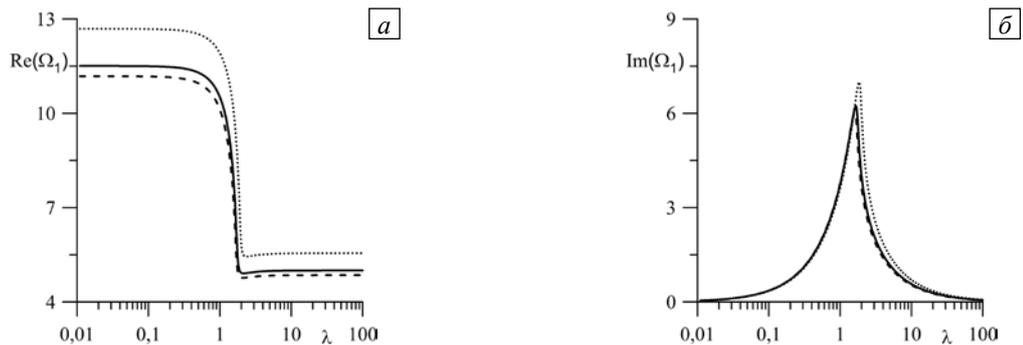


Рис. 5. Зависимости частоты  $Re(\Omega_1)$  (а) и декремента затухания  $Im(\Omega_1)$  (б) от параметра Хокинга  $\lambda$  при  $b=1$ ,  $R=5$  и разных значениях плотности жидкости капли  $\rho_i$ : 0,1 – пунктирная, 0,7 – сплошная,  $\rho_i = 0,9$  – штриховая линии

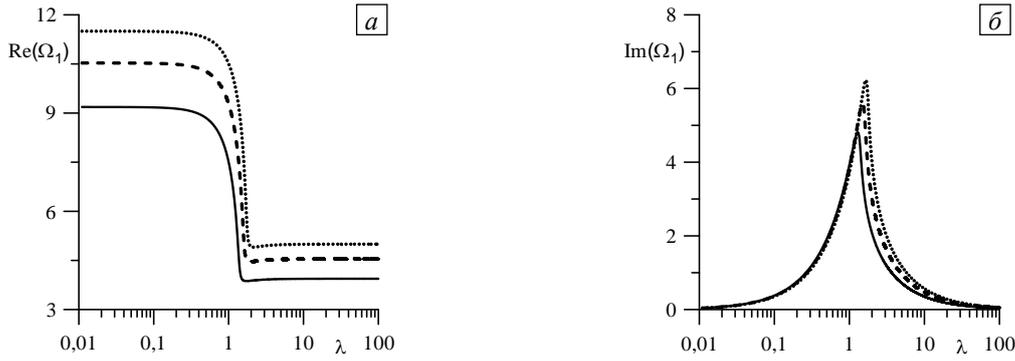


Рис. 6. Зависимости частоты  $\text{Re}(\Omega_1)$  (а) и декремента затухания  $\text{Im}(\Omega_1)$  (б) от параметра Хокинга  $\lambda$  при  $\rho_i = 0,7$  и разных значениях радиуса сосуда  $R_0$ : 1,1 – сплошная, 1,2 – штриховая, 2,0 – пунктирная линии

Значения частот  $\text{Re}(\Omega)$  и декрементов затухания  $\text{Im}(\Omega)$  слабо зависят от радиуса сосуда  $R_0$  (Рис. 6). Так, для параметров  $b=1$ ,  $\rho_i=0,7$ ,  $\lambda=0$  частоты составляют:  $\Omega_1(R_0=1,1)=9,185$ ,  $\Omega_1(R_0=1,2)=10,528$ ,  $\Omega_1(R_0=1,5)=11,3841$ ,  $\Omega_1(R_0=2)=11,4996$ ,  $\Omega_1(R_0=5)=11,5045$ ,  $\Omega_1(R_0=100)=11,5045$ . Видно, что с увеличением радиуса сосуда  $R_0$  их значения растут. Однако при расстояниях между боковой поверхностью капли и стенкой сосуда, сравнимых с радиусом капли или меньших его, возникает вопрос применимости используемой модели, которая не учитывает, в частности, силу Бьёркнеса [35] и другое. Например, сила Бьёркнеса между двумя пузырьками пропорциональна обратному квадрату расстояния между центрами этих пузырьков, то есть в данной работе —  $\sim (R_0 - 1)^{-2}$  (подробнее см. [36]). С другой стороны, действие этой силы вызывается в том числе и вязкостью жидкости.

#### 4. Вынужденные колебания

Рассмотрим вынужденные колебания капли. Решение краевой задачи (4)–(8), аналогично собственным колебаниям, будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям оператора Лапласа (4). Отметим, что внешняя сила (4) возбуждает нечётные моды:

$$\varphi_i(r, z, t) = \text{Re} \left( i \sum_{k=0}^{\infty} A_k R_k^{io}(r) \sin((2k+1)\pi z) e^{i\omega t} \right), \quad (14)$$

$$\varphi_e(r, z, t) = \text{Re} \left( i \sum_{k=0}^{\infty} (B_k R_k^{io}(r) + C_k R_k^{eo}(r)) \sin((2k+1)\pi z) e^{i\omega t} \right), \quad (15)$$

$$\zeta(z, t) = \text{Re} \left( \left( \sum_{k=0}^{\infty} D_k \sin((2k+1)\pi z) + H \sin\left(\frac{z}{b}\right) \right) e^{i\omega t} \right). \quad (16)$$

Подставляя решения (14)–(16) в уравнения (4)–(8), получим выражения для неизвестных амплитуд  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$  и  $H$ :

$$C_k = -B_k \frac{R_{kr}^{io}(R_0)}{R_{kr}^{eo}(R_0)}, \quad B_k = A_k \frac{R_{kr}^{io}(1) R_{kr}^{eo}(R_0)}{R_{kr}^{io}(1) R_{kr}^{eo}(R_0) - R_{kr}^{eo}(1) R_{kr}^{io}(R_0)}, \quad A_k = \frac{\omega}{R_{kr}^{io}(1)} (D_k + S_k H), \quad (17)$$

$$D_k = \frac{\omega^2}{\Omega_{ok}^2 - \omega^2} \left( S_k H - (\rho_i - \rho_e) \frac{\Omega_{ok}^2 G_k}{((2k+1)\pi b)^2 - 1} \right), \quad G_k = \frac{4(-1)^k}{(2k+1)^2 \pi^2}, \quad (18)$$

$$H = \frac{\omega^2 (\rho_i - \rho_e) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k G_k \Omega_{ok}^2}{(((2k+1)\pi b)^2 - 1) (\Omega_{ok}^2 - \omega^2)}}{\omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k S_k}{\Omega_{ok}^2 - \omega^2} + \sin\left(\frac{1}{2b}\right) - \frac{i\lambda}{\omega b} \cos\left(\frac{1}{2b}\right)}, \quad (19)$$

где  $G_k$  — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции  $\sin(z/b)$  по базисным функциям  $\sin((2k+1)\pi z)$ .

Отклонение боковой поверхности капли на середине её высоты (при  $z = 0$ ) всегда нулевое (см. (16)), так как внешней силой возбуждаются только нечётные моды. Введём обозначение  $\zeta_q = \max(\zeta|_{z=0,25})$  — максимальное отклонение поверхности капли от равновесного положения при  $z = 0,25$ . Аналогично, введём максимальное отклонение на твёрдой поверхности —  $\zeta_s = \max(\zeta|_{z=0,5})$ . Дополнительно обозначим  $\delta = \max(\gamma - \pi/2)|_{z=0,5}$  — максимальное отклонение краевого угла  $\gamma$  от положения его равновесия  $\gamma_0 = \pi/2$  на поверхности  $z = 0,5$ .

Зависимости  $\zeta_q$ ,  $\zeta_s$  и  $\delta$  от частоты внешнего воздействия показаны на рисунках 7 и 9 для значений  $b = 1$  и  $b = 0,32$ . Максимальные значения отклонения боковой поверхности и краевого угла достигаются при линейном резонансе. Профиль боковой поверхности  $\zeta$  и изменение краевого угла  $\gamma$  в разные моменты периода колебаний приведены на рисунках 8 и 10. Отметим, что при этом для значений параметров, которые соответствуют нулевой частоте первой моды (см. Рис. 2в, u), характерный резонансный максимум амплитуды отсутствует (см. Рис. 9). Из приведённых рисунков также видно, что с увеличением  $\lambda$  значения резонансных частот уменьшаются.

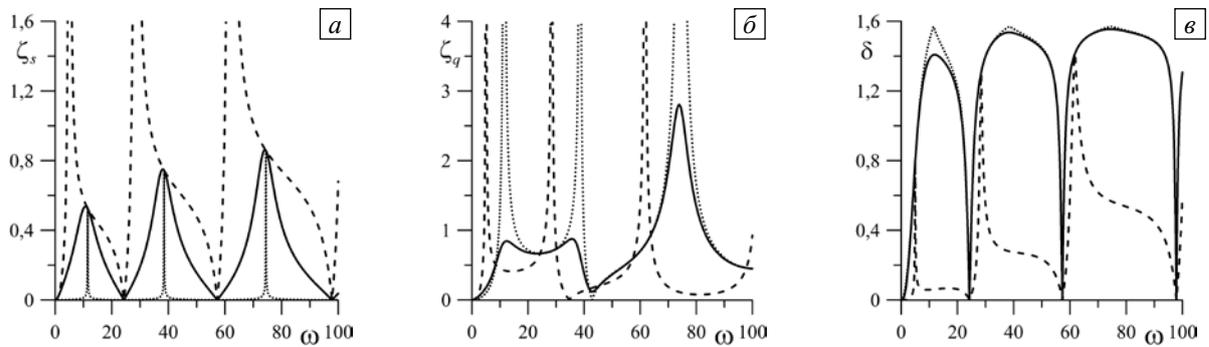


Рис. 7. Зависимости отклонений линии контакта  $\zeta_s$  (а), боковой поверхности  $\zeta_q$  (б) и краевого угла  $\delta$  (е) от частоты внешних вибраций  $\omega$  при  $R=5$ ,  $\rho_l=0,7$ ,  $b=1$  и разных значениях параметра Хокинга  $\lambda$ : 0,01 – пунктирная, 1 – сплошная,  $\lambda=100$  – штриховая линии

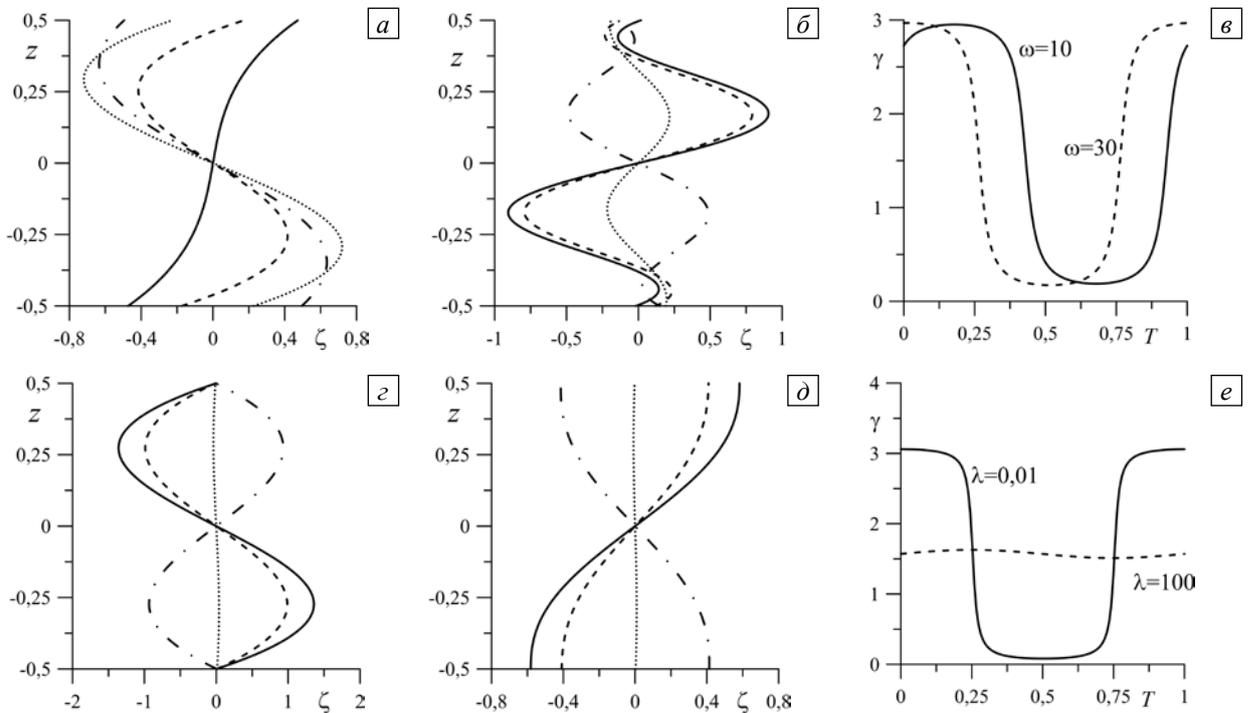
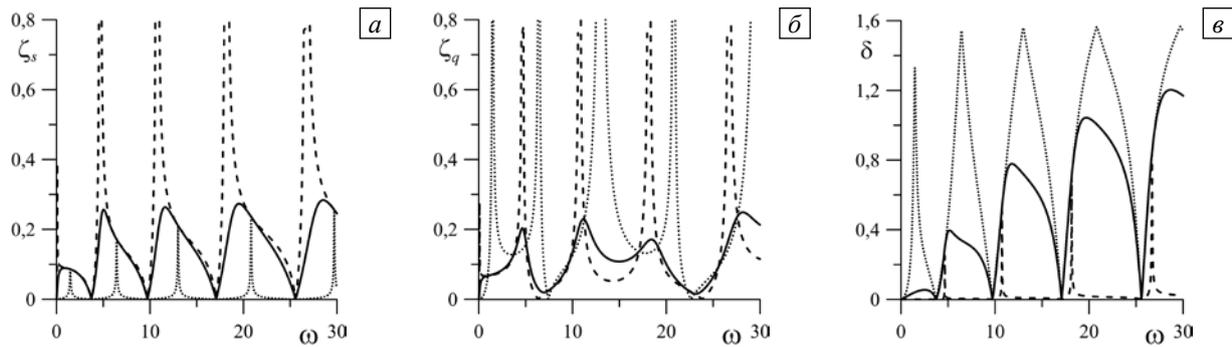
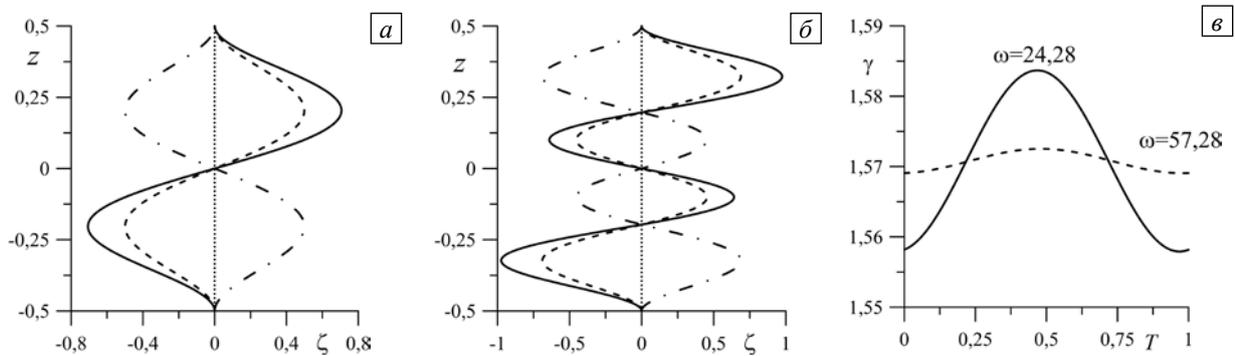


Рис. 8. Формы боковой поверхности капли (а, б, с, д) в разные моменты периода колебаний  $T$ : 0 – сплошная,  $T/8$  – штриховая,  $T/4$  – пунктирная,  $3T/8$  – штрихпунктирная линии; значения краевого угла  $\gamma$  (е, е) в зависимости от времени при разных значениях частоты вибраций  $\omega$  и параметра Хокинга  $\lambda$ ; при этом  $\lambda=1$  (а-е),  $\omega=10$  (а, с-е),  $\omega=30$  (б),  $\lambda=0,01$  (е),  $\lambda=100$  (д);  $R=5$ ,  $\rho_l=0,7$ ,  $b=1$



**Рис. 9.** Зависимости отклонений линии контакта  $\zeta_s$  (а), боковой поверхности  $\zeta_q$  (б) и краевого угла  $\delta$  (е) от частоты внешних вибраций  $\omega$  при  $R=5$ ,  $\rho_i=0,7$ ,  $b=0,32$  и разных значениях параметра Хокинга  $\lambda$ : 0,01 – пунктирная, 1 – сплошная, 100 – штриховая линии

При конечных значениях параметра  $\lambda$  и движении контактной линии диссипация максимальна (Рис. 7–10). Это соответствует результатам, показанным ранее для зависимости декрементов затухания собственных колебаний от значений  $\lambda$  (см. Рис. 2г, д). Для значения  $\lambda=1$  на рисунках 8а, б показан профиль боковой поверхности капли при возбуждении первой и второй гармоник. Краевой угол  $\gamma$  меняется в пределах  $(0, \pi)$  (Рис. 8в).



**Рис. 10.** Формы боковой поверхности (а, б) и значения краевого угла  $\gamma$  (е) при  $R=5$ ,  $\rho_i=0,7$ ,  $b=1$ ,  $\lambda=1$  в зависимости от времени (0 – сплошная,  $T/8$  – штриховая,  $T/4$  – пунктирная,  $3T/8$  – штрихпунктирная линии) при разных значениях частоты вибраций  $\omega$ :  $\omega=24,28$  (а),  $\omega=57,28$  (б)

В случае малых  $\lambda$ , несмотря на слабую диссипацию, амплитуда колебаний линии контакта  $\zeta_s$  имеет конечное значение (Рис. 7а, 8з), в то время как отклонение краевого угла велико (Рис. 7в, 8е). Это связано с интенсивным взаимодействием линии контакта с подложкой (напомним, что  $\lambda=0$  соответствует закреплённой линии контакта). Однако амплитуда отклонения боковой поверхности  $\zeta_q$  увеличивается с уменьшением  $\lambda$  (Рис. 7б, 9б) и стремится к бесконечности в пределе при нулевом  $\lambda$ . В другом предельном случае, при больших значениях  $\lambda$ , амплитуда колебаний линии контакта и боковой поверхности также стремится к бесконечности (Рис. 7б, 9б), что связано с малой диссипацией. Напомним, что эта ситуация отвечает фиксированному краевому углу, и линия контакта свободно скользит по твёрдой поверхности. Из рисунков 7в и 8е видно, что краевой угол отклоняется от равновесного значения незначительно.

При определенных частотах  $\omega$  движение капли не зависит от параметра  $\lambda$ : при любых значениях  $\lambda$  контактная линия остается неподвижной (Рис. 7а, 9а). Величины таких — «антирезонансных» — частот устанавливаются из условия обращения в нуль числителя в выражении (19). В таких точках амплитуда движения контактной линии  $\zeta_s$  обращается в нуль (Рис. 7а, 9а, 10а, б), а все кривые  $\zeta_q$  пересекаются (Рис. 7б, 9б). Отметим, что данный случай не сводится к состоянию закреплённой линии контакта ( $\lambda \rightarrow 0$ ), так как отклонение краевого угла  $\gamma$  от равновесного значения мало (Рис. 10е).

Выше, при исследовании собственных колебаний, показано, что значения частот слабо зависят от радиуса сосуда; исключение составляет интервал значений  $1 < R_0 \leq 2$  (Рис. 6). На рисунках 11, 12 показаны амплитуда колебаний и форма боковой поверхности капли для радиуса сосуда  $R_0=1,1$ , то есть при небольшой толщине слоя жидкости между каплей и боковой стенкой. Из рисунка 11 видно, что

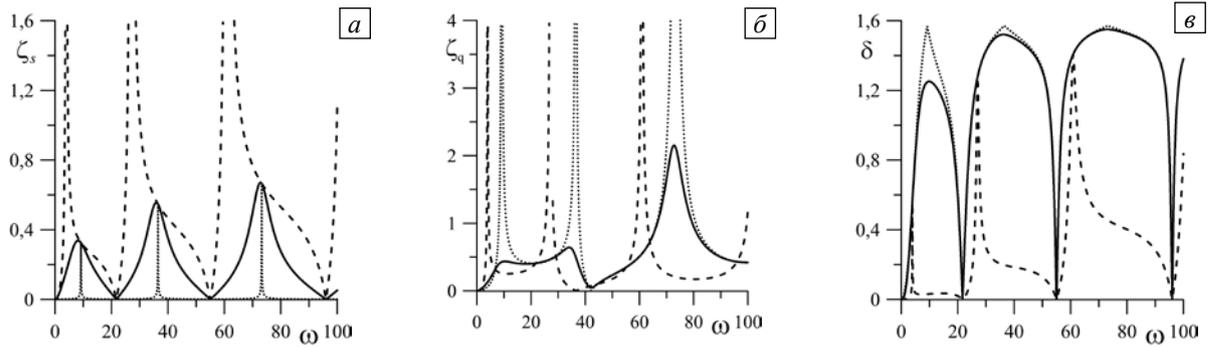


Рис. 11. Зависимости отклонений линии контакта  $\zeta_s$  (а), боковой поверхности  $\zeta_q$  (б) и краевого угла  $\delta$  (е) от частоты внешних вибраций  $\omega$  при  $R=1,1$ ,  $\rho_l=0,7$ ,  $b=1$ ,  $\lambda=1$  и разных значениях параметра Хокинга  $\lambda$ : 0,01 – пунктирная, 1 – сплошная, 100 – штриховая линии

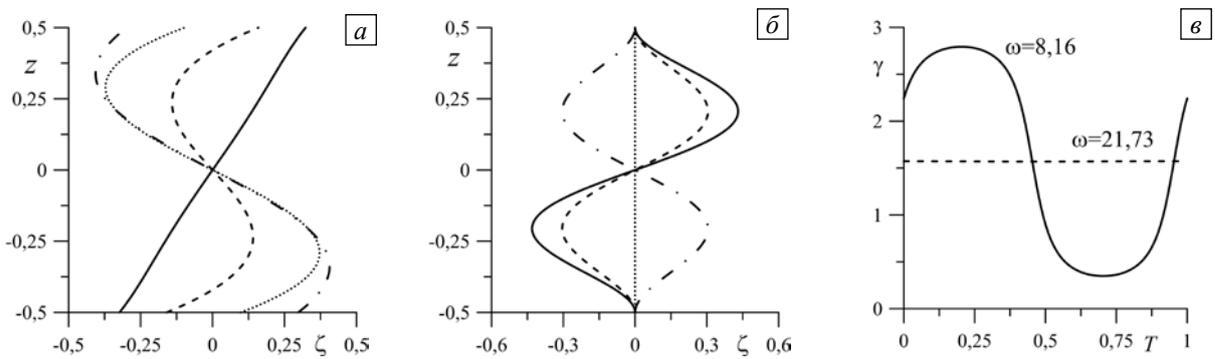


Рис. 12. Форма боковой поверхности (а, б) и значения краевого угла  $\gamma$  (е) в зависимости от времени при разных значениях частоты вибраций  $\omega$ ;  $R=1,1$ ,  $\rho_l=0,7$ ,  $b=1$ ,  $\lambda=1$

для конечных значений  $\lambda$  амплитуда колебаний меньше, чем при  $R_0 = 5$  (Рис. 7). Очевидно, что это вызвано уменьшением радиуса сосуда и, соответственно, толщины слоя жидкости, равной  $R_0 - 1$ . Форма боковой поверхности капли качественно не меняется (см. Рис. 8, 10, 12), уменьшается лишь амплитуда колебаний.

### 5. Заключение

Рассмотрено поведение цилиндрической капли жидкости, помещенной в сосуд конечного объёма, под действием осевых вибраций с учётом движения линии контакта.

Изучены собственные осесимметричные колебания цилиндрической капли; показано, что увеличение параметра Хокинга  $\lambda$  приводит к уменьшению частоты свободных колебаний. Наибольшую частоту имеет капля с фиксированной линией контакта, наименьшую — с фиксированным краевым углом. Похожие явления наблюдались и в других задачах при использовании граничного условия Хокинга на контактной линии, например см. [3, 5–11]. Во всех вышеперечисленных случаях это приводит к затуханию колебаний за исключением двух предельных состояний: закреплённой линии контакта и фиксированного краевого угла.

При исследовании собственных колебаний обнаружено, что основная частота осевых свободных колебаний может обращаться в нуль на некотором интервале значений  $\lambda$ . Длина этого интервала уменьшается с увеличением геометрического параметра  $b$ . Точке обращения частоты в нуль соответствует точка ветвления графика коэффициента затухания. Колебания становятся невозможными: для поверхностных мод собственных колебаний мощность диссипации пропорциональна площади боковой поверхности, то есть при постоянном объёме капли увеличение геометрического параметра  $b$  ведёт к уменьшению боковой поверхности капли, то есть снижению диссипации, сопровождающей поверхностные колебания. Отметим, что эффект обнуления частоты существует и для других, более высоких, мод колебаний. Однако этот эффект проявляется выше порога неустойчивости Релея–Плато основной моды. Аналогичное поведение было найдено и у цилиндрической капли в бесконечном сосуде [8] и цилиндрического пузырька [10]. Однако для полусферической капли на подложке [6] или газового пузырька [7] подобное явление не обнаружено.

Полученная зависимость основной частоты осесимметричной моды от параметра  $\lambda$  отличается от зависимостей других мод. При изучении трансляционной моды собственных колебаний [5, 8, 34] было обнаружено, что основная частота обращается в нуль начиная с некоторого значения  $\lambda$ . Частоты азимутальных мод собственных колебаний [8, 34] становятся нулевыми на некотором интервале значений  $\lambda$ . Однако этот интервал возникает лишь с некоторого значения  $b$ , и его ширина растет с увеличением значения  $b$ .

Частота каждой моды осесимметричных собственных колебаний увеличивается с ростом геометрического параметра  $b$ . При его малых значениях возможно развитие неустойчивости Релея–Плато монотонным образом. Критическое значение  $b$  равняется  $1/\pi$ , что соответствует половине длины волны релеевской неустойчивости.

При исследовании вынужденных осесимметричных колебаний обнаружено явление линейного резонанса. При конечных значениях параметра  $\lambda$  и движении контактной линии амплитуда колебаний остается ограниченной за счёт диссипации. В предельных случаях  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  амплитуда колебаний на резонансной частоте бесконечна. Найдены «антирезонансные» частоты, при которых отклонения линии контакта от равновесного значения отсутствуют при любых значениях  $\lambda$ .

Показано, что уменьшение радиуса сосуда приводит к увеличению частот собственных колебаний и снижению значений амплитуд отклонений боковой поверхности и линии контакта.

Важным является то, что значения частот собственных колебаний существенным образом меняются при изменении величины  $b$ . В физическом эксперименте при варьировании  $b$ , например, путем изменения высоты  $h^*$ , можно качественно менять поведение капли при фиксированном значении частоты вибраций. В результате наблюдений за боковой поверхностью или отклонением линии контакта от положения равновесия, возможно, удастся определить значение параметра  $\lambda$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант 14-21-00090).

## Литература

1. Zhang L., Thiessen D.B. Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines // J. Fluid Mech. – 2013. – Vol. 719. – P. 295-313. DOI
2. Bostwick J.B., Steen P.H. Dynamics of sessile drops. Part 1. Inviscid theory // J. Fluid Mech. – 2014. – Vol. 760. – P. 5-38. DOI
3. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 179. – P. 253-266. DOI
4. Keulegan G.H. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // J. Fluid Mech. – 1959. – Vol. 6. – P. 33-50. DOI
5. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Шкляев С.В. Неосесимметричные колебания полусферической капли // МЖГ. – 2004. – № 6. – С. 8-20. (English version DOI).
6. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyaev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate // Phys. Fluids. – 2006. – Vol. 18. – 012101. DOI
7. Shklyaev S., Straube A.V. Linear oscillations of a compressible hemispherical bubble on a solid substrate // Phys. Fluids. – 2008. – Vol. 20. – 052102. DOI
8. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // ПМТФ. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 78-86. (English version DOI).
9. Алабужев А.А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 151-161. DOI
10. Алабужев А.А., Кайсина М.И. Влияние движения линии контакта на осесимметричные колебания цилиндрического пузырька // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2015. – № 2(30). – С. 56-68.
11. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на колебания сжатой капли // ПМТФ. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 12-23. (English version DOI).
12. Алабужев А.А. Вынужденные колебания сжатой капли с учетом движения контактной линии // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2012. – № 4(22). – С. 7-10.
13. Vorkar A., Tsatopoulos J. Boundary-layer analysis of the dynamics of axisymmetric capillary bridges // Phys. Fluids A. – 1991. – Vol. 3, no. 12. – P. 2866-2874. DOI
14. Miles J.W. The capillary boundary layer for standing waves // J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 222. – P. 197-205. DOI
15. Демин В.А. К вопросу о свободных колебаниях капиллярного моста // МЖГ. – 2008. – № 4. – С. 28-37. (English version DOI).
16. Картавых Н.Н., Шкляев С.В. О параметрическом резонансе полуцилиндрической капли на осциллирующей твердой подложке // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2007. – № 1(6). – С. 23-28.
17. Иванцов А.О. Акустические колебания полусферической капли // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2012. – № 3(21). – С. 16-23.
18. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях // МЖГ. – 2005. – № 2. – С. 18-28. (English version DOI).
19. Hocking L.M. Waves produced by a vertically oscillating plate // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 179. – P. 267-281. DOI
20. Ablett R. An investigation of the angle of contact between paraffin wax and water // Philos. Mag. – 1923. – Vol. 46, no. 272. – P. 244-256. DOI

21. Dussan V.E.B. On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1979. – Vol. 11. – P. 371-400. DOI
22. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // *Phys. Fluids.* – 2009. – Vol. 21. – 072104. DOI
23. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // *Phys. Fluids.* – 2011. – Vol. 23. – 102105. DOI
24. Алабужев А.А. Динамика цилиндрической капли с учетом влияния гистерезиса краевого угла // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2012. – № 4(22). – С. 3-6.
25. Miles J.W. The capillary boundary layer for standing waves // *J. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 222. – P. 197-205. DOI
26. Ting C.-L., Perlin M. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation // *J. Fluid Mech.* – 1995. – Vol. 295. – P. 263-300. DOI
27. Perlin M., Schultz W.W., Liu Z. High Reynolds number oscillating contact lines // *Wave Motion.* – 2004. – Vol. 40, no. 1. – P. 41-56. DOI
28. Mampallil D., Eral H.B., Staicu A., Mugele F., van den Ende D. Electrowetting-driven oscillating drops sandwiched between two substrates // *Phys. Rev. E.* – 2013. – Vol. 88. – 053015. DOI
29. Kumar S. Liquid transfer in printing processes: liquid bridges with moving contact lines // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2015. – Vol. 47. – P. 67-94. DOI
30. Bostwick J.B., Steen P.H. Stability of constrained capillary surfaces // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2015. – Vol. 47. – P. 539-568. DOI
31. Ward T., Walrath W. Electrocapillary drop actuation and fingering instability in a planar Hele-Shaw cell // *Phys. Rev. E.* – 2015. – Vol. 91. – 013012. DOI
32. Lord Rayleigh. On the instability of cylindrical fluid surfaces // *Philos. Mag. S. 5.* – 1892. – Vol. 34, no. 207. – P. 177-180. DOI
33. Plateau J.A.F. Experimental and theoretical researches on the figures of equilibrium of a liquid mass withdrawn from the action of gravity // *Ann. Rep. Smithsonian Inst.* – 1863. – P. 270-285.
34. Алабужев А.А., Кайсина М.И. Трансляционная мода собственных колебаний цилиндрического пузырька // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2015. – № 1(29). – С. 35-41.
35. Bjerknes V.F.K. *Field of Force.* – New York: Columbia University Press, 1906. – 146 p.
36. Takemura F., Takagi S., Magnaudet J., Matsumoto Y. Drag and lift forces on a bubble rising near a vertical wall in a viscous liquid // *J. Fluid Mech.* – 2002. – Vol. 461. – P. 277-300. DOI

## References

1. Zhang L., Thiessen D.B. Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines. *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 719, pp. 295-313. DOI
2. Bostwick J.B., Steen P.H. Dynamics of sessile drops. Part 1. Inviscid theory. *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 760, pp. 5-38. DOI
3. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 253-266. DOI
4. Keulegan G.H. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins. *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 6, pp. 33-50. DOI
5. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyayev S.V. Non-axisymmetric oscillations of a hemispherical drop. *Fluid Dyn.*, 2004, vol. 39, no. 6, pp. 851-862. DOI
6. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyayev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, 012101. DOI
7. Shklyayev S., Straube A.V. Linear oscillations of a compressible hemispherical bubble on a solid substrate. *Phys. Fluids*, 2008, vol. 20, 052102. DOI
8. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 686-693. DOI
9. Alabuzhev A.A. Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 151-161. DOI
10. Alabuzhev A.A., Kaysina M.I. Influence of contact line motion on axisymmetric vibrations of a cylindrical bubble. *Vestnik PGU. Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2015, no. 2, pp. 56-68.
11. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Effect of the contact-line dynamics on the oscillations of a compressed droplet. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2012, vol. 53, no. 1, pp. 9-19. DOI
12. Alabuzhev A.A. Forced oscillations of an oblate drop. *Vestnik PGU. Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2012, no. 4, pp. 7-10.
13. Borkar A., Tsamopoulos J. Boundary-layer analysis of dynamics of axisymmetric capillary bridges. *Phys. Fluids A*, 1991, vol. 3, no. 12, pp. 2866-2874. DOI
14. Miles J.W. The capillary boundary layer for standing waves. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 222, pp. 197-205. DOI
15. Demin V.A. Problem of the free oscillations of a capillary bridge. *Fluid Dyn.*, 2008, vol. 43, no. 4, pp. 524-532. DOI
16. Kartavykh N.N., Shklyayev S.V. About parametrical resonance of semicylindrical drop on oscillating solid plane. *Vestnik PGU. Seriya: Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2007, no. 1, pp. 23-28.
17. Ivantsov A.O. Acoustic oscillations of semispherical drop. *Vestnik PGU. Seriya: Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2012, no. 3, pp. 16-23.
18. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Behavior of a cylindrical drop under multi-frequency vibration. *Fluid Dyn.*, 2005, vol. 40, no. 2, pp. 183-192. DOI
19. Hocking L.M. Waves produced by a vertically oscillating plate. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 267-281. DOI
20. Ablett R. An investigation of the angle of contact between paraffin wax and water. *Philos. Mag.*, 1923, vol. 46, no. 272, pp. 244-256. DOI

21. Dussan V.E.B. On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamic contact lines. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1979, vol. 11, pp. 371-400. DOI
22. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, 072104. DOI
23. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyayev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Phys. Fluids*, 2011, vol. 23, 102105. DOI
24. Alabuzhev A.A. The influence of contact angle's hysteresis on the cylindrical drop's dynamics. *Vestnik PGU. Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2012, no. 4, pp. 3-6.
25. Miles J.W. The capillary boundary layer for standing waves. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 222, pp. 197-205. DOI
26. Ting C.-L., Perlin M. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: an experimental investigation. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 295, pp. 263-300. DOI
27. Perlin M., Schultz W.W., Liu Z. High Reynolds number oscillating contact lines. *Wave Motion*, 2004, vol. 40, no. 1, pp. 41-56. DOI
28. Mampallil D, Eral H.B, Staicu A., Mugele F., van den Ende D. Electrowetting-driven oscillating drops sandwiched between two substrates. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, 053015. DOI
29. Kumar S. Liquid transfer in printing processes: liquid bridges with moving contact lines. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2015, vol. 47, pp. 67-94. DOI
30. Bostwick J.B., Steen P.H. Stability of constrained capillary surfaces. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2015, vol. 47, pp. 539-568. DOI
31. Ward T., Walrath W. Electrocapillary drop actuation and fingering instability in a planar Hele-Shaw cell. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, 013012. DOI
32. Lord Rayleigh. On the instability of cylindrical fluid surface. *Philos. Mag.*, 1892, vol. 34, no. 207, pp. 177-180. DOI
33. Plateau J.A.F. Experimental and theoretical researches on the figures of equilibrium of a liquid mass withdrawn from the action of gravity. *Ann. Rep. Smithsonian Inst.*, 1863, pp. 270-285.
34. Alabuzhev A.A., Kaysina M.I. Translational mode of eigen oscillations of a cylindrical bubble. *Vestnik PGU. Seriya: Fizika – Bulletin of Perm University. Series: Physics*, 2015, no. 1, pp. 35-41.
35. Bjerknes V.F.K. *Field of force*. New York: Columbia University Press, 1906. 146 p.
36. Takemura F., Takagi S., Magnaudet J., Matsumoto Y. Drag and lift forces on a bubble rising near a vertical wall in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 461, pp. 277-300. DOI

Поступила в редакцию 19.05.2016; опубликована в электронном виде 30.09.2016