

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.24
УДК 539.4

ПРИМЕНЕНИЕ ЯВНОГО ПО ВРЕМЕНИ МЕТОДА ЦЕНТРАЛЬНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

На основе пошагового алгоритма с привлечением центральных конечных разностей для аппроксимации по времени разработана математическая модель упругопластического деформирования перекрестно-армированных пластин с изотропно упрочняющимися материалами компонентов композиции. Модель позволяет в дискретные моменты времени находить решение упругопластической задачи по явной схеме. В приближении Кармана сформулирована начально-краевая задача динамического поведения гибких армированных в своей плоскости пластин. При этом учитывается их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. С единичных позиций получены разрешающие уравнения, соответствующие двум вариантам теории Тимошенко. Построена явная схема типа «крест» для численного интегрирования поставленной начально-краевой задачи, согласованная с пошаговым алгоритмом моделирования упругопластического поведения армированной среды. Проведены расчеты динамического поведения различно армированных стеклопластиковых прямоугольных удлиненных пластин при их упругопластическом цилиндрическом изгибе. Показано, что структура армирования существенно влияет на их упругопластическое динамическое поведение. Выявлено, что классическая теория пластин, как правило, не приемлема для проведения соответствующих расчетов (разве что для весьма тонких пластин), а первый вариант теории Тимошенко дает удовлетворительные результаты только в случаях относительно тонких конструкций, армированных низко модульными волокнами. Исходя из результатов работы рекомендуется использовать для расчетов упругопластического поведения армированных пластин второй вариант теории Тимошенко как более точный.

Ключевые слова: армированные пластины, теории Тимошенко, динамический изгиб, геометрическая нелинейность, упругопластическое деформирование, явные численные схемы, схема типа «крест»

USING OF EXPLICIT TIME-CENTRAL DIFFERENCE METHOD FOR NUMERICAL SIMULATION OF DYNAMIC BEHAVIOR OF ELASTO-PLASTIC FLEXIBLE REINFORCED PLATES

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

Based on the step-wise algorithm involving central finite differences in time, a mathematical model is developed for elastic-plastic deformation of cross-reinforced plates with isotropic hardening materials of components of the composition, which at discrete points in time allows obtaining the solution of elasto-plastic problems by the explicit scheme. In Karman's approximation, the initial-boundary value problem is formulated for the dynamic behavior of flexible, reinforced in their own plane, plates. Their weakened resistance to the transverse shear is taken into account. With one approach, the resolving equations are obtained that correspond to two variants of the Timoshenko theory. The explicit "cross" scheme was constructed for the numerical integration of the initial-boundary-value problem consistent with the incremental algorithm used to simulate the elastic-plastic behavior of reinforced medium. The calculations of the dynamic behavior are performed for elastic-plastic cylindrical bending of different reinforced fiberglass rectangular elongated plates. It is shown that the structure of the reinforcement significantly affects the elastic-plastic dynamic behavior of such structures. It has been found that the classical theory of plates is as a rule, unacceptable for carrying out the required calculations (except for very thin plates), and the first version of the Timoshenko theory gives reasonable results only in cases of relatively thin structures reinforced of low modulus fibers. It is recommended to use the second variant of the Timoshenko theory for calculation of the elastic-plastic behavior of reinforced plates, as more accurate.

Key words: reinforced plates, Timoshenko theory, dynamic bending, geometric nonlinearity, elastic-plastic deformation, explicit numerical scheme, cross-type scheme

1. Введение

Пластины и оболочки широко используются в современной конструкторской практике. При наличии высокоинтенсивных нагрузок, присущих в настоящее время многим инженерным изделиям, повреждаемость таких тонкостенных элементов в значительной мере определяет возможность их последующей эксплуатации. Поэтому проблема расчета механического (в частности динамического) поведения таких элементов конструкций является в механике деформируемого твердого тела одной из важнейших.

Большинство решений динамических задач для пластин и оболочек получено на основе моделей упругого или жесткопластического тела. Обзоры соответствующих публикаций даны в [1, 2 и др.]. Динамическое поведение изотропных упругопластических пластин и оболочек (в том числе и подкрепленных) исследовано, например, в [1, 3, 4 и др.], причем в [1, 3, 4] — на основе теории Рейсснера–Миндлина [5, 6 и др.] (в отечественной литературе эти теории, как правило, называются теориями типа Тимошенко [7 и др.] или теориями, учитывающими независимость ротации поперечной нормали [8 и др.]), а в [3],

кроме того, — на основе второго варианта теории Тимошенко [9], учитывающего искривление поперечной нормали тонкостенной конструкции.

Известно, что второй вариант теории Тимошенко в упругом случае является асимптотически точным [10]. Первый же вариант теории Тимошенко [9] (теория Рейсснера–Миндлина) не является асимптотически точным, поэтому его применимость требует специального обоснования. Так, в [11] были выяснены границы применимости этой теории, причем в качестве эталона использовались результаты расчетов по теории, основанной на гипотезе ломаной линии [12, 13 и др.].

В современном машиностроении активно применяются тонкостенные элементы из металлокомпозитов [14 и др.]. Так как при интенсивном нагружении металлоизделия деформируются упругопластически [1, 3, 15 и др.], актуальной является задача моделирования неупругого поведения армированных пластин и оболочек. Сейчас эта проблема находится в состоянии становления. В частности, в работах [16, 17 и др.] изучалась динамика армированных балок и пластин на основе моделей упругопластического и вязкопластического деформирования материалов компонентов композиции. Однако эти исследования проводились в рамках классических теорий, то есть не учитывалось ослабленное сопротивление армированных тонкостенных конструкций поперечным сдвигам. Последующие же исследования показали, что при неупругом изгибном деформировании металлокомпозитных пластин необходимо учитывать в них поперечные сдвиги [18].

Математическое моделирование динамики композитных конструкций, деформируемых неупруго, осложняется двумя проблемами, которые тесно связаны между собой: 1) построением структурной модели упругопластического поведения армированной среды; 2) выбором численной схемы интегрирования по времени соответствующей начально-краевой задачи.

Для решения динамических задач применяются явные и неявные численные методы [15]. Из явных методов наиболее часто прибегают к тем, которые основываются на схемах аппроксимации производных по времени центральными конечными разностями [1, 4, 19–21 и др.], реже — к методу де Вожеля [20 и др.]. Из неявных же методов наибольшее распространение получили методы Ньюмарка [16, 17, 21–23 и др.], реже — использующие схему с опережением (метод Хубольта [21]).

В работе [24] для композитных пластин, состоящих из изотропных слоев, механическое поведение которых описывается соотношениями деформационной теории пластичности, на основе явного метода Эйлера решена задача с асимптотическим осреднением характеристик таких пластин при их квазистатическом нагружении.

В [25] на базе методов шагов по времени предложена модель упругопластического деформирования перекрестно армированной среды, механическое поведение материалов компонентов которой представляется соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением. Интегрирование соответствующей задачи по времени осуществлялось по неявной схеме, адаптированной под применение метода Ньюмарка. Недостаток модели [25] заключается в том, что в армирующих волокнах напряженное состояние является одноосным (в поперечном направлении нормальные и касательные напряжения не учитываются). Эта же особенность напряженного состояния в арматуре присуща и структурным моделям в работах [16, 17]. Полное же напряженное состояние в армирующих элементах учтено, например, в [26, 27], и продемонстрирована возможность построения в итерационной форме определяющих уравнений композитной среды и перекрестно армированного слоя в рамках деформационной теории пластичности. Позднее эти соотношения использованы в [18]. Однако до сих пор не построены структурные соотношения для сложно армированных сред, в волокнах которых учитывалось бы полное напряженное состояние и механическое поведение материалов компонентов композиции которых описывалось бы соотношениями теории пластического течения.

Накопленный на сегодняшний день опыт расчетной практики показывает, что при изучении динамики конструкций, подверженных кратковременным интенсивным внешним воздействиям, целесообразно обращаться к явным численным схемам [1, 3, 4, 15, 19–21 и др.], поскольку они более просто поддаются алгоритмизации. В связи со всем вышеизложенным настоящая работа посвящена математическому моделированию динамики упругопластически (в рамках теории Прандтля–Рейсса–Хилла [28]) деформируемых перекрестно армированных гибких пластин как с учетом их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам, так и с учетом полного напряженно-деформированного состояния (НДС) в армирующих волокнах. При этом интегрирование соответствующей начально-краевой задачи осуществляется на основе аппроксимации производных по времени центральными разностями, то есть при помощи явной численной схемы.

2. Моделирование динамического поведения перекрестно армированных упругопластически деформируемых гибких пластин

Рассмотрим динамическое поведение гибридной армированной пластины толщиной $2h$ (Рис. 1), с которой связана прямоугольная декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ так, что плоскость Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) является срединной, а ось x_3 направлена по толщине тонкостенного элемента ($|x_3| \leq h$). Пластина

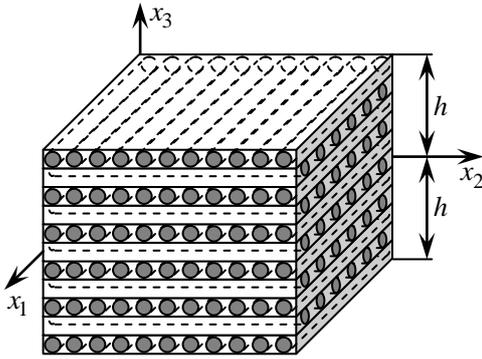


Рис. 1. Элемент армированной композитной пластины

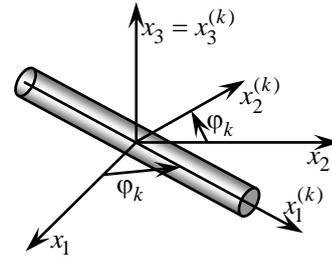


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с армирующим волокном k -го семейства

перекрестно армирована волокнами (Рис. 2) в плоскостях, параллельных отсчетной плоскости Ox_1x_2 , причем структура армирования в направлении x_3 является квазиоднородной. Пластина усилена K семействами волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq K$). Относительное объемное содержание связующего в представительном элементе композиции обозначим через ω_0 , тогда выполняется условие нормировки

$$\omega_0 + \sum_k \omega_k = 1. \tag{1}$$

Здесь и далее суммирование по индексу k производится от 1 до K .

Так как пластина перекрестно армирована в плоскостях, параллельных отсчетной плоскости Ox_1x_2 , то для адекватного описания динамического изгибного поведения под нагрузкой необходимо учитывать ее ослабленное сопротивление поперечным сдвигам [1, 3, 4, 9, 18, 20 и др.]. С этой целью используем неклассические теории типа Тимошенко [1, 3, 9, 18, 20 и др.], а геометрическую нелинейность учтем в приближении Кармана (то есть деформации являются малыми, а повороты могут быть значительными). Как обычно в рамках таких теорий, обжатие тонкостенного элемента во внимание не примем, следовательно, перемещение в направлении x_3 зададим так:

$$U_3(t, \mathbf{x}, x_3) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \tag{2}$$

а нетривиальные деформации и тангенциальные перемещения U_i с учетом (2) имеют выражения [1, 3, 9, 18, 20]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{x}, x_3) &= \frac{\beta}{2h} [(x_3 + h)\varepsilon_{i3}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - (x_3 - h)\varepsilon_{i3}^{(-)}(t, \mathbf{x})] + \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \\ \varepsilon_{ii}(t, \mathbf{x}, x_3) &= \partial_i u_i - x_3 \partial_i^2 w + \frac{2x_3}{3h^2} (3h^2 - \beta x_3^2) \partial_i \varepsilon_{i3}^0 + \frac{\beta x_3}{2h} [(x_3 + 2h) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - (x_3 - 2h) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)}] + \frac{1}{2} (\partial_i w)^2, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}(t, \mathbf{x}, x_3) &= \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) - x_3 \partial_1 \partial_2 w + \frac{x_3}{3h^2} (3h^2 - \beta x_3^2) (\partial_1 \varepsilon_{23}^0 + \partial_2 \varepsilon_{13}^0) + \\ &+ \frac{\beta x_3}{4h} [(x_3 + 2h) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)}) - (x_3 - 2h) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)})] + \frac{1}{2} \partial_1 w \partial_2 w; \\ U_i(t, \mathbf{x}, x_3) &= u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2} (3h^2 - \beta x_3^2) \varepsilon_{i3}^0 + \frac{\beta x_3}{2h} [(x_3 + 2h) \varepsilon_{i3}^{(+)} - (x_3 - 2h) \varepsilon_{i3}^{(-)}], \\ &i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \tag{4}$$

где w — прогиб; u_i — тангенциальные перемещения точек срединной плоскости ($x_3 = 0$) в направлениях x_i ; $\varepsilon_{i3}^{(+)}$, $\varepsilon_{i3}^{(-)}$ — деформации поперечного сдвига соответственно на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) лицевых поверхностях пластины; при $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} = 0$ функции ε_{i3}^0 определяют деформации поперечного сдвига в срединной плоскости ($x_3 = 0$); t — время; t_0 — начальный момент времени; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменным x_i ($i = 1, 2$); G — область, занимаемая пластиной в плане; β — параметр переключения, позволяющий выбрать тот или иной вариант теории деформирования изгибаемой пластины. Заметим, что в настоящем исследовании суммирование по повторяющимся индексам не производится.

Если полагаем $\beta = 0$, $\varepsilon_{i3}^0 \equiv 0$, то в дальнейшем получаются соотношения, основанные на гипотезах классической теории Кирхгофа [3, 16, 17]; если же $\beta = 1$, то из (2)–(4) вытекают соотношения, соответствующие второму варианту теории Тимошенко [3, 9, 18], а при $\beta = 0$ — первому варианту теории Тимошенко (теории Рейсснера) [1, 3, 20], основанному на кинематической гипотезе прямой линии (недеформируемой нормали). Не выписанная в (3) деформация ε_{33} при необходимости может быть вычислена из определяющих соотношений для материала армированной композиции пластины (см. ниже).

Таким образом, в равенствах (2)–(4) неизвестными являются функции u_i , w , ε_{i3}^0 , $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$, зависящие только от времени t и двух пространственных переменных x_i ($i = 1, 2$).

В качестве силовой гипотезы используем традиционное для тонкостенных элементов конструкций допущение [1–4, 9, 16–18, 20, 22]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{x}, x_3) \approx 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0. \quad (5)$$

Так как весьма затруднительно [9] (особенно при упругопластическом деформировании материалов фаз композиции) установить фактическое распределение напряжений, деформаций и их скоростей в композитном материале, где связующая матрица имеет многочисленные разно ориентированные более жесткие включения, то для построения практически пригодных определяющих соотношений упругопластического деформирования композиционного материала рассматриваемой пластины необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок, аналогичных принятым в [9, 26, 27].

Итак, считаем:

1. Армированный материал пластины в пределах репрезентативной ячейки представляет собой макроскопически квазигомогенное анизотропное тело (при достаточно густом равномерном насыщении связующего армирующими волокнами это предположение вполне допустимо [9]).
2. Между связующим и арматурой существует полное сцепление (идеальный механический контакт).
3. В пределах представительного элемента, выделенного из композита на микроуровне, деформации и напряжения во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей деформаций и напряжений на микроуровне в малых окрестностях границ контакта связующего и волокон, пренебрегаем.
4. Поля напряжений и деформаций в композиции усредняются по объему репрезентативной ячейки, то есть согласно допущению 3 определяются по правилу простой смеси (пропорционально относительному объемному содержанию ω_k каждого составляющего).
5. Все материалы фаз композиции однородны и изотропны; деформирование этих материалов описывается следующими соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением [15, 28]:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(k)} = 2\mu^{(k)}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} + \lambda^{(k)}\delta_{ij}\sum_{l=1}^3\dot{\varepsilon}_{ll}^{(k)} - A^{(k)}s_{ij}^{(k)}\sum_{l=1}^3\sum_{m=1}^3s_{lm}^{(k)}\dot{\varepsilon}_{lm}^{(k)}, \quad (i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq K), \quad (6)$$

где

$$A^{(k)} = \frac{\mu^{(k)}c^{(k)}}{J_2^{(k)}}(1 - \kappa^{(k)}); \quad J_2^{(k)} = \frac{1}{6}\left[\left(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)}\right)^2 + \left(\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{33}^{(k)}\right)^2 + \left(\sigma_{33}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^{(k)2} + \sigma_{23}^{(k)2} + \sigma_{31}^{(k)2}\right)\right]; \quad (7)$$

$$\lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)}E^{(k)}}{(1 + \nu^{(k)})(1 - 2\nu^{(k)})}; \quad \mu^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}; \quad \kappa^{(k)} = \frac{\bar{\mu}^{(k)}}{\mu^{(k)}};$$

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{при } J_2^{(k)} < J_{2*}^{(k)} \text{ или } J_2^{(k)} = J_{2*}^{(k)}, \quad W^{(k)} \leq 0, \\ 1 & \text{при } J_2^{(k)} = J_{2*}^{(k)}, \quad W^{(k)} > 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$W^{(k)} = \sum_{l=1}^3\sum_{m=1}^3s_{lm}^{(k)}e_{lm}^{(k)}; \quad J_{2*}^{(k)} = \max\{J_{2p}^{(k)}, J_{2m}^{(k)}\}; \quad s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3}\sum_{l=1}^3\sigma_{ll}^{(k)}; \quad (9)$$

$$e_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3}\sum_{l=1}^3\varepsilon_{ll}^{(k)} \quad (0 \leq k \leq K);$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций в k -й фазе композиции; $s_{ij}^{(k)}$, $e_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензоров-девиаторов напряжений и деформаций в тех же материалах; $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала k -го компонента композиции; $\mu^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$ — константы Ламе

тех же материалов; $\bar{\mu}^{(k)}$ — касательный модуль диаграммы чистого сдвига материала k -го компонента композиции; $c^{(k)}$ — функция переключения, определяющая активное упругопластическое нагружение или разгрузку k -го компонента композиции; $J_{2p}^{(k)}$ — значение инварианта $J_2^{(k)}$, при котором материал k -й фазы композиции начинает впервые деформироваться пластически; $J_{2m}^{(k)}$ — максимальное значение $J_2^{(k)}$, достигнутое за всю предыдущую историю деформирования элемента среды k -го компонента композиции; δ_{ij} — символ Кронекера; точка означает частное дифференцирование по времени t .

В силу допущений 2, 3 и условий сопряжения полей напряжений и перемещений на границах контакта волокон со связующим имеем:

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(k)} = \bar{\sigma}_{ij}^{(0,k)} \quad (i, j = \overline{1, 3} \text{ кроме } i = j = 1); \quad (10)$$

$$\bar{\varepsilon}_{11}^{(k)} = \bar{\varepsilon}_{11}^{(0,k)} \quad (k = 1, 2, \dots, K), \quad (11)$$

где $\bar{\sigma}_{ij}^{(0,k)}$, $\bar{\varepsilon}_{11}^{(0,k)}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций в связующем, записанные в локальной системе координат $x_l^{(k)}$ ($l = \overline{1, 3}$), связанной с арматурой k -го семейства (Рис. 2); $\bar{\sigma}_{ij}^{(k)}$, $\bar{\varepsilon}_{11}^{(k)}$ — то же в арматуре k -го семейства.

Так как пластина армирована в плоскостях, параллельных отсчетной плоскости Ox_1x_2 , локальная система координат $x_l^{(k)}$ следует из глобальной системы x_l ($l = \overline{1, 3}$) при повороте на угол армирования φ_k ($1 \leq k \leq K$) вокруг оси $x_3 = x_3^{(k)}$ (см. Рис. 2), поэтому из (10) при $i = j = 3$ получаем

$$\bar{\sigma}_{33}^{(k)} = \sigma_{33}^{(k)}, \quad \bar{\sigma}_{33}^{(0,k)} = \sigma_{33}^{(0)} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{33}^{(k)} = \sigma_{33}^{(0)}, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (12)$$

Здесь и далее чертой сверху помечены величины, относящиеся к локальной системе координат $x_l^{(k)}$, а те же величины без черты — в глобальной системе x_l (то есть соотношения (6) записаны в системе x_l , $l = \overline{1, 3}$).

Согласно же допущению 4 осредненные напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в композиции находятся так:

$$\sigma_{ij} = \omega_0 \sigma_{ij}^{(0)} + \sum_k \omega_k \sigma_{ij}^{(k)}; \quad (13)$$

$$\varepsilon_{ij} = \omega_0 \varepsilon_{ij}^{(0)} + \sum_k \omega_k \varepsilon_{ij}^{(k)} \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (14)$$

Из равенств (13) при $i = j = 3$ с учетом (1), (5) и (12) следует

$$\dot{\sigma}_{33}^{(k)} = \sigma_{33} \approx 0, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (15)$$

Исключая из рассмотрения процессы, сопровождающиеся возникновением ударных волн и, как следствие, откольных явлений и расслоения пластины (динамические нагрузки вызывают только движение пластины как тонкостенной системы), предполагаем, что равенства, аналогичные (15), справедливы и для скоростей напряжений ($\dot{\sigma}_{33}^{(k)} = \dot{\sigma}_{33} \approx 0$), поэтому соотношения (6) с учетом (15) можно преобразовать, исключив из рассмотрения скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{33}^{(k)}$, как это традиционно делается в определяющих уравнениях для тонкостенных элементов конструкций [1, 3, 9, 18, 27]. Тогда после несложных, но громоздких преобразований эти соотношения для k -го компонента композиции пластины можно записать в следующей матричной форме

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{B}_k \dot{\varepsilon}_k; \quad (16)$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}^{(k)} = \mathbf{f}_k^* \dot{\varepsilon}_k, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (17)$$

где

$$\dot{\sigma}_k = \{\dot{\sigma}_1^{(k)}, \dot{\sigma}_2^{(k)}, \dot{\sigma}_3^{(k)}, \dot{\sigma}_4^{(k)}, \dot{\sigma}_5^{(k)}\}^* = \{\dot{\sigma}_{11}^{(k)}, \dot{\sigma}_{22}^{(k)}, \dot{\sigma}_{12}^{(k)}, \dot{\sigma}_{13}^{(k)}, \dot{\sigma}_{23}^{(k)}\}^*, \quad 1$$

$$\dot{\varepsilon}_k = \{\dot{\varepsilon}_1^{(k)}, \dot{\varepsilon}_2^{(k)}, \dot{\varepsilon}_3^{(k)}, \dot{\varepsilon}_4^{(k)}, \dot{\varepsilon}_5^{(k)}\}^* = \{\dot{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{12}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{13}^{(k)}, \dot{\varepsilon}_{23}^{(k)}\}^*, \quad 2 \quad (18)$$

$$\mathbf{f}_k = \{f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, f_3^{(k)}, f_4^{(k)}, f_5^{(k)}\}^*, \quad 0 \leq k \leq K; \quad 3$$

$\mathbf{B}_k = (b_{ij}^{(k)})$ — 5×5 -матрица «жесткостей» материала k -й фазы композиции, компоненты которой и вектора-столбца \mathbf{f}_k определяются так:

$$\begin{aligned} b_{ii}^{(k)} &= 2\mu^{(k)} + \lambda^{(k)} - a_0^{(k)} r_{ij}^{(k)2} + c_i^{(k)} f_i^{(k)}, & b_{12}^{(k)} &= b_{21}^{(k)} = \lambda^{(k)} - a_0^{(k)} r_{12}^{(k)} r_{21}^{(k)} + c_1^{(k)} f_2^{(k)}, \\ b_{im}^{(k)} &= -a_i^{(k)} \sigma_m^{(k)}, & b_{mm}^{(k)} &= 2\mu^{(k)} - 2A^{(k)} \sigma_m^{(k)2} + 3a_0^{(k)} \sigma_0^{(k)} \sigma_m^{(k)} f_m^{(k)}, & b_{3l}^{(k)} &= -a_3^{(k)} \sigma_3^{(k)} \sigma_l^{(k)}, \\ b_{45}^{(k)} &= -a_3^{(k)} \sigma_4^{(k)} \sigma_5^{(k)}, & b_{mi}^{(k)} &= b_{im}^{(k)} / 2, & b_{l3}^{(k)} &= b_{3l}^{(k)}, & b_{54}^{(k)} &= b_{45}^{(k)}, & f_i^{(k)} &= -c_i^{(k)} / z^{(k)}, \\ f_m^{(k)} &= -c_0^{(k)} \sigma_m^{(k)}, & c_0^{(k)} &= 6a_0^{(k)} \sigma_0^{(k)} / z^{(k)}, & c_i^{(k)} &= \lambda^{(k)} + a_0^{(k)} \sigma_0^{(k)} r_{ij}^{(k)}, \\ a_i^{(k)} &= 6a_0^{(k)} (r_{ij}^{(k)} + \sigma_0^{(k)} f_i^{(k)}), & a_3^{(k)} &= 2A^{(k)} (1 + a_0^{(k)} \sigma_0^{(k)2} / z^{(k)}), \\ z^{(k)} &= 2\mu^{(k)} + \lambda^{(k)} - a_0^{(k)} \sigma_0^{(k)2}, & \sigma_0^{(k)} &= \sigma_1^{(k)} + \sigma_2^{(k)}, & a_0^{(k)} &= A^{(k)} / 9, \\ r_{ij}^{(k)} &= 2\sigma_i^{(k)} - \sigma_j^{(k)} \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2, \quad m = \overline{3, 5}, \quad l = 4, 5, \quad 0 \leq k \leq K); \end{aligned} \quad (19)$$

$\dot{\sigma}_k$, $\dot{\varepsilon}_k$ — вектор-столбцы скоростей напряжений и скоростей деформаций в материалах k -й фазы композиции; звездочка в верхнем индексе означает операцию транспонирования. Равенства (18)₁ и (18)₂ связывают пять компонент $\dot{p}_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 5}$) некоторого вектора-столбца $\dot{\mathbf{p}}_k$ и компоненты соответствующих симметричных тензоров второго ранга $\dot{p}_{jl}^{(k)}$ ($j, l = \overline{1, 3}$, $0 \leq k \leq K$). Для каждого компонента композиции равенства (16) записаны в глобальной системе координат.

При рассматриваемом плоско-перекрестном армировании пластины переход от глобальной системы координат x_l к локальной системе $x_l^{(k)}$, связанной с арматурой k -го семейства, осуществляется по формулам:

$$\bar{\sigma}_k = \mathbf{G}_k \sigma_k \quad (\bar{\sigma}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^5 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)}), \quad \bar{\varepsilon}_k = \mathbf{G}_k \varepsilon_k \quad (\bar{\varepsilon}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^5 g_{ij}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)}, \quad i = \overline{1, 5}), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (20)$$

где \mathbf{G}_k — 5×5 -матрица с ненулевыми компонентами [9]

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= g_{22}^{(k)} = \cos^2 \varphi_k, & g_{12}^{(k)} &= g_{21}^{(k)} = \sin^2 \varphi_k, & g_{13}^{(k)} &= -g_{23}^{(k)} = \sin 2\varphi_k, & g_{32}^{(k)} &= -g_{31}^{(k)} = \sin \varphi_k \cos \varphi_k, \\ g_{33}^{(k)} &= \cos 2\varphi_k, & g_{44}^{(k)} &= g_{55}^{(k)} = \cos \varphi_k, & g_{45}^{(k)} &= -g_{54}^{(k)} = \sin \varphi_k, & 1 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (21)$$

σ_k , ε_k — пятикомпонентные векторы-столбцы напряжений и деформаций в k -м компоненте композиции, состоящие из элементов $\sigma_i^{(k)}$, $\varepsilon_i^{(k)}$ и имеющие структуру, аналогичную (18); $\bar{\sigma}_k$, $\bar{\varepsilon}_k$ — те же векторы, компоненты которых $\bar{\sigma}_i^{(k)}$, $\bar{\varepsilon}_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 5}$) определены в локальной системе координат $x_l^{(k)}$ ($l = \overline{1, 3}$, $1 \leq k \leq K$).

Из соотношений (10), (11) с учетом равенств и соответствий, аналогичных (20), (18), следует:

$$\sum_{j=1}^5 g_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)} = \sum_{j=1}^5 g_{1j}^{(k)} \varepsilon_j^{(0)}, \quad \sum_{j=1}^5 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)} = \sum_{j=1}^5 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(0)} \quad (i = \overline{2, 5}, \quad 1 \leq k \leq K). \quad (22)$$

Так как рассматривается случай малых деформаций, то соотношения, аналогичные (10)–(15), (20), (22), справедливы и для скоростей напряжений и скоростей деформаций (в силу допустимости формального дифференцирования этих равенств по времени t).

Далее предполагаем, что соотношения (16), (17) в каждый момент времени являются линеаризованными, тогда из равенств (22) с учетом (16) и допущения 5 вытекает система алгебраических равенств:

$$\sum_{j=1}^5 g_{1j}^{(k)} \dot{\varepsilon}_j^{(k)} = \sum_{j=1}^5 g_{1j}^{(k)} \dot{\varepsilon}_j^{(0)}, \quad \sum_{j=1}^5 g_{ij}^{(k)} \sum_{l=1}^5 b_{jl}^{(k)} \dot{\varepsilon}_l^{(k)} = \sum_{j=1}^5 g_{ij}^{(k)} \sum_{l=1}^5 b_{jl}^{(0)} \dot{\varepsilon}_l^{(0)} \quad (i = \overline{2, 5}, \quad 1 \leq k \leq K). \quad (23)$$

Представим (23) в матричном виде:

$$\mathbf{D}_k \dot{\varepsilon}_k = \mathbf{C}_k \dot{\varepsilon}_0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (24)$$

где компоненты 5×5 -матриц $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$ определяются так:

$$d_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k)} = g_{ij}^{(k)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^5 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^5 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)} \quad (i = \overline{2, 5}, \quad j = \overline{1, 5}, \quad 1 \leq k \leq K). \quad (25)$$

В силу равенств (25) $\det \mathbf{D}_k \neq 0$, поэтому из (24) получаем матричное уравнение:

$$\dot{\mathbf{e}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\mathbf{e}}_0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (26)$$

где

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq K; \quad (27)$$

\mathbf{D}_k^{-1} — 5×5 -матрица, обратная матрице \mathbf{D}_k . Соотношение (26) есть матричная форма связи скорости деформаций k -го семейства арматуры $\dot{\mathbf{e}}_k$ со скоростью деформаций связующего $\dot{\mathbf{e}}_0$ (компоненты тех и других заданы в глобальной системе координат x_j).

Запишем для матричных соотношений скоростей выражения, аналогичные (13), (14), и исключим из них за счет (16), (26) скорости деформаций в арматуре k -го семейства, тогда будем иметь:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \omega_0 \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 + \sum_k \omega_k \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \omega_0 \mathbf{B}_0 \dot{\mathbf{e}}_0 + \sum_k \omega_k \mathbf{B}_k \dot{\mathbf{e}}_k = \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_k \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \dot{\mathbf{e}}_0; \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \omega_0 \dot{\mathbf{e}}_0 + \sum_k \omega_k \dot{\mathbf{e}}_k = \left(\omega_0 \mathbf{I} + \sum_k \omega_k \mathbf{E}_k \right) \dot{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{H} \dot{\mathbf{e}}_0 \quad (\mathbf{H} \dot{\mathbf{e}}_0 = \dot{\mathbf{e}}), \quad (29)$$

где

$$\mathbf{H} = \omega_0 \mathbf{I} + \sum_k \omega_k \mathbf{E}_k; \quad (30)$$

\mathbf{I} — единичная 5×5 -матрица. Так как $\det \mathbf{H} \neq 0$, из (29) следует

$$\dot{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\mathbf{e}}. \quad (31)$$

Здесь \mathbf{H}^{-1} — 5×5 -матрица, обратная матрице \mathbf{H} (см. (30)). Равенство (31) выражает в матричной форме зависимость скорости деформаций связующего $\dot{\mathbf{e}}_0$ от скорости осредненных деформаций композиции $\dot{\mathbf{e}}$.

Подставим (31) в (28), тогда с учетом допущения 1 приходим к матричному соотношению

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{V} \dot{\mathbf{e}}, \quad (32)$$

где \mathbf{V} — 5×5 -матрица эффективных «жесткостей» композиции, определяемая матричным равенством

$$\mathbf{V} = \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_k \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}. \quad (33)$$

При вычислении \mathbf{V} в соотношении (33) нужно учесть выражения для матриц (30), (27), (25), (21). В случае линейно-упругого поведения материалов фаз композиции (при $c^{(k)} \equiv 0$; см. (8)) матрица \mathbf{V} в (32) является матрицей эффективных жесткостей рассматриваемой композиции пластины, поэтому и при упругопластическом деформировании материалов компонентов композиции эту матрицу условимся по-прежнему называть матрицей эффективных «жесткостей» композиции. Это же замечание справедливо и в отношении матриц \mathbf{B}_k ($0 \leq k \leq K$), входящих в определяющие соотношения для фаз композиции (16). При однонаправленном армировании упругой среды компоненты матрицы \mathbf{V} совпадают с эффективными жесткостями волокнистой композиции, имеющими место в рамках структурной модели В.В. Болотина [29].

Для некоторого упрощения дальнейших выкладок (хотя это и не принципиально) предполагаем, что на пластину действуют только распределенные нормальные поверхностные нагрузки, а касательные нагрузки отсутствуют, то есть

$$\sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \sigma_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h) \equiv 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2. \quad (34)$$

В частности, таким свойством обладают воздействия, вызванные воздушной взрывной волной [22].

Так как равенства (13) при $i = 1, 2$ и $j = 3$ справедливы при любых значениях ω_0, ω_k ($1 \leq k \leq K$), удовлетворяющих (1), то из (34) следует, что на лицевых поверхностях пластины ($x_3 = \pm h$) выполняются соотношения:

$$\sigma_{i3}^{(k)} \Big|_{x_3=\pm h} = 0, \quad \dot{\sigma}_{i3}^{(k)} \Big|_{x_3=\pm h} = 0, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (35)$$

Из определяющих уравнений (6) с учетом (9), (35) вытекает, что

$$\varepsilon_{i3}^{(k)} \Big|_{x_3=\pm h} = 0, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0. \quad (36)$$

Как обычно, предполагаем, что в начальный момент времени t_0 пластина находится в естественном состоянии: $\varepsilon_{i3}^{(k)} \equiv 0$ при $t = t_0$, $\mathbf{x} \in G$, $|x_3| \leq h$. Тогда с учетом (36) получаем:

$$\varepsilon_{i3}^{(k)} \Big|_{x_3=\pm h} = 0, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0. \quad (37)$$

После подстановки (37) в соотношения (14) при $i=1, 2$ и $j=3$ имеем:

$$\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h) = 0, \quad i=1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0. \quad (38)$$

Таким образом, при нормальных внешних нагрузках (согласно (34)) деформации поперечного сдвига $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ в соотношениях (3), (4) при $\beta=1$ становятся известными, и они тождественно равны нулю.

Отметим, что в рамках теории Рейсснера ($\beta=0$; см. (3)) граничные условия (34) в общем случае тождественно удовлетворить не удается.

Уравнения движения гибкой пластины в приближении Кармана с учетом (2)–(4), (34), (38) и малости деформаций имеют вид

$$2h\rho\ddot{w} = \sum_{i=1}^2 \partial_i \left(F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad 2h\rho\ddot{u}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) - (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) \partial_i w; \quad (39)$$

$$\frac{2}{3} h^3 \rho \left[2 \left(1 - \frac{\beta}{5} \right) \ddot{\varepsilon}_{i3}^0 - \partial_i \ddot{w} \right] = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3} \quad (i=1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0), \quad (40)$$

где

$$\rho = \omega_0 \rho_0 + \sum_k \omega_k \rho_k, \quad F_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i, j=1, 2); \quad (41)$$

ρ_0, ρ_k — объемная плотность материала связующего и арматуры k -го семейства; $\sigma_{33}^{(+)}, \sigma_{33}^{(-)}$ — заданные нормальные напряжения на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) лицевых поверхностях пластины, порожденные нормальными поверхностными нагрузками.

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение новые функции: $\gamma_i(t, \mathbf{x}) \equiv 2 \left(1 - \frac{\beta}{5} \right) \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w$. Отсюда

$$\varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) = \frac{5}{2(5-\beta)} (\gamma_i + \partial_i w) \quad (i=1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0). \quad (42)$$

После подстановки (42) в уравнение (40) получаем:

$$\frac{2}{3} h^3 \rho \ddot{\gamma}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3} \quad (i=1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0). \quad (43)$$

Таким образом, равенства (39), (43) образуют систему уравнений движения гибкой пластины.

Подставим (42) в соотношения (3), (4) и учтем равенства (38). Тогда приходим к выражениям вида:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}(t, \mathbf{x}, x_3) &= \partial_i u_i - x_3 \partial_i^2 w + \frac{5x_3}{3h^2(5-\beta)} (3h^2 - \beta x_3^2) (\partial_i \gamma_i + \partial_i^2 w) + \frac{1}{2} (\partial_i w)^2, \\ \varepsilon_{12}(t, \mathbf{x}, x_3) &= \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) - x_3 \partial_1 \partial_2 w + \frac{5x_3}{6h^2(5-\beta)} (3h^2 - \beta x_3^2) (\partial_1 \gamma_2 + \partial_2 \gamma_1 + 2\partial_1 \partial_2 w) + \frac{1}{2} \partial_1 w \partial_2 w, \\ \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{x}, x_3) &= \frac{5}{2h^2(5-\beta)} (h^2 - \beta x_3^2) (\gamma_i + \partial_i w); \end{aligned} \quad (44)$$

$$U_i(t, \mathbf{x}, x_3) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{5x_3}{3h^2(5-\beta)}(3h^2 - \beta x_3^2)(\gamma_i + \partial_i w),$$

$$i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0. \quad (45)$$

Для численного интегрирования рассматриваемой задачи динамики упругопластически изгибаемой армированной пластины используем метод шагов по времени [1, 4, 15–17, 20–25], то есть будем разыскивать ее решение в следующие дискретные моменты времени:

$$t_{n+1} = t_n + \tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (46)$$

где $\tau = \text{const}$ — шаг по времени.

Предполагаем, что в моменты t_m известны значения следующих функций:

$$u_i^m(\mathbf{x}) \equiv u_i(t_m, \mathbf{x}), \quad w^m(\mathbf{x}) \equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad \gamma_i^m(\mathbf{x}) \equiv \gamma_i(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_j^m(\mathbf{x}, x_3) \equiv \sigma_j(t_m, \mathbf{x}, x_3),$$

$$\sigma_j^{(k)}(\mathbf{x}, x_3) \equiv \sigma_j^{(k)}(t_m, \mathbf{x}, x_3), \quad \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad (47)$$

$$i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 5}, \quad 0 \leq k \leq K, \quad m = n-1, n, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h,$$

тогда по формулам (41) с учетом соответствий, аналогичных (18), в момент времени t_n можем установить все величины, входящие в правые части уравнений (39), (43).

Далее для аппроксимации встречающихся производных по времени t обратимся к центральным конечным разностям [1, 4, 19–21], что позволяет в рассматриваемой задаче построить явную численную схему интегрирования. Аппроксимируя вторые производные по времени в левых частях равенств (39), (43) конечными разностями с учетом обозначений, аналогичных (47), получаем:

$$\frac{2h\rho}{\tau^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) = \sum_{l=1}^2 \partial_l \left(F_{l3}^n + \sum_{j=1}^2 F_{lj}^n \partial_j w^n \right) + \sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)},$$

$$\frac{2h\rho}{\tau^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(F_{ij}^n - F_{j3}^n \partial_j w^n \right) - \left(\sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)} \right) \partial_i w^n, \quad (48)$$

$$\frac{2h^3\rho}{3\tau^2} \left(\gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij}^n - F_{i3}^n \quad (i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad n = 1, 2, 3\dots).$$

Так как правые части в (48) известны, то из этих уравнений можем определить неизвестные функции w^{n+1} , u_i^{n+1} , γ_i^{n+1} в момент времени t_{n+1} (см. (46)). При известных w^{n+1} , u_i^{n+1} , γ_i^{n+1} по формулам (44), (45) вычисляются деформации ε_{ij}^{n+1} , ε_{i3}^{n+1} и тангенциальные перемещения U_i^{n+1} во всех точках пластины при $t = t_{n+1}$. В силу того, что в момент времени t_{n-1} деформации ε_{ij}^{n-1} , ε_{i3}^{n-1} ($i, j = 1, 2$) также известны (на основании (44) с учетом допущения (47)), с помощью центральных конечных разностей можем найти и скорости осредненных деформаций в каждой точке пластины в момент времени t_n :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^n = \frac{1}{2\tau} \left(\varepsilon_{ij}^{n+1} - \varepsilon_{ij}^{n-1} \right), \quad \dot{\varepsilon}_{i3}^n = \frac{1}{2\tau} \left(\varepsilon_{i3}^{n+1} - \varepsilon_{i3}^{n-1} \right), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h \quad (i, j = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3\dots). \quad (49)$$

Выше соотношения (16), (17) считались линеаризованными, что эквивалентно предположению о том, что в момент времени t_n компоненты $b_{ij}^{(k)}$ ($i, j = \overline{1, 5}$) матриц \mathbf{B}_k в (16) известны. Следовательно, на основании (29), как из СЛАУ, с учетом (30), (27), (25), (21), (49) и соответствий (18) в момент времени t_n установим скорости деформаций связующего материала $\dot{\varepsilon}_0^n$, а по формуле (26) — скорости деформаций арматуры k -го семейства $\dot{\varepsilon}_k^n$ ($1 \leq k \leq K$). После этого по формулам (16) в каждой точке пластины вычислим и скорости напряжений в фазах композиции $\dot{\sigma}_k^n$ ($0 \leq k \leq K$) в момент времени t_n .

В силу допущения малости деформаций для скоростей напряжений в фазах композиции справедливы конечно-разностные аппроксимации:

$$\frac{1}{2\tau} \left(\boldsymbol{\sigma}_k^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1} \right) = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad n = 1, 2, 3... \quad (50)$$

Так как правые части в (50) уже известны (см. (16)), то из них с учетом (47) можем найти напряжения во всех компонентах композиции $\boldsymbol{\sigma}_k^{n+1}$ ($0 \leq k \leq K$) и в каждой точке пластины в момент времени t_{n+1} .

Согласно формулам (7), с учетом (15) и (17), сомножитель $A^{(k)}$, входящий в выражения для коэффициентов (19), зависит, в силу (8), (9), от $\sigma_{ij}^{(k)n}$ и $\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)n}$. В соответствии с (15) и предположениями (47) напряжения $\sigma_{ij}^{(k)n}$ в момент времени t_n уже известны. Однако функция переключения $c^{(k)n}(\mathbf{x}, x_3) \equiv c^{(k)}(t_n, \mathbf{x}, x_3)$, входящая в $A^{(k)n}(\mathbf{x}, x_3)$, обуславливается не только $\sigma_{ij}^{(k)n}$, но и $\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)n}$ (см. (7)–(9)), причем в рассматриваемый момент времени t_n скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^{(k)n}$ следует итерационно уточнять по формулам (26), (31). В процессе таких итераций будут пересчитываться и коэффициенты $b_{ij}^{(k)}$, $f_i^{(k)}$ (см. (19)), определяющие матрицы \mathbf{B}_k и векторы-столбцы \mathbf{f}_k в соотношениях (16), (17), а значит, на основе равенств (16), (17) с учетом соответствий (18) будут корректироваться и $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)n}$, $\dot{\epsilon}_{33}^{(k)n}$.

После того как в момент времени t_n этот итерационный процесс сойдется с требуемой точностью, по формулам (50) можно окончательно рассчитать напряжения в фазах композиции $\sigma_{ij}^{(k)n+1}$ ($0 \leq k \leq K$) в следующий момент времени t_{n+1} . Для начала такого итерационного процесса функцию переключения $c^{(k)n}$ можно «взять» с предыдущего момента времени, то есть

$$c^{(k)n}(\mathbf{x}, x_3) = c^{(k)n-1}(\mathbf{x}, x_3), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq k \leq K, \quad n = 1, 2, 3... \quad (51)$$

При достаточно малых шагах по времени τ (см. (46)) такой итерационный процесс может и не потребоваться [30]. В этом случае функция переключения $c^{(k)n}$ в предыдущих рассуждениях сначала определяется по формуле (51), а затем один раз пересчитывается по формуле (8) с учетом (9), (15), (17).

Представленный итерационный процесс качественно аналогичен итерационной процедуре «посадки» напряженного состояния на поверхность текучести в момент времени t_n , использованной, например, в [1, 4, 20 и др.] и изначально предложенной Уилкинсом [31] для идеально пластичных материалов. Здесь следует отметить, что схема Уилкинса была разработана для численного интегрирования уравнений, записанных в эйлеровых координатах, а настоящее исследование опирается на лагранжево описание. Кроме того, Уилкинс вводил две сетки по времени: основную (46) и сдвинутую на полшага ($t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$), причем перемещения и напряжения находились в основные моменты времени t_n , а скорости и скорости деформаций — в моменты времени $t_{n+1/2}$. Поскольку попытка построить численную схему для интегрирования рассматриваемой задачи с применением двух сеток по времени не привела к успеху, автором настоящей работы использована единая по времени сетка (46), как и в [19, 32].

Таким образом, если из (50) после окончания итерационного процесса уже известны напряжения $\sigma_{ij}^{(k)n+1}$ ($0 \leq k \leq K$) во всех компонентах композиции, то определенными при $m = n, n+1$ будут все функции, указанные в (47). Поэтому в момент времени t_{n+1} по формулам (13) можно установить осредненные напряжения в материале композиции пластины σ_{ij}^{n+1} . Используя соотношения (41), при $t = t_{n+1}$ можем вычислить все силовые факторы F_{ij}^{n+1} , F_{i3}^{n+1} , M_{ij}^{n+1} , входящие в правые части уравнений (48). Так как прогиб w^{n+1} был рассчитан ранее из первого уравнения (48), то получаем правые части уравнений (48) в момент времени t_{n+1} (при этом в (48) нужно заменить n на $n+1$). Следовательно, теперь по приведенной выше схеме можно построить решение динамической задачи упругопластического изгиба перекрестно-армированной в плане гибкой пластины при времени t_{n+2} и в последующие моменты.

Обратим внимание на то, что в рамках изложенной численной схемы не потребовался явный вид соотношений (32) (с учетом (33)). При решении же динамической задачи линейно-упругого деформирования армированной гибкой пластины схема реализуется существенно проще на основе матричных соотношений (32), где матрица эффективных жесткостей композиции \mathbf{B} отыскивается всего один раз по формуле (33) с учетом (30), (27), (25), (21), (19), причем в (19) следует принять $A^{(k)} \equiv 0$ ($0 \leq k \leq K$).

Для однозначного интегрирования рассматриваемой упругопластической задачи необходимы начальные и граничные условия. Так как предполагается, что в начальный момент времени $t = t_0$ пластина находится в естественном состоянии, то начальные условия имеют вид:

$$U_i(t_0, \mathbf{x}, x_3) = 0, \quad \dot{U}_i(t_0, \mathbf{x}, x_3) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h. \quad (52)$$

Из равенств (2), (45), (52) следует

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) \equiv \overset{0}{w}(\mathbf{x}) = 0, \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) \equiv \overset{0}{\dot{w}}(\mathbf{x}) = 0, \quad u_i(t_0, \mathbf{x}) \equiv \overset{0}{u}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \dot{u}_i(t_0, \mathbf{x}) \equiv \overset{0}{\dot{u}}_i(\mathbf{x}) = 0, \\ \gamma_i(t_0, \mathbf{x}) \equiv \overset{0}{\gamma}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \dot{\gamma}_i(t_0, \mathbf{x}) \equiv \overset{0}{\dot{\gamma}}_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G). \end{aligned} \quad (53)$$

В окрестности естественного состояния материалы фаз композиции пластины деформируются линейно-упругим образом, поэтому, согласно (8), функции переключения $c^{(k)}$ в начальный момент времени имеют нулевое значение (см. (51)):

$$c^{(k)}(\mathbf{x}, x_3) \equiv \overset{0}{c}^{(k)}(t_0, \mathbf{x}, x_3) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (54)$$

Граничные условия для пластины могут быть весьма разнообразными. Так как они общеизвестны, то здесь не приводятся. Укажем лишь, что для случая жесткого закрепления торцевой поверхности (кромки) пластины имеют место следующие граничные условия:

$$U_i(t, \mathbf{x}, x_3) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0. \quad (55)$$

На основании (2) из (55) при $i = 3$ получаем:

$$w(t_n, \mathbf{x}) \equiv \overset{n}{w}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (56)$$

где Γ — контур, ограничивающий область G , занимаемую пластиной в плане. Первые два равенства (55) (при $i = 1, 2$) с учетом (45) будем удовлетворять в интегральном смысле [18], то есть интегрируем равенства (55) при $i = 1, 2$ по толщине пластины с весами 1,0 и x_3 , тогда имеем:

$$u_i(t_n, \mathbf{x}) \equiv \overset{n}{u}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \gamma_i(t_n, \mathbf{x}) \equiv \overset{n}{\gamma}_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad i = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (57)$$

Таким образом, начальные (53), (54) и граничные (56), (57) условия позволяют однозначно проинтегрировать задачу динамического изгиба упругопластической армированной пластины с жестко закрепленными кромками.

Если в плане пластина является прямоугольной, то, заменяя в уравнениях (48) производные $\partial_i(\bullet)$ по пространственным переменным x_i от известных (в силу предположения (47)) функций их конечно-разностными аппроксимациями, приходим к явной схеме (типа «крест» [1, 4, 19–21]) численного интегрирования рассматриваемой задачи. Если же область G является неканонической, то для дискретизации уравнений (48) (или (39), (43)) по пространственным переменным x_i ($i = 1, 2$) можно использовать вариационно-разностный подход, развитый в работах [1, 4, 20 и др.].

Согласно структуре левых частей равенств (48), для начала расчета по изложенной выше явной схеме необходимо знать не только значения $\overset{0}{w}$, $\overset{0}{u}_i$, $\overset{0}{\gamma}_i$ (см. (53)), но и $\overset{1}{w}$, $\overset{1}{u}_i$, $\overset{1}{\gamma}_i$, $i = 1, 2$ (при $n = 1$ в (48)). Соотношения для этих величин следуют из формулы Тейлора с учетом начальных условий (53) и равенств (39), (43) при $t = t_0$ [19, 32]:

$$\begin{aligned} {}^1\dot{w}(\mathbf{x}) &= {}^0\dot{w}(\mathbf{x}) + \tau {}^0\dot{\dot{w}}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} {}^0\dot{\dot{\dot{w}}}(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx \frac{\tau^2}{4h\rho} \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right), \\ {}^1u_i(\mathbf{x}) &= {}^0u_i(\mathbf{x}) + \tau {}^0\dot{u}_i(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} {}^0\dot{\dot{u}}_i(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ {}^1\gamma_i(\mathbf{x}) &= {}^0\gamma_i(\mathbf{x}) + \tau {}^0\dot{\gamma}_i(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} {}^0\dot{\dot{\gamma}}_i(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \quad i=1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (58)$$

где приближенные равенства выполняются с точностью порядка τ^3 . Величины 1w , 1u_i , ${}^1\gamma_i$ можно также определить на основе явного метода де Вожела [20].

Кроме равенств (58) в момент времени $t_1 = \tau$ необходимо задать и значения функций переключения $c^{(k)}$. Как уже отмечалось, в окрестности естественного состояния деформирование компонентов композиции является линейно-упругим, поэтому при достаточно малом шаге по времени τ , согласно (51), (54), при $n=1$ можно принять

$$c^{(k)}(\mathbf{x}, x_3) = c^{(k)}(\mathbf{x}, x_3) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (59)$$

Таким образом, соотношения (48) с учетом (53), (56)–(59) позволяют реализовать схему типа «крест» для численного интегрирования задачи динамического изгиба упругопластической армированной гибкой пластины с жестко закрепленными кромками.

В работах [1, 4, 20 и др.] показано, что при расчетах динамики тонкостенных элементов композитных конструкций, проводимых в рамках теорий типа Тимошенко, для обеспечения устойчивости схемы типа «крест» шаг по времени τ должен быть выбран с учетом неравенств:

$$\Delta_e/\tau > a_e, \quad 2h/\tau > a_3, \quad (a_e = \sqrt{E_{ee}/\rho}, \quad a_3 = \sqrt{E_{33}/\rho}), \quad (60)$$

где ρ находится из (41); Δ_e — максимальный размер ячейки дискретизации области G в направлении вектора \mathbf{e} , лежащего в плоскости Ox_1x_2 ; E_{ee} , E_{33} — эффективные модули упругости первого рода в направлениях \mathbf{e} и x_3 , которые вычисляются на основе компонент матрицы эффективных податливостей, обратной матрице \mathbf{B} (см. (32), (33) при $c^{(k)} \equiv 0$, $0 \leq k \leq K$ в (8)) [9]. Так как первое неравенство (60) должно выполняться для произвольного направления \mathbf{e} , то при сложных неоднородных криволинейных структурах армирования пластин выбор величины τ из условий (60) в общем случае представляет сложную задачу. Однако нетрудно видеть, что если неравенства, аналогичные (60), справедливы для каждого компонента композиции пластины, то автоматически выполняются и условия (60) для армированной пластины в целом. Поэтому далее будем использовать именно такой критерий устойчивости разработанной явной численной схемы.

3. Обсуждение результатов расчетов

В качестве модельной задачи исследуем цилиндрический динамический изгиб прямоугольной удлиненной пластины, изображенной на рисунке 3, имеющей ширину $L=1$ м и разную толщину $2h$. Пластину ориентируем вдоль оси Ox_1 , ее кромки $x_2 = 0, L$ жестко закрепим (см. (56), (57)). Согласно (34) касательные нагрузки на лицевых поверхностях отсутствуют. Предполагаем, что закрепление, нагружение и структура армирования в продольном направлении Ox_1 не изменяются. Следовательно, решение рассматриваемой задачи не зависит от переменной x_1 , и $u_1 \equiv 0$, $\gamma_1 \equiv 0$. Пластина изготовлена

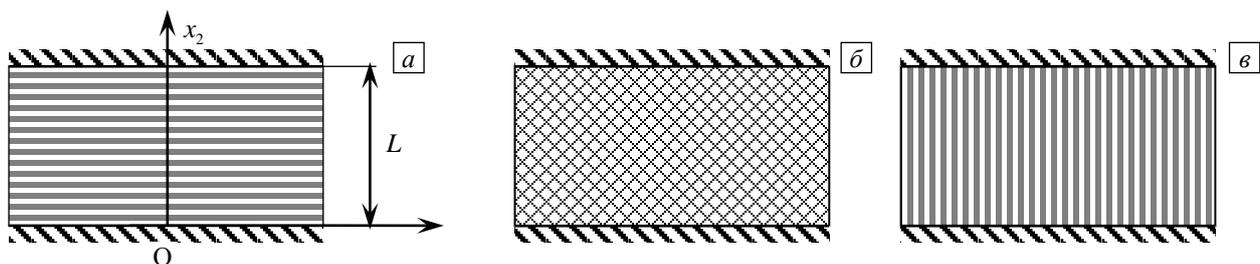


Рис. 3. Прямоугольная удлиненная пластина с тремя структурами армирования: продольной (а), перекрестной ортогональной (б), «поперечной» (в)

из эпоксидной смолы, отвержденной ароматическим аммиаком, и армирована двумя семействами ($K = 2$) стеклянных волокон S-994, которые уложены перекрестно-симметрично ($\varphi_1 = -\varphi_2 = \text{const}$; см. Рис. 2) с одинаковой плотностью $\omega_1 = \omega_2 = 0,25$.

Упругопластическое поведение материалов фаз композиции при активном нагружении характеризуется идеализированной билинейной диаграммой растяжения–сжатия [34]:

$$\sigma^{(k)} = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon^{(k)}, & |\varepsilon^{(k)}| \leq \varepsilon_s^{(k)} \leq \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon^{(k)}) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon^{(k)} - \text{sign}(\varepsilon^{(k)}) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon^{(k)}| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases} \quad (61)$$

где $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — осевые напряжение и деформация материала k -го компонента композиции; $E_s^{(k)}$ — модуль линейного упрочнения того же материала; $\sigma_s^{(k)}$, $\varepsilon_s^{(k)}$ — предел текучести и соответствующая ему деформация при растяжении–сжатии материала k -й фазы композиции. В этом случае параметр $\kappa^{(k)}$, определяющий величину $A^{(k)}$ в (7), вычисляется так [15]:

$$\kappa^{(k)} = 2(1 + \nu^{(k)}) H^{(k)} / [3 - (1 - 2\nu^{(k)}) H^{(k)}], \quad H^{(k)} = E_s^{(k)} / E^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (62)$$

Физико-механические характеристики материалов компонентов рассматриваемой композиции приведены в таблице 1, где ε_{*s} — значение интенсивности деформаций, соответствующее значению осевой деформации ε_s (см. (61)), причем $\varepsilon_{*s} = \varepsilon_s - \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_s = \frac{2\sigma_s}{3E} (1+\nu) = \frac{2}{3} (1+\nu) \varepsilon_s$ [34]. В последнем столбце таблицы 1 указаны значения скорости звука a в материалах компонентов композиции, рассчитанные по формулам, аналогичным (60).

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции [14, 35]

Материал	ρ , кг/м ³	ν	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа	$\varepsilon_{*s} \cdot 10^3$	a , м/с
Эпоксидная смола	1210	0,4	20	2,8	1,114	7,143	1521,2
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230	43,203	5868,9

На основании экспериментальных зависимостей, установленных в [22], примем, что пластина нагружается фронтальной нагрузкой, вызванной воздушной взрывной волной (см. (39)):

$$\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (63)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (64)$$

t_{\max} — момент времени, в который нагрузка $p(t)$ по модулю достигает максимального значения p_{\max} ; t_{\min} — момент времени, в который нагрузка $p(t)$ становится пренебрежимо малой по сравнению с p_{\max} (так, формула (64) соответствует случаю $p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}$). Согласно экспериментальным данным из [22] в расчетах принималось $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс или $t_{\min} = 200$ мс. При этом ударные волны в пластине не возникают.

Для проведения расчетов вводилась равномерная сетка вдоль оси Ox_2 (см. Рис. 3) с шагом $\Delta x_2 = L/100 = 1$ см, а шаг по времени τ (см. (46)) выбирался равным 0,5 мкс. При этом, согласно первому неравенству (60), имели $\Delta x_2 / \tau = 20$ км/с. Рассматривались пластины толщиной $2h$ (см): 1; 5; 10. Для этих толщин, согласно второму неравенству (60), получали $2h/\tau = 20, 100$ и 200 км/с. Приведенные отношения существенно больше значений a , указанных в таблице 1 для материалов фаз композиции. Следовательно, необходимые условия устойчивости (60) построенной численной схемы выполнялись с запасом.

Таблицы 2, 3 содержат результаты вычислений для пластин, изображенных на рисунке 3. Здесь величина w_m означает максимальный по модулю прогиб, $\varepsilon_{*m}^{(0)}$, $\varepsilon_{*m}^{(k)}$ — максимальные числовые значения интенсивности деформаций [34] в связующем и волокнах k -го семейства (в рамках классической теории при $\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/2$ (см. Рис. 3б) имеют место равенства $\varepsilon_{*m}^{(0)} = \varepsilon_{*m}^{(1)} = \varepsilon_{*m}^{(2)}$).

Таблица 2. Деформирование армированных пластин толщиной $2h = 10$ см при $p_{\max} = 1$ МПа и $t_{\min} = 200$ мс (Рис. 3)

Номер расчета	$\varphi_1 = -\varphi_2$, рад	w_m , мм	$\varepsilon_{*m}^{(0)} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{*m}^{(k)} \cdot 10^3$, $k = 1, 2$
Динамическое упругопластическое деформирование				
1	0,0	12,143	48,350	9,120
2	$\pi/4$	4,639	7,271	2,696
3	$\pi/2$	2,901	7,525	1,692
Динамическое идеально упругое деформирование ($c^{(l)} \equiv 0$, $0 \leq l \leq K$; см. (7))				
1'	0,0	10,952	26,950	0,803
2'	$\pi/4$	4,641	7,232	2,696
3'	$\pi/2$	2,902	7,276	1,700

Таблица 3. Динамическое упругопластическое деформирование «поперечно» армированных пластин (Рис. 3в)

Номер расчета	Теория расчета	w_m , мм	$\varepsilon_{*m}^{(0)} \cdot 10^3$	$\varepsilon_{*m}^{(k)} \cdot 10^3$, $k = 1, 2$
		Пластина толщиной $2h = 10$ см при $p_{\max} = 4,5$ МПа и $t_{\min} = 200$ мс (Рис. 5)		
1	Рейсснера	13,053	34,481	7,434
2	Тимошенко-2	14,595	47,669	7,252
3	Классическая	6,228	8,675	8,675
Пластина толщиной $2h = 5$ см при $p_{\max} = 7$ МПа и $t_{\min} = 2$ мс (Рис. 7)				
1'	Рейсснера	25,988	36,616	14,454
2'	Тимошенко-2	26,847	43,273	13,482
3'	Классическая	23,553	16,272	16,272
Пластина толщиной $2h = 1$ см при $p_{\max} = 1$ МПа и $t_{\min} = 2$ мс (Рис. 7)				
1''	Рейсснера	41,036	19,190	11,043
2''	Тимошенко-2	41,059	19,887	11,430
3''	Классическая	41,041	12,280	12,280

На рисунках 4, 5 показаны зависимости w от t при $x_2 = L/2$, то есть траектории движения точек центральных сечений пластин в поперечном направлении x_3 (см. Рис. 1), причем в таблицах 2, 3 $w_m = \max_{t \geq 0} w(t, L/2)$.

На рисунке 4 изображены осцилляции точек $x_2 = L/2$ пластин толщиной $2h = 10$ см при параметрах нагрузки $p_{\max} = 1$ МПа, $t_{\min} = 200$ мс (см. (63), (64)) и разных структурах армирования. Кривые получены: 1 — при продольном армировании ($\varphi_1 = -\varphi_2 = 0$; см. Рис. 3а); 2 — при перекрестном ортогональном армировании ($\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$; см. Рис. 3б); 3 — при армировании в «поперечном» направлении x_2 ($\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/2$; см. Рис. 3в). Пунктирные кривые 1'–3' на рисунке 4 определены для тех же пластин, что и сплошные линии 1–3, но рассчитаны они в предположении об идеально упругом поведении материалов фаз композиции (то есть принималось, что в (7) $c^{(k)} \equiv 0$, $0 \leq k \leq K$). Результаты расчетов этих пластин приведены в таблице 2, где номер расчета соответствует номеру кривой на рисунке 4.

Сопоставление кривых 2, 2' и 3, 3' на рисунке 4, а также значений w_m , $\varepsilon_{*m}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$), представленных в таблице 2 для расчетов 2, 2' и 3, 3', показывает, что при заданном динамическом

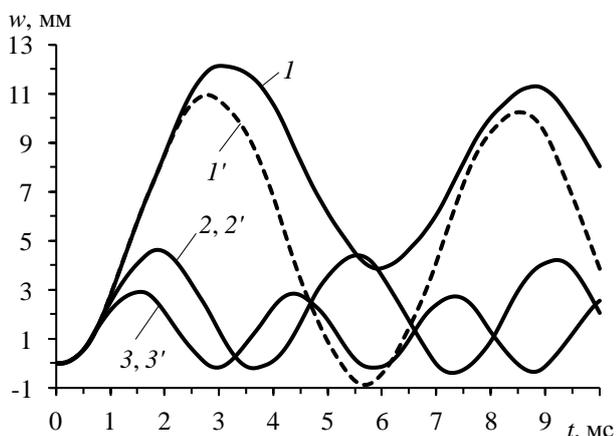


Рис. 4. Осцилляции центрального сечения удлиненной пластины при разных структурах ее армирования

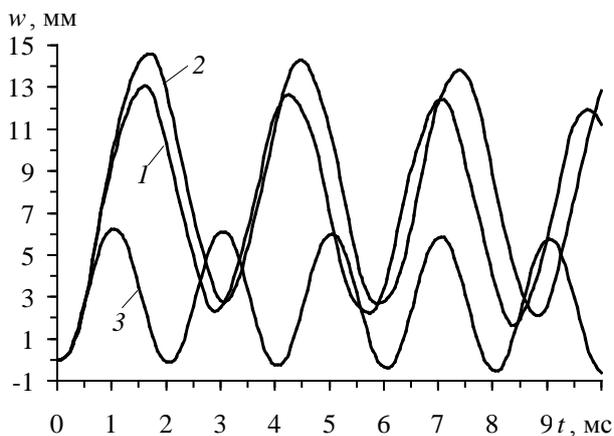


Рис. 5. Осцилляции центрального сечения «поперечно» армированной удлиненной пластины, рассчитанные по разным теориям

нагружении пластины, изображенные на рисунках 3б и 3в, ведут себя практически упруго (ср. значения $\varepsilon_{*m}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$) из таблицы 2 со значениями ε_{*s} из таблицы 1). Расчеты 1' и 3' полностью совпадают с расчетами, выполненными в рамках структурной модели В.В. Болотина [29] для однонаправленно-армированных упругих волокнистых пластин.

Сравнение же кривых 1 и 1' на рисунке 4 позволяет проследить за изменением осцилляций точек центрального сечения продольно армированной пластины (Рис. 3а), вызванным значительным развитием пластических деформаций в связующем материале композиции (ср. значение $\varepsilon_{*m}^{(0)}$ в расчете 1 из таблицы 2 со значением ε_{*s} для эпоксидной смолы в таблице 1).

Сопоставление кривых 1–3 на рисунке 4 дает наглядное представление о влиянии структуры армирования (точнее, направлений армирования φ_k , $k = 1, 2$) на динамическое поведение композитной пластины. Как видно из рисунка 4 и результатов расчетов, представленных в таблице 2, это влияние является существенным и подтверждает целесообразность выбора рациональных структур армирования. Согласно поведению кривых на рисунке 4, из трех структур, изображенных на рисунке 3, наименьшей податливостью обладает пластина с «поперечным» армированием (см. Рис. 3в). Следовательно, соответствующую структуру армирования можно считать рациональной с точки зрения максимальной жесткости рассматриваемой конструкции при ее динамическом нагружении, поэтому далее будем рассматривать пластины только с таким типом армирования ($\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/2$).

Кривые, представленные на рисунке 4, были получены на основе второго варианта теории Тимошенко ($\beta = 1$; см. (44)). Целесообразно было бы сравнить результаты расчетов, проведенных на основе разных теорий деформирования пластин. В связи с этим рисунок 5 демонстрирует зависимости $w(t, L/2)$ для пластины (см. Рис. 3в) прежней толщины $2h = 10$ см, построенные при параметрах нагрузки $p_{max} = 4,5$ МПа, $t_{min} = 200$ мс. Кривые 1, 2 рассчитаны на базе теории Рейсснера ($\beta = 0$) и второго варианта теории Тимошенко ($\beta = 1$) соответственно, а 3 — на основе классической теории ($\beta = 0$, $\varepsilon_{i3}^0 \equiv 0$; см. (44)). Величины w_m , $\varepsilon_{*m}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$) даны в таблице 3, где номера расчетов соответствуют номерам кривых на рисунке 5. На рисунке 6 изображены зависимости w от x_2 , определенные в моменты времени, когда прогибы центрального сечения $x_2 = L/2$ достигают максимальных значений w_m (см. Табл. 3). Номера кривых на рисунке 6 соответствуют номерам кривых на рисунке 5 и номерам расчетов в таблице 3.

Кривая 3 на рисунке 6 в точках $x_2 = 0, L$ имеет горизонтальные касательные, что является следствием неучета поперечных сдвигов в рамках классической теории. Поведение же кривых 1 и 2 в окрестности этих точек закрепления пластины свидетельствует о том, что реально в такой композитной конструкции активно развиваются деформации поперечного сдвига, причем главным образом в связующем материале (см. значения $\varepsilon_{*m}^{(k)}$, $0 \leq k \leq K$ в Табл. 3). Сравнение кривых 2 и 3 на рисунках 5 и 6 приводит к заключению, что классическая теория вообще непригодна для адекватного расчета рассматриваемой пластины. Из сопоставления же кривых 1 и 2 следует, что и теория Рейсснера в этом случае не гарантирует традиционной 5%-ной инженерной точности по прогибам. Так, величины w_m для расчетов 1 и 2 (см. Табл. 3), различаются на 10,6%, а значения $\varepsilon_{*m}^{(0)}$ — на 27% (в качестве эталонного, как более точного, принималось решение по второму варианту теории Тимошенко).

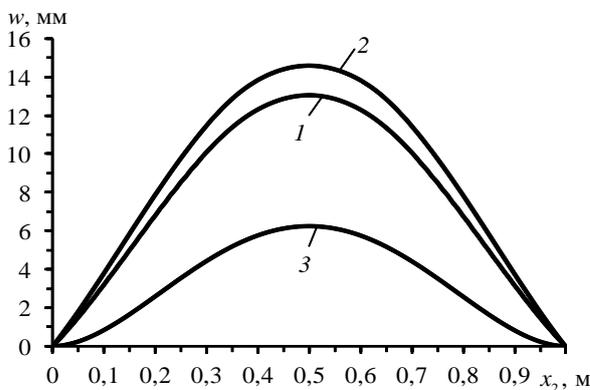


Рис. 6. Эпюры максимальных прогибов, рассчитанные по разным теориям

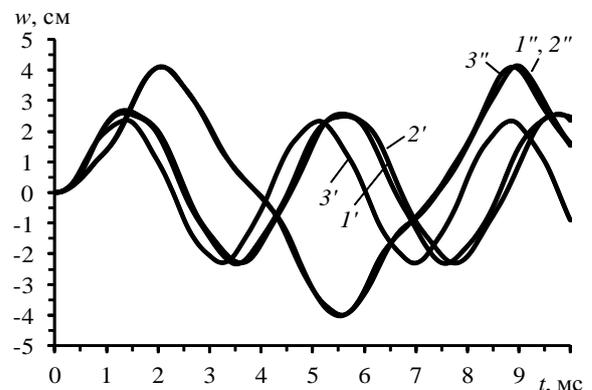


Рис. 7. Осцилляции центральных сечений относительно тонких пластин, рассчитанные по разным теориям

Выше исследовалось поведение относительно толстой композитной пластины ($2h/L=1/10$), которая подвергалась довольно длительному динамическому нагружению ($t_{\min}=200$ мс; см. (63), (64)). Как правило, нагрузки, вызванные воздушной взрывной волной, имеют на два порядка меньшую продолжительность [22]. В связи с этим рассмотрим динамическое поведение относительно тонких пластин прежней структуры при «кратковременном» нагружении ($t_{\min}=2$ мс). На рисунке 7 приведены зависимости $w(t, L/2)$, рассчитанные при следующих условиях: кривые 1'–3' соответствуют значениям $p_{\max}=7$ МПа и $2h=5$ см ($2h/L=1/20$), а 1''–3'' — значениям $p_{\max}=1$ МПа и $2h=1$ см ($2h/L=1/100$). Величины w_m , $\varepsilon_{*m}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$), полученные в соответствующих расчетах, показаны в таблице 3.

Кривые 1'' и 2'' на рисунке 7 визуально совпадают, линия же 3'' отличается от них незначительно. Данные расчетов 1''–3'' (см. Табл. 3), демонстрируют, что для весьма тонких композитных пластин ($2h/L \approx 1/100$) при изучении их динамического упругопластического поведения вполне достаточно использовать классическую теорию (по крайней мере, для обсуждаемой композиции). Поведение же кривых 2' и 3' свидетельствует о том, что в случае не весьма тонких пластин ($2h/L \approx 1/20$) классическая теория уже не гарантирует 5%-ной точности расчета даже по прогибам (согласно таблице 3 значения w_m в расчетах 2' и 3' различаются на 12%). Теория же Рейсснера (см. кривую 1') дает при этом вполне приемлемые результаты по податливости, но не по НДС материалов компонентов композиции. Так, величины w_m в расчетах 1' и 2' отличаются всего на 3,4%, но для $\varepsilon_{*m}^{(0)}$ различие составляет уже 15,4%.

Вычислительные эксперименты показали, что для более жестких (высокомодульных) волокон, например борных или углеродных [14], теория Рейсснера уже не гарантирует 5 %-ной точности расчета податливости армированных пластин даже при их относительно малой толщине (при $2h/L \approx 1/20$). При этом может стать неприемлемой и классическая теория для расчета даже весьма тонких пластин.

В рамках любой корректно построенной структурной модели композитной среды должны выполняться следующие предельные переходы:

- если при фиксированном l ($0 \leq l \leq K$) $\omega_l \rightarrow 1$ и одновременно, согласно (1), $\omega_k \rightarrow 0$ при всех $k \neq l$ ($0 \leq k \leq K$), то композитная среда должна вести себя как однородный материал l -го компонента композиции;
- если связующее и арматура всех семейств условно изготовлены из одного материала, то композитная среда при любых углах армирования φ_k (см. Рис. 2) и любых плотностях армирования ω_k ($1 \leq k \leq K$), удовлетворяющих условию (1), должна вести себя как однородный изотропный материал связующей матрицы.

Дополнительные расчеты подтвердили, что эти предельные переходы выполняются в предложенной в настоящем исследовании структурной модели упругопластического поведения композитной пластины (см. раздел 2).

4. Заключение

Проведенные исследования динамического поведения гибких упругопластически деформируемых армированных пластин позволили сделать вывод, что классическая теория, как правило, вообще не пригодна для адекватного расчета таких элементов конструкций, а теория Рейсснера (наиболее часто применяемая в расчетной практике и основанная на гипотезе прямой линии) удовлетворительно описывает податливость пластин лишь при их малой относительной толщине и в случаях низко модульных армирующих волокон. При динамическом изгибе упругопластических композитных пластин теория Рейсснера в еще большей степени дает не приемлемые результаты по определению НДС материалов фаз композиции, что не позволяет адекватно оценить состояние предразрушения этих материалов и соответствующие предельные уровни нагружения пластин. На основании этого для изучения упругопластического изгибного поведения армированных пластин рекомендуется использовать, как более точный, второй вариант теории Тимошенко или теорию Рейсснера–Миндлина [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00102-а).

Литература

1. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
2. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2009. – 311 с.

3. Картов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2-х частях. – М.: Физматлит, 2010. – Ч. 1. – 288 с.
4. Баженов В.Г., Павлѐнкова Е.В., Артемьева А.А. Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 427-434. DOI
5. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech.-Т. ASME. – 1945. – Vol. 12, no. 2. – P. 69-77.
6. Mindlin R.D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates // J. Appl. Phys. – 1951. – Vol. 22, no. 3. – P. 316-323. DOI
7. Крысько В.А., Кириченко В.Ф., Сурова Н.С. Устойчивость ортотропных многослойных оболочек в рамках модели типа Тимошенко // Известия ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1988. – № 7. – С. 42-45.
8. Шкутин Л.И. Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 139 с.
9. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Соппротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.
10. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
11. Абросимов Н.А., Елесин А.В. Обоснование применимости макронеоднородных моделей в задачах динамики многослойных композитных балок // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1987. – С. 69-74.
12. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // МТТ. – 1994. – № 2. – С. 33-42.
13. Пикуль В.В. Механика оболочек. – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 536 с.
14. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
15. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. – 352 с.
16. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге–Кутты // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 77-95.
17. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Особенности вязкопластического деформирования армированных пластин переменной толщины при действии нагрузок взрывного типа // Прикладная механика. – 2008. – Т. 44, № 2. – С. 85-98.
18. Янковский А.П. Упругопластическое деформирование изгибаемых армированных пластин при ослабленном сопротивлении поперечному сдвигу // Прикладная математика и механика. – 2013. – Т. 77, № 6. – С. 853-876.
19. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М: Мир, 1972. – 418 с.
20. Баженов В.Г., Игоничева Е.В. Нелинейные процессы ударного выпучивания упругих элементов конструкций в виде ортотропных оболочек вращения. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1991. – 132 с.
21. Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г. Прочность, жесткость, устойчивость элементов конструкций. Теория и практикум. Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 344 с.
22. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput. Struct. – 1987. – Vol. 26, no. 1-2. – P. 1-15. DOI
23. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 707 p.
24. Савенкова М.И., Шешенин С.В., Закалюкина И.М. Сравнение результатов конечно-элементного анализа с результатами асимптотического метода осреднения в задаче упругопластического изгиба пластины // Вестник МГСУ. – 2013. – № 8. – С. 42-50.
25. Янковский А.П. Построение определяющих уравнений упругопластического поведения пространственно-армированного металлокомпозита в рамках модели Прандтля–Рейсса–Хилла // Проблемы прочности и пластичности. – 2013. – Т. 75, № 3. – С. 169-177.
26. Янковский А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // Механика композитных материалов. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 663-678. (English version DOI).
27. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Структурная модель механики металлокомпозитов // Проблемы и достижения прикладной математики и механики. К 70-летию академика В.М. Фомина: Сб. науч. тр. – Новосибирск: Параллель, 2010. – С. 98-103.
28. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: Физматлит, 2010. – 352 с.
29. Болотин В.В. Основные уравнения теории армированных сред // Механика полимеров. – 1965. – № 2. – С. 27-37.
30. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. – М: Научный мир, 2011. – 231 с.
31. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике / Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. – М.: Мир, 1967. – С. 212-264.
32. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
33. Хакимзянов Г.С., Черный С.Г. Методы вычислений: В 4-х частях: Учеб. пособие. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2014. – Ч. 4. Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа. – 207 с.
34. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести: Учебник для студентов вузов. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
35. Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. / Под ред. Дж. Любина. – М.: Машиностроение, 1988. – Кн. 1. – 448 с.

References

1. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksij* [Nonlinear problems of dynamics of composites structures]. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 2002. 400 p.
2. Nemirovskii Yu.V., Romanova T.P. *Dinamicheskoe soprotivlenie ploskikh plasticheskikh pregrad* [Dynamic resistance of flat plastic barriers]. Novosibirsk: Geo, 2009. 311 p.
3. Karpov V.V. *Prochnost' i ustojchivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [The strength and stability of reinforced shells of revolution]. Moscow: Fizmatlit, 2011. Part 1, 288 p.
4. Bazhenov V.G., Pavlyonkova E.V., Artemyeva A.A. Numerical solution of generalized dynamic axisymmetric problems for elastoplastic shells of revolution under large deformations. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 427-434. DOI
5. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.-T. ASME*, 1945, vol. 12, no. 2, pp. 69-77.
6. Mindlin R.D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *J. Appl. Phys.*, 1951, vol. 22, no. 3, pp. 316-323. DOI
7. Krys'ko V.A., Kirichenko V.F., Surova N.S. Ustoichivost' ortotropnykh mnogoslojnykh obolochek v ramkakh modeli tipa Timoshenko [Stability of orthotropic multilayered shells within the framework of the Timoshenko model]. *Izvestiya VUZov. Stroitel'stvo i arkhitektura – News of Higher Educational Institutions. Construction and Architecture*, 1988, no. 7, pp. 42-45.
8. Shkutin L.I. *Nelinejnye deformatsii i katastrofy tonkikh tel* [Nonlinear deformations and catastrophes of thin bodies]. Novosibirsk: SB RAS, 2014. 139 p.
9. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernykh i kompozitnykh materialov* [Resistance of polymeric and composite materials]. Riga: Zinatne, 1980. 571 p.
10. Ambartsunyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya* [Theory of anisotropic plates. Strength, stability and vibrations]. Moscow: Nauka, 1987. 360 p.
11. Abrosimov N.A., Elesin A.V. Obosnovanie primenimosti makroneodnorodnykh modelej v zadachakh dinamiki mnogoslojnykh kompozitnykh balok [Substantiation of the applicability of macronon-uniform models in the problems of dynamics of multilayered composite beams]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti – Applied problems of strength and plasticity*, 1987, pp. 69-74.
12. Kulikov G.M. Thermoelasticity of flexible multilayer anisotropic shells. *Mechanics of Solids*, 1994, vol. 29, no. 2, pp. 27-35.
13. Pikul V.V. *Mekhanika obolochek* [Mechanics of shells]. Vladivostok: Dal'nauka, 2009. 536 p.
14. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Handbook], ed. by D.M. Karpinos. Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p.
15. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogulskii I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoe reshenie dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdykh tel* [Solving numerically dynamic problems of elastoplastic deformation of solids]. Novosibirsk, Siberian University, 2002. 352 p.
16. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. Integration of problem on elasto-plastic dynamic bending of reinforced cores of sections with a variable cross-section using generalized Runge–Kutta methods]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*, 2004, vol. 9, no. 4, pp. 77-95.
17. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. Osobennosti vyzkoplasticheskogo deformirovaniya armirovannykh plastin peremennoj tolshchiny pri dejstvii nagruzok vzryvnogo tipa [Viscoplastic deformation of reinforced plates with varying thickness under explosive loads]. *Prikladnaya Mekhanika – Applied Mechanics*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 85-98.
18. Yankovskii A.P. Elastoplastic deformation of flexible reinforced plates with a reduced shear strength. *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 613-628. DOI
19. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference methods for initial-value problems*. New York: John Wiley & Sons, 1967.
20. Bazhenov V.G., Igonicheva E.V. *Nelinejnye protsessy udarnogo vypuchivaniya uprugikh elementov konstruksij v vide ortotropnykh obolochek vrashcheniya* [Nonlinear processes of impact buckling of elastic structural elements in the form of orthotropic shells of revolution]. Nizhny Novgorod: Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 1991. 132 p.
21. Kuzmin M.A., Lebedev D.L., Popov B.G. *Strength, toughness, resistance of structural elements. Theory and practical work. Strength calculations for multilayer composite structural elements*. Moscow: Bauman Moscow State Technical University, 2012. 344 p.
22. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1-2, pp. 1-15. DOI
23. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 707 p.
24. Savenkova M.I., Sheshenin S.V., Zakalyukina I.M. Comparison of findings of the finite element analysis with the findings of the asymptotic homogenization method in respect of the plate in elastoplastic bending. *Vestnik MGSU – Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*, 2013, no. 8, pp. 42-50.
25. Yankovskii A.P. The constructions of the defining equations of elastic-plastic behavior of spatially-reinforced metal-composite in the framework of the Prandtl–Reuss–Hill model. *Problemy prochnosti i plastichnosti – Problems of strength and plasticity*, 2013, vol. 75, no. 3, pp. 169-177.
26. Yankovskii A.P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model. *Mechanics of Composite Materials*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451-460. DOI
27. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. *Problemy i dostizheniya prikladnoj matematiki i mekhaniki* [Problems and achievements of applied mathematics and mechanics]. Novosibirsk: Parallel, 2010. Pp. 98-103.

28. Zubchaninov V.G. *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred* [Mechanics of processes of plastic media]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 352 p.
29. Bolotin V.V. Osnovnye uravneniya teorii armirovannykh sred [Basic equations of theory of reinforced media]. *Mekhanika polimerov – Mechanics of polymers*, 1965, no. 2, pp. 27-37.
30. Khazhinskii G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov* [Model of deformation and fracture of metals]. Moscow: Nauchny mir, 2011. 231 p.
31. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. *Fundamental methods in hydrodynamics*. Vol. 3, ed. by B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg. New York, London: Academic press, 1964. 336 p.
32. Samarsky A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1989. 616 p.
33. Khakimzyanov G.S., Chernyi S.G. *Metody vychislenij* [Methods of calculations], Part 4. Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2014. 207 p.
34. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 400 p.
35. *Handbook of composites*, ed. by G. Lubin. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982.

Поступила в редакцию 10.03.2016; опубликована в электронном виде 30.09.2016