

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.3.23

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

В.Д. Кургузов¹, Н.С. Астапов^{1,2}¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация

Проведено компьютерное моделирование распространения трещин в сварных соединениях и исследована их прочность при трещиноподобном дефекте в соединительном шве. Сварное соединение представляется в виде двухслойного структурированного композита, который содержит прямолинейную острую внутреннюю трещину нормального отрыва. Процесс разрушения такого композита описан с помощью модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла, содержащей дополнительный параметр – поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения) в слое из наиболее слабого материала. В качестве модели материала выбран идеально упругопластический деформируемый материал, обладающий предельным относительным удлинением. К этому классу материалов относятся, например, низколегированные стали, применяемые в конструкциях, работающих при температурах ниже порога хладноломкости. Подробно анализируются такие биматериалы, у компонентов которых упругие характеристики совпадают, а прочностные свойства существенно различаются. В условиях маломасштабной текучести и при наличии сингулярной особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины предлагается использовать двухпараметрический дискретно интегральный критерий прочности. Деформационный критерий разрушения формулируется для вершины реальной трещины, а силовой критерий для нормальных напряжений с учетом осреднения – для вершины модельной трещины. Длины реальной и модельной трещин отличаются друг от друга на размер зоны предразрушения. Так как прочностные характеристики сварного шва меньше аналогичных характеристик основного материала, то зона пластичности полностью располагается в слабейшем материале. Выполнено численное моделирование распространения зон пластичности в квадратных пластинах из биметалла при квазистатическом нагружении. Преимущество численной модели над аналитической состоит в том, что с ее помощью исследованы такие материалы, характеристики которых соответствуют режимам деформирования при маломасштабной и полномасштабной текучести слабейшего материала (материала сварного шва). Обнаружено, что результаты численных экспериментов хорошо согласуются с результатами расчетов по аналитической модели разрушения материала со структурой слабейшего из материалов при нормальном отрыве в режиме маломасштабной текучести. Получена оценка размеров пластической зоны в окрестности вершины трещины. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения структурированного композита.

Ключевые слова: сварное соединение, критерии разрушения, пластическая зона, диаграмма квазихрупкого разрушения, метод конечных элементов, компьютерное моделирование

MODELLING OF A FRACTURE PROCESS IN WELDED JOINTS

V.D. Kurguzov¹ and N.S. Astapov^{1,2}¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation²Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

A computer modelling of crack propagation in welded joints is carried out. The strength of welded joints having a crack-like defect is analyzed. The welded joint is modelled as a two-layer structured composite which contains a straight sharp internal crack in I mode. The fracture process of such a composite is described using the modified model of Leonov–Panasyuk–Dugdale. The model employs an additional parameter, equal to the diameter of the plastic zone (width of the pre-fracture zone) of the weakest material. The solid is modelled using the elastic-perfectly-plastic material model with a limited relative lengthening. The class of materials under consideration includes low-alloy steels, used in engineering structures working at temperatures below the cold brittleness temperature. The case where elastic properties of the materials coincide but the strength is different is analyzed in detail. Under conditions of a low-scale yield, where the stress field near the crack tip possesses a singular component, we suggest using a two-parametric discrete/integral strength criterion. The deformation-based fracture criterion is formulated at the tip of the real crack, whereas the force-based criterion for the normal stresses with averaging is formulated at the tip of the model crack. The length of the real and model cracks differ by the length of the pre-fracture zone. Since the welded material is weaker than the basic material, the plastic zone is localized in the weakest material. A numerical simulation of extension of plastic zones in square plates made of bi-metal is carried out for a quasistatic loading. The difference between the numerical and analytical models is that materials are analyzed which correspond to the deformation modes with both low-scale and full-scale yield of the weakest material (welded material). It is found that the results of the numerical experiments are coherent with the results obtained by the analytic model of fracture for structured materials in the crack I mode with a low-scale yield of the weakest material. The size of the plastic zone near the crack tip is estimated. Diagrams of a quasi-brittle fracture are obtained for the structured composite.

Key words: weld joint, failure criteria, plastic zone, diagram of quasibrittle fracture, finite element method, computer modeling

1. Введение

В обзоре экспериментальных работ [1] указывается, что одним из наиболее важных факторов, вызывающих разрушение сварных узлов (основного источника разрушения в машиностроительных конструкциях) является неизбежное наличие скрытых трещин или трещиноподобных дефектов. Проводится физико-техническая классификация процессов разрушения и обсуждение причин возникновения трещин в самом сварном шве, на границе раздела сред и в основном материале вне видимой при изготовлении конструкции зоны термического влияния. Кроме того, в работе [1] отмечаются проблемы построения аналитических моделей процесса разрушения в рамках линейной механики разрушения.

Исследование прочностных свойств сварных соединений проведено в работе [2], в которой применяется когезионная модель для достаточно общих параметров сварного соединения. В работе [3] даны оценки трещиностойкости границы раздела материалов. Отметим, что при использовании когезионной модели [2, 3] отсутствуют параметры, описывающие ширину сварного шва, поперечник зоны предразрушения и структуру самой зоны предразрушения. В экспериментальной работе [4], посвященной изучению распространения трещины нормального отрыва в биматериале керамика–алюминий, показано, что зона предразрушения для трещины на границе раздела сред, как правило, располагается только в одном, более слабом, материале (см. [4], Fig. 5) и локализуется в окрестности этой границы. Такое расслоение в результате лабораторного эксперимента наблюдалось в работе [5] (см. page 801, Fig. 7). В результате численного моделирования методом конечных элементов (МКЭ) в [6] показано притягивание продвигающейся трещины к границе раздела сред (см. Fig. 3, Fig. 7).

В [7] при описании процесса разрушения учитываются пределы упругости составляющих композит материалов, но не рассматривается их структура. Однако трещины часто оказываются межзеренными, и наличие периодической структуры существенно влияет на «раскрытие трещин, которое изменяется постепенно геометрически упорядоченным образом» ([1], стр. 96). В работе [8] показано, что критерии разрушения, принимающие во внимание характерный размер структуры материала, позволяют «расширить область применения по сравнению с традиционными критериями», хотя «вопрос о том, как этот размер связан с составом, структурой и, возможно, с другими параметрами реального материала, до сих пор не изучен». Поэтому проблемы построения простых, пригодных для инженерных расчетов аналитических моделей процесса разрушения композитов требуют разрешения [9–14]. Весьма актуальной является и задача продвижения трещины в сварном шве. В работе [14] обосновывается актуальность создания феноменологических моделей для прогнозирования разрушения слоистых материалов.

Настоящая работа является естественным продолжением и обобщением работ [15–17] по исследованию распространения трещины в композите в рамках модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла [18, 19]. При квазистатическом нагружении с помощью МКЭ последовательно описан процесс распространения пластических зон в окрестности вершины трещины. Показано, что формы построенных пластических зон в биметалле существенно отличаются от таковых в однородной среде. Проведен сравнительный анализ результатов аналитического и численного моделирования разрушения биматериала при плоской деформации, обусловивший корректировку аналитической модели. Учет характерного линейного размера материала позволил вывести простые, пригодные в инженерных приложениях соотношения для критической нагрузки и критической длины зоны предразрушения, а также построить диаграммы разрушения. Установлено, что скорректированная аналитическая модель предлагает приемлемое прогнозирование величины критической разрушающей нагрузки для любых длин трещин.

2. Постановка задачи

Рассмотрим биметаллическую пластину шириной $2w$, содержащую сварной шов в виде узкой полосы толщиной $2h$ с центральной внутренней трещиной длиной $2l_0$ (Рис. 1а). Буквами B и W обозначены основной металл и сварное соединение соответственно. На краях пластины заданы растягивающие напряжения σ_∞ , то есть реализуется первая мода разрушения. Оба материала биметаллической пластины являются идеальными упругопластическими с $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммой одноосного деформирования,

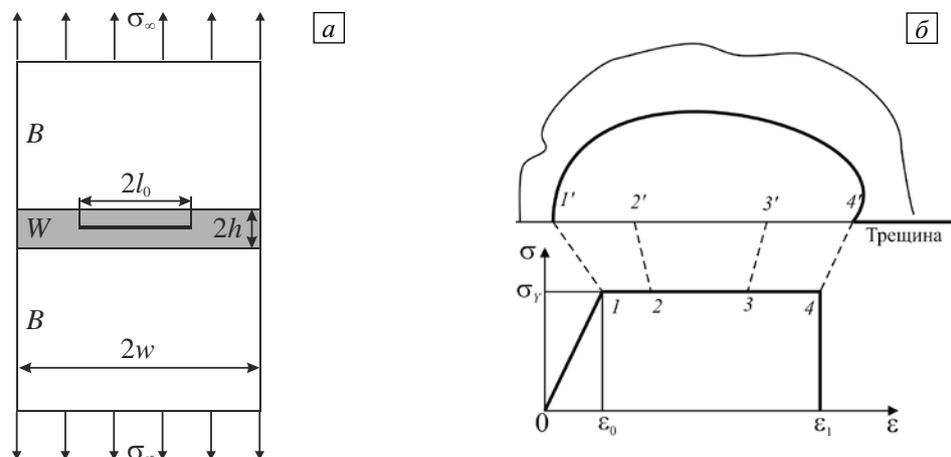


Рис. 1. Биметаллическая пластина со сварным швом (а); диаграмма деформирования (б) с точками 1–4 и соответствующими им точками 1'–4' зоны предразрушения в окрестности левой вершины трещины

показанной на рисунке 1б. Здесь: σ_y — предел текучести, ε_0 — максимальная упругая деформация, ε_1 — предельная деформация до разрушения. Введем параметр $\chi = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \varepsilon_0$, характеризующий соотношение предельной неупругой и максимальной упругой деформаций. Величину χ можно трактовать как относительную длину площадки текучести. Материал сварного шва обладает определенной структурой, имеет квазихрупкий или квазивязкий тип разрушения, причем характерный линейный размер r структурного элемента (например, диаметр зерна) предполагается известным.

3. Модель разрушения материала

Предположим, что реальная острая внутренняя трещина–разрез нормального отрыва длиной $2l_0$ распространяется прямолинейно в структурно-неоднородном материале. В модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла [18, 19] помимо реальной трещины вводится в рассмотрение модельная трещина–разрез длиной $2l = 2l_0 + 2\Delta$, где Δ — длина зоны предразрушения или пластической зоны, расположенной на продолжении реальной трещины (Рис. 2а). В этой зоне возникают напряжения пластического деформирования, препятствующие раскрытию трещины и устраняющие сингулярность поля напряжений в окрестности её вершины. Предполагается, что напряжения здесь распределяются равномерно и равняются пределу текучести материала σ_y . Полная постановка задачи распределения напряжений и смещений трещины нормального отрыва для упругопластических материалов рассматривается в нелинейной механике разрушения. Такую нелинейную задачу можно существенно упростить, используя классические представления линейной механики разрушения, когда трещина нормального отрыва моделируется как двусторонний разрез, а нелинейность задачи возникает только при описании зоны предразрушения. После введения модельной (дополнительной) трещины–разреза задача может рассматриваться не как упругопластическая, а как упругая. Напомним, что согласно классической модели Леонова–Панасюка–Дагдейла [20–22] пластический материал в зоне предразрушения, имеющей нулевой поперечник, стягивает берега трещины.

Зона предразрушения аппроксимируется прямоугольником со сторонами Δ и a (Рис. 2б), причем длина зоны предразрушения Δ определяется в процессе решения задачи разрушения, а поперечник a этой зоны целесообразно отождествить с поперечником зоны пластичности. В соответствии с предлагаемой модификацией модели Леонова–Панасюка–Дагдейла вершины реальной и модельной трещин следует различать. На рисунке 1б приведена схема, качественно поясняющая взаимосвязь между точками 1, 2, 3, 4 на $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграмме и точками 1', 2', 3', 4' в зоне предразрушения, расположенными на продолжении реальной трещины влево. Вне зоны предразрушения материал деформируется упруго, а на ее границе поведение меняется на неупругое, при этом точки зоны предразрушения находятся в области неупругого деформирования материала. В модели Леонова–Панасюка–Дагдейла предполагается, что на продолжении модельной трещины реализуется одноосное растяжение [23], поскольку к берегам трещины–разреза приложены постоянные напряжения σ_y , которые притягивают берега друг к другу и, следовательно, действуют на материал растягивающим образом. В докритическом состоянии материал в вершине реальной трещины претерпевает удлинение $\varepsilon < \varepsilon_1$, которое в критическом состоянии совпадает с критическим удлинением $\varepsilon = \varepsilon_1$ (см. в точке 4 на Рис. 1б). Пластическая зона в окрестности вершины трещины приближенно показана на рисунке 1б для случая плоского напряженного состояния, а в виде двух лепестков на рисунке 2б — для плоской деформации. Точка K является точкой пересечения прямой, параллельной оси Oy и проходящей через вершину реальной трещины, с границей пластической зоны. Как будет показано далее, реальная форма пластической зоны весьма далека от идеализированных представлений [11, 23, 24].

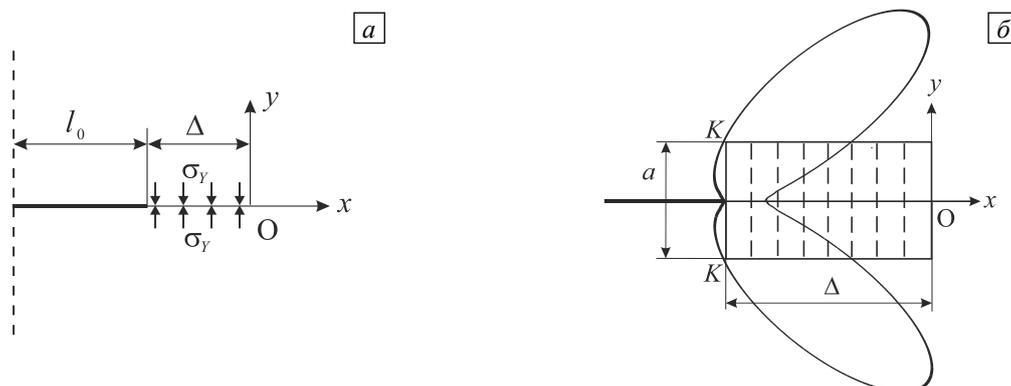


Рис. 2. Сжимающие напряжения, действующие в модели Леонова–Панасюка–Дагдейла на продолжении трещины (а); аппроксимация пластической зоны прямоугольной зоной предразрушения (б)

При построении модели разрушения сварного соединения в условиях нормального отрыва воспользуемся интегральным критерием разрушения Нейбера–Новожилова [18, 19]:

$$\frac{1}{r} \int_0^r \sigma_y(x, 0) dx = \sigma_Y, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$2\nu(-\Delta) = \delta^*. \quad (2)$$

Здесь: $\sigma_y(x, 0)$ — нормальные напряжения на продолжении трещины; σ_Y — предел текучести при одноосном растяжении; r — характерный линейный размер структуры материала; $2\nu = 2\nu(x)$ — раскрытие трещины; δ^* — критическое раскрытие модельной трещины (при величине раскрытия, равной критическому значению, разрушается структура материала в вершине реальной трещины — граничной точке зоны предразрушения, то есть в точке 4' на рисунке 1б). Длина зоны предразрушения, если учесть длину интервала осреднения r , составляет только часть длины зоны пластичности. Силовой критерий (1), по терминологии Новожилова, является необходимым: процесс разрушения материала начинается тогда, когда осредненные по интервалу r нормальные напряжения достигают предела текучести σ_Y . При выполнении деформационного критерия (2) происходит катастрофическое разрушение образца. По этой причине совокупность условий (1), (2) называют достаточным критерием разрушения [18, 19].

Ограничимся случаем, когда упругие характеристики материалов биметаллической пластины совпадают, а прочностные различаются: $\sigma_{YB} < \sigma_{YB}$, где σ_{YB} — предел текучести материала сварного шва, σ_{YB} — предел текучести основного металла. Для применения интегрального критерия (1), (2) к обработке результатов численных или лабораторных экспериментов с образцами конечных размеров воспользуемся аналитическим выражением нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$ на продолжении трещины [17]:

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{Y_s K_I}{\sqrt{2\pi x}} + Y_r \sigma_\infty, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

где σ_∞ — напряжения, заданные на краях пластины; $K_I = K_{I\infty} + K_{IA}$ — суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в обобщенной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла ($K_{I\infty} > 0$ — КИН, порождаемый напряжениями σ_∞ , $K_{IA} < 0$ — КИН, порождаемый напряжениями σ_Y , действующими в окрестности вершины модельной трещины в зоне предразрушения); $Y_s = Y_s(l)$, $Y_r = Y_r(l)$ — поправочные коэффициенты, учитывающие конечные размеры пластины. Для центральной внутренней трещины справочник [25, см. стр. 171] предлагает аппроксимирующую формулу $Y_s = \sqrt{\sec(\pi l)/(2w)}$ (напомним, что w — полуширина пластины); коэффициент $Y_r = Y_r(l)$ найдем из условия равновесия напряжений, приложенных к краям пластины, и напряжений, действующих на продолжении трещины: $Y_r = \frac{1}{1-l/w} - Y_s \sqrt{\frac{2l/w}{1-l/w}}$. В случае бесконечной области коэффициенты $Y_s = Y_s(l)$, $Y_r = Y_r(l)$ тождественно равны единице. После интегрирования по интервалу осреднения r уравнение (1) принимает вид:

$$Y_s K_I = (\sigma_Y - Y_r \sigma_\infty) \sqrt{\frac{\pi r}{2}}. \quad (4)$$

Для раскрытия модельной трещины $2\nu = 2\nu(x)$, $-\Delta \leq x < 0$ используем в (2) представление [24]

$$2\nu(x) = \frac{\kappa+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} + O(|x|), \quad K_I = K_{I\infty} + K_{IA} > 0, \quad x \leq 0, \quad (5)$$

в котором учтем лишь первый член разложения. Здесь: $\kappa = 3 - 4\nu$ — для плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ — для плоского напряженного состояния; ν — коэффициент Пуассона; $\mu = E/(2(1 + \nu)) = \sigma_Y/(2\varepsilon_0(1 + \nu))$ — модуль сдвига материала, так как для идеального упругопластического материала $E = \sigma_Y/\varepsilon_0$, где E — модуль Юнга, ε_0 — максимальное упругое относительное удлинение. Уравнение (2) с помощью представления (5) запишем в виде

$$\frac{\kappa+1}{\mu} Y_s K_1 \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} = \delta^*, \quad (6)$$

учитывающем конечные размеры пластины.

В равенствах (4) и (6) $K_{I\infty}$ — КИН, обусловленный напряжениями σ_∞ , вычисляется по формуле [25, стр. 171]: $K_{I\infty} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}$, а для КИН K_{IA} , порождаемого постоянными напряжениями σ_Y , действующими согласно модели Леонова–Панасюка–Дагдейла в зоне предразрушения, выберем из справочника [25, стр. 41] выражение

$$K_{IA} = -\sigma_Y \sqrt{\pi l} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right]. \quad (7)$$

Отождествим поперечник зоны предразрушения с поперечником зоны пластичности при плоском напряженном состоянии в вершине реальной трещины [24]:

$$a = \frac{5}{4\pi} \left(\frac{Y_s K_{I\infty}}{\sigma_Y} \right)^2.$$

Параметр максимального неупругого относительного удлинения $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ определяется на основе $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграммы деформирования материала (см. Рис. 1б). Тогда критическую величину раскрытия трещины δ^* , при которой разрушается ближайший к вершине реальной трещины структурный элемент в зоне предразрушения, вычислим по формуле:

$$\delta^* = m(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) a, \quad (8)$$

где m — поправочный коэффициент. Конечно, границы реальных пластических зон в окрестности вершины трещины лишь приближенно похожи на конфигурации, изображенные в [11, 23, 24]. При плоском напряженном состоянии с увеличением нагрузки узкая область пластических деформаций распространяется прямолинейно от вершины трещины по ее оси, принимая форму, похожую на узкий вытянутый прямоугольник. Такую форму пластической зоны, особенно при поперечном сдвиге, и преимущественное направление распространения трещины вдоль ее оси можно наблюдать как в численных, так и лабораторных экспериментах. В связи с этим в работе [17] для уточнения формулы поперечника зоны предразрушения обосновывается введение в соотношение (8) поправочного коэффициента m . Для определения величины этого коэффициента необходимо использовать непосредственно данные численного либо лабораторного экспериментов.

Теперь систему уравнений (4), (6), равносильную исходной системе уравнений (1), (2) при указанном выборе выражений для нормального напряжения $\sigma_y(x, 0)$, раскрытия трещины $2\nu = 2\nu(x)$ и КИН $K_I = K_{I\infty} + K_{IA}$, можно записать в виде

$$Y_s \sqrt{\pi l} \left\{ \lambda - \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right] \right\} - (1 - Y_r \lambda) \beta = 0, \quad (9)$$

$$Y_s \sqrt{\pi l} \left\{ \lambda - \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right] \right\} \sqrt{\Delta} - h \lambda^2 = 0, \quad (10)$$

где $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_Y$ — безразмерная критическая нагрузка, $\beta = \sqrt{\pi r / 2}$, $h = \sqrt{2\pi} \chi m l c Y_s^2 / 32$. Здесь $c = 5$ для плоского напряженного состояния и $c = (5 - 8\nu + 8\nu^2) / (1 - \nu^2)$ для плоской деформации, потому что для поперечника a зоны пластичности можно принять $a = 5l \lambda^2 Y_s^2 / 8$ в условиях плоского напряженного состояния и $a = l \lambda^2 Y_s^2 (5 - 8\nu + 8\nu^2) / 8$ — в условиях плоской деформации [17].

Расчеты показывают, что для любого значения коэффициента Пуассона $0 \leq \nu \leq 0,5$ для плоской деформации выполняется неравенство $3,6 \leq c \leq 5$, причем $c = 3,6$ при $\nu = 0,34$. Исключая из системы уравнений (9), (10) член, заключенный в фигурные скобки, найдем точное выражение для критической длины зоны предразрушения:

$$\sqrt{\Delta} = \frac{h \lambda^2}{\beta(1 - Y_r \lambda)}. \quad (11)$$

Прибегнув к приближению $\arcsin(1-\Delta/l) \approx \pi/2 - \sqrt{2\Delta/l}$, погрешность которого при $0 \leq \Delta/l \leq 0,43$ не превышает 6%, запишем систему уравнений (9), (10) в виде:

$$Y_s \left(\lambda \sqrt{\pi l} - 2 \sqrt{\frac{2\Delta}{\pi}} \right) - (1 - Y_r \lambda) \beta = 0, \quad (12)$$

$$Y_s \left(\lambda \sqrt{\pi l} - 2 \sqrt{\frac{2\Delta}{\pi}} \right) \sqrt{\Delta} - h \lambda^2 = 0. \quad (13)$$

Заменив $\sqrt{\Delta}$ в (12) согласно (11), получим квадратное уравнение относительно λ , из которого определим приближенное значение критической разрушающей нагрузки: $\lambda_{\pm} = 2\beta / \left(2\beta Y_r + f \pm \sqrt{f^2 - 4gh} \right)$, где $f = Y_s \sqrt{\pi l}$, $g = 2Y_s \sqrt{2/\pi}$.

Возвращаясь к исходным переменным, видоизменим формулу критической нагрузки:

$$\lambda_{\pm} = \left[Y_r + \frac{Y_s}{2} \sqrt{\frac{2l}{r}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\chi mc Y_s}{2\pi}} \right) \right]^{-1}. \quad (14)$$

Величина λ_+ , когда перед корнем выбирается знак «+», соответствует квазихрупкому ($\Delta/l \ll 1$), λ_- — квазивязкому ($\Delta/l \approx 1$) типу разрушения [17]. Формула (14), в рамках предлагаемой модели, имеет смысл, если $\chi \leq 2\pi/(mcY_s)$.

Из приближенного уравнения (12) получим выражение

$$\sqrt{\Delta} \approx \frac{\lambda(f + \beta Y_r) - \beta}{g}, \quad (15)$$

а из (13) — два значения

$$\sqrt{\Delta_{\pm}} \approx \frac{2h\lambda}{f \pm \sqrt{f^2 - 4gh}}, \quad (16)$$

причем квазихрупкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\Delta_+}$ (в (16) перед корнем выбирается знак «-»), а квазивязкому типу разрушения — $\sqrt{\Delta_-}$. Интересно, что при любом из приближенных значений (15) или (16) из системы уравнений (12), (13) следует точно такое же выражение для критической разрушающей нагрузки, какое дается формулой (14). А исключая из системы (12), (13) множитель после Y_s , придем для критической длины Δ зоны предразрушения к такой же записи, как (11), которая получена из точной системы (9), (10).

Напомним, что уравнения (9), (12) так же, как исходное уравнение (1), выполняются для любых нагрузок λ вблизи граничных точек зоны пластичности (см. точку I' на рисунке 1б). Поэтому для любых нагрузок λ , при которых возникает зона пластичности в окрестности вершины трещины, справедливо и представление (15), которое следует из (12). Однако уравнения (10) и (13) так же, как и уравнение (2), выполняются только при критических разрушающих нагрузках. Кроме того, приближенные выражения (6) и (8) для раскрытия трещины $2\nu(-\Delta)$ и критического раскрытия δ^* вносят дополнительную погрешность в уравнения (10), (13), которые используются при выводе формул (11) и (16). Таким образом, имеем представление (14) для критической разрушающей нагрузки и три разные формулировки связи критической длины зоны предразрушения $\sqrt{\Delta}$ с критической нагрузкой λ — (11), (15), (16). Результаты численного моделирования, как будет показано далее, подтверждают применимость выражения (15) во всем диапазоне значений нагрузок.

При $\chi \rightarrow 0$ в соотношениях (14)–(16) возможен предельный переход, который позволяет рассмотреть разрушение хрупких материалов (в таких материалах зона предразрушения отсутствует: $\Delta = 0$). Согласно необходимому критерию разрушения (1) в случае хрупкого разрушения критические напряжения вычисляются по формуле

$$\lambda = \left(Y_r + Y_s \sqrt{\frac{2l}{r}} \right)^{-1}. \quad (17)$$

Аналитическое представление критической нагрузки (17) зависит только от одного параметра — характерного линейного размера элемента структуры r . В (14) же критическая нагрузка, полученная на основе достаточного критерия разрушения (1), (2), зависит от характерного линейного размера элемента структуры r , а также от величины χ , характеризующей свойства материала в зоне предразрушения при пластическом деформировании.

Рассмотрим процесс деформирования при постепенном нагружении ($0 < \lambda < 1$). Если необходимый критерий (1) не выполняется, то нелинейные эффекты не проявляются, исходная длина трещины $2l_0$ остается неизменной. В случае, когда в достаточном критерии (1), (2) выполняется только условие (1), имеет место докритическое состояние системы, при котором наблюдается устойчивое увеличение длины модельной трещины: $2l = 2l_0 + 2\Delta$. Уравнение (1) в достаточном критерии (1), (2) определяет движение вершины модельной трещины. Если оба условия, и (1), и (2), реализуются, то система переходит в критическое состояние. Ближайшая к вершине трещины структура разрушается, поскольку длина зоны предразрушения достигает критического значения (15). При $\lambda = \lambda_{\pm}$ неустойчивость критического состояния нелинейной системы очевидна. Соотношение (2) определяют обрыв силовых связей в ближайшей к вершине реальной трещины структуре зоны предразрушения. Таким образом, значения критических нагрузок, вычисленные по необходимому (см. (17)) и достаточному (см. (14)) критериям

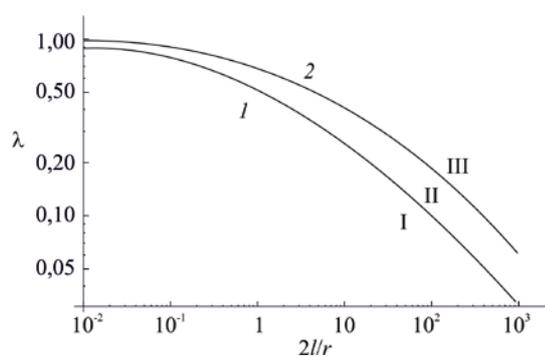


Рис. 3. Диаграммы квазихрупкого разрушения, полученные по необходимому (кривая 1) и достаточному (кривая 2) критериям

разрушения, являются нижней и верхней оценками критических нагрузок рассматриваемой нелинейной системы.

На рисунке 3 в двойных логарифмических координатах приведены диаграммы квазихрупкого разрушения, полученные по необходимому (17) (кривая 1) и достаточному (14) (кривая 2) критериям. Плоскость $(2l/r, \lambda)$ разбивается кривыми 1, 2 на три области. В области I длина исходной трещины не меняется (трещина устойчива), в области II она увеличивается на величину, равную длине зоны предразрушения (трещина подрастает, оставаясь устойчивой), в области III имеет место катастрофический рост (трещина неустойчива).

4. Компьютерное моделирование

Для численного моделирования реальной формы пластической зоны в окрестности вершины центральной трещины, расположенной внутри сварного соединения, использовался МКЭ. Рассматривалась биметаллическая квадратная пластина единичной толщины, растягиваемая напряжениями σ_{∞} , приложенными на ее кромке, при наличии центральной внутренней трещины и условиях плоского деформированного состояния (Рис. 1а). Геометрические размеры пластины были такими: ширина $2w = 100$ мм; толщина сварного шва $2h = 2$ мм; длина трещины $2l$ варьировалась от 12 до 48 мм. При конечно-элементном анализе, в силу наличия двух плоскостей симметрии, в расчет принималась лишь 1/4 пластины. Оба материала пластины считались идеальными упругопластическими со следующими характеристиками: модули Юнга $E_B = E_W = 200$ ГПа, коэффициенты Пуассона $\nu_B = \nu_W = 0,25$, пределы текучести $\sigma_{yB} = 800$ МПа, $\sigma_{yW} = 400$ МПа (нижние индексы B и W означают основной металл и сварной шов соответственно).

Расчетная область покрывалась неравномерной сеткой из 612500 4-угольных элементов с линейной аппроксимацией перемещений. В сварном шве производилось сгущение сетки до размера 0,02 мм. Отношение размера элемента в окрестности вершины трещины к ее длине в самом неблагоприятном случае ($l = 6$) составляло 1/300, что соответствовало рекомендациям, приведенным в [26]. Традиционное сгущение сетки к вершине трещины, применяемое в подобных задачах, не производилось, поскольку целью численного исследования являлось не вычисление как можно более точных значений напряжений и деформаций в окрестности вершины, а наиболее точное определение формы и размеров пластической зоны. В процессе нагружения внешняя нагрузка σ_{∞} монотонно возрастала по линейному закону от нуля до σ_{yW} . При уровнях нагружения $\lambda = \sigma_{\infty} / \sigma_{yW} > 0,2$ в окрестности вершины трещины возникали большие пластические деформации, поэтому задача решалась в текущей лагранжевой постановке с учетом физической и геометрической нелинейностей на основе общих уравнений механики деформируемого твердого тела [27] с использованием в качестве меры напряжений тензора напряжений Коши, а в качестве меры деформаций — тензора логарифмических деформаций Генки.

Рассмотрим определяющие соотношения теории пластического течения, справедливые при больших деформациях. Пусть $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ — вектор скорости материальных частиц деформируемого тела, \mathbf{u} — вектор перемещения, \mathbf{d} — симметричный тензор скорости деформаций, \mathbf{s} — симметричный тензор напряжений Коши. Кинематические соотношения (связь тензора скорости деформаций с тензором градиента скорости) имеют вид $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$, где $\nabla\mathbf{v}^T$ — тензор градиента скорости; ∇ — пространственный набла-вектор. Основная гипотеза теории пластического течения, позволяющая учесть в определяющих соотношениях одновременно упругую и пластическую составляющие деформаций, состоит в аддитивном представлении тензора скорости деформаций: $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$, где \mathbf{d}^e и \mathbf{d}^p — упругая и пластическая составляющие тензора скорости деформаций, которые следуют из законов упругого и пластического деформирования. Для изотропных материалов эти составляющие находятся из закона Гука (упругая составляющая тензора скорости деформаций) и ассоциированного закона пластичности:

$$\mathbf{s}^H = \mathbf{C}^E : \mathbf{d}^e = \mathbf{C}^E : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p), \quad \mathbf{d}^p = c\lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}. \quad (18)$$

Здесь: \mathbf{s}^H — объективная производная Хилла тензора напряжений Коши $\mathbf{s} : \mathbf{s}^H = \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{w} + \text{str} \mathbf{d}$, где $\mathbf{w} = (\nabla\mathbf{v}^T - \nabla\mathbf{v})/2$ — кососимметричный тензор вихря, tr — след тензора второго ранга; \mathbf{C}^E — тензор четвертого ранга для изотропной упругой среды со следующими компонентами в декартовой системе координат:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^E = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} \right],$$

где δ_{ij} — дельта-функция Кронекера, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. В (18) введена скалярная функция текучести $F(\mathbf{s})$ такая, что уравнение $F(\mathbf{s}) = 0$ определяет поверхность текучести в пространстве компонент тензора напряжений Коши. Параметр c конкретизирует мгновенное состояние деформирования материала (упругое или пластическое):

$$c = \begin{cases} 0, & \text{если } F < 0 \text{ или } F = 0 \text{ и } \mathbf{n} : \mathbf{d} \leq 0, \\ 1, & \text{если } F = 0 \text{ и } \mathbf{n} : \mathbf{d} > 0. \end{cases}$$

Здесь \mathbf{n} — вектор внешней нормали единичной длины к поверхности текучести в пространстве компонент тензора напряжений \mathbf{s} :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}}, \quad k = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} : \frac{\partial F}{\partial \mathbf{s}} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Скалярный параметр $\lambda > 0$, введенный в (18), находится в соответствии с заданным законом упрочнения. Окончательно формулы определяющих соотношений упругопластичности выглядят так:

$$\mathbf{s}^H = \mathbf{C}^{EP} : \mathbf{d}, \quad (20)$$

где $\mathbf{C}^{EP} = \mathbf{C}^E - c(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})g$ — тензор четвертого ранга, в котором скалярная функция g зависит от модуля Юнга, коэффициента Пуассона, второго инварианта тензора напряжений и закона упрочнения [27]. Значение скалярного параметра $c = 0$ указывает на упругое деформирование материала (включая разгрузку от достигнутого пластического состояния), а значение $c = 1$ — на пластическое течение материала.

Определяющие соотношения (20) являются нелинейными относительно тензора скорости деформаций \mathbf{d} , так как тензор четвертого ранга \mathbf{C}^{EP} зависит от \mathbf{d} . Запись определяющих соотношений пластичности в виде (20) позволяет для случая квазистатического деформирования дать вариационную формулировку задачи и получить симметричную матрицу касательной жесткости в конечно-элементных аналогах уравнений. Для конкретного представления тензора четвертого ранга \mathbf{C}^{EP} в (20), кроме функции g , требуется вид выражения функции текучести $F(\mathbf{s})$, с помощью которой определяется тензор второго ранга \mathbf{n} в (19). В модели упругопластического материала с условием текучести Мизеса эта функция имеет вид:

$F(\mathbf{s}) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} - \sigma_y$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения тензора напряжений Коши \mathbf{s} .

Расчет напряженно-деформированного состояния пластины выполнен в пакете конечно-элементного анализа MSC.Marc 2015 [28]. Использовались стандартные 4-узловые элементы с линейной аппроксимацией перемещений (тип 11, класс quad4 по классификации MSC.Marc).

Полученные в расчетах пластические зоны перед вершиной трещины с длиной $2l = 24$ мм показаны на рисунках 4–6. Приведено распределения эквивалентных пластических деформаций $\varepsilon^p = \sqrt{2\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} / 3$ (ε_{ij}^p — компоненты тензора пластических деформаций) при трех уровнях нагружения $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_{yw} : 0,27; 0,32$ и $0,5$. Контурные полосы на рисунках ограничены диапазоном $10^{-5} \div 10^{-3}$ для более детальной прорисовки распределения эквивалентных пластических деформаций. Форма пластической зоны на рисунке 4 ($\lambda = 0,27$) напоминает известный лепесток, приводимый в классических монографиях по теории пластичности для иллюстрации малых пластических деформаций [23, 24, 29]. При дальнейшем увеличении нагрузки (Рис. 5, $\lambda = 0,32$) пластическая зона выходит на границу раздела сварного шва и основного металла. В расчетах предел текучести основного металла $\sigma_{yw} = 800$ МПа специально выбирался в два раза больше $\sigma_{yw} = 400$ МПа, чтобы ограничить распространение пластических деформаций сварным швом.

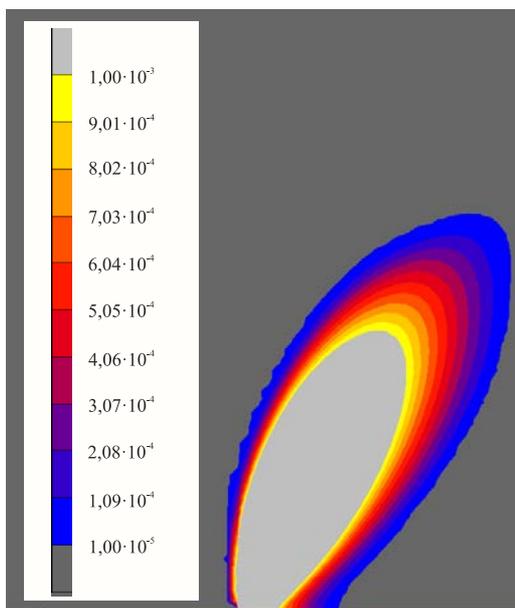


Рис. 4. Форма пластической зоны для трещины $2l = 24$ мм при $\lambda = 0,27$ при маломасштабной пластичности

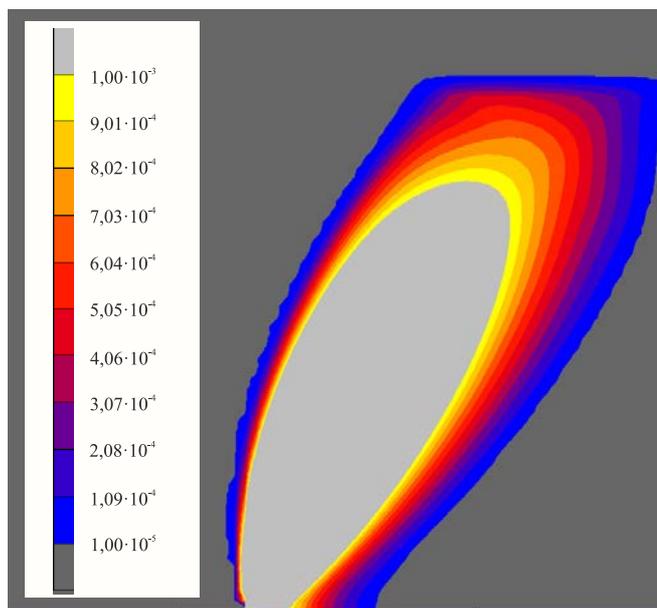


Рис. 5. Форма пластической зоны для трещины $2l = 24$ мм при $\lambda = 0,32$, выходящей на границу раздела сварного шва и основного металла

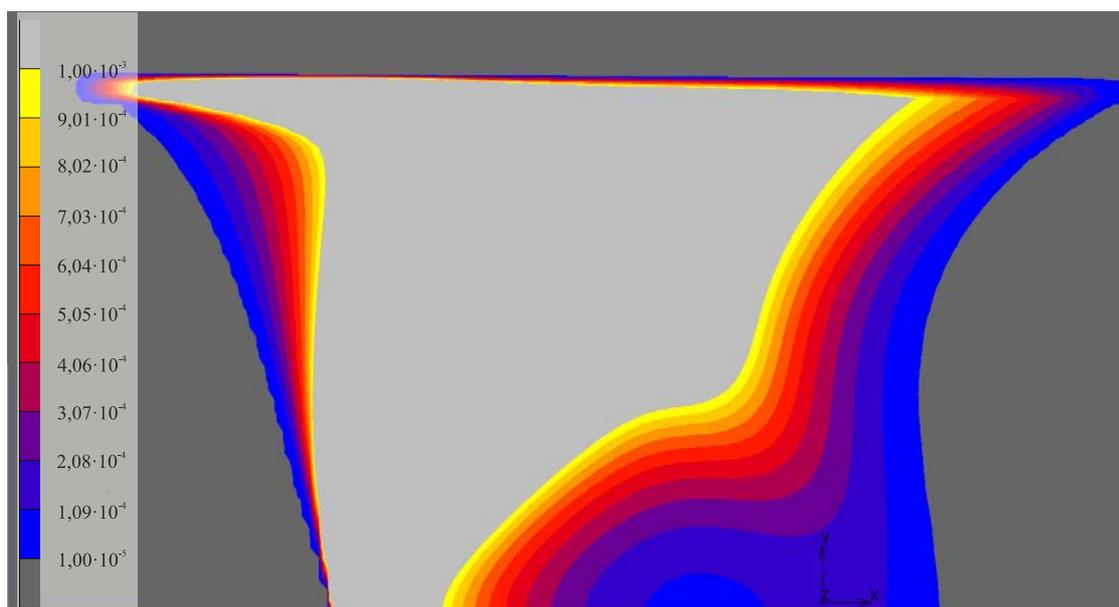


Рис. 6. Форма пластической зоны для трещины $2l = 24$ мм при $\lambda = 0,5$ в случае развитого пластического течения

При достижении нагрузкой значения $\lambda = 0,5$ (Рис. 6) наблюдается развитое пластическое течение, деформации достигают 25%, пластическая зона «растекается» вдоль границы биметалла, распространяясь как перед фронтом трещины, так и за ним, длина пластической зоны увеличивается до 3,5 мм, при этом распределение пластических деформаций имеет сложную картину, поле деформаций становится неоднородным. Раскрытие трещины в левом нижнем углу видно невооруженным глазом. Такая картина локализации пластической зоны внутри сварного шва приводит к необходимости пересмотра основных положений описанной выше теории, базирующихся на понятиях поперечника и длины зоны предразрушения.

Для обработки данных численного эксперимента зададимся значением параметра $\chi = 3$. На каждом шаге по нагрузке λ в результате анализа изолиний пластических зон определим поперечник зоны предразрушения $a_E = a_E(\lambda)$, раскрытие трещины $2v_E = 2v_E(\lambda)$ и длину зоны предразрушения $\Delta_E = \Delta_E(\lambda)$. Раскрытие модельной трещины $2v_E$ вычислим как удвоенное смещение ближайшего к точке K узла сетки (Рис. 2б). Под величиной $2v_E$ понимается разрыв упругих смещений у основания пластической зоны при $x = -\Delta$. Длину Δ_E пластической зоны найдем как разность наибольшей из всех абсцисс граничных точек зоны пластичности и абсциссы вершины трещины. Нижний индекс E отмечает величины, полученные в численном эксперименте. Критическое значение раскрытия трещины δ_E^* установим по формуле $\delta_E^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) a_E = \chi \varepsilon_0 a_E$, где $\varepsilon_0 = \sigma_{YW} / E_W$. Прделаем два последовательных шага по нагрузке, в одном из которых выполним неравенство $2v_E < \delta_E^*$, а в другом — неравенство $2v_E > \delta_E^*$. Путем интерполяции определим нагрузку λ_S , при которой раскрытие трещины $2v_E$ становится равным критическому раскрытию δ_E^* . При этом значение λ_S является критической нагрузкой по достаточному критерию (1), (2). Критическую нагрузку по необходимому критерию (1) рассчитаем на таком шаге по нагрузке, когда ближайший к вершине трещины конечный элемент полностью перейдет в пластическое состояние, и обозначим ее через λ_N . В вершине реальной трещины выполним условие (2) деформационного критерия разрушения.

Подобным образом для трещин с полудлинами l : 6; 12; 18; 24 мм, были получены, соответственно, значения критической нагрузки λ_S : 0,343; 0,261; 0,210; 0,172.

5. Сравнение численных и аналитических результатов

Заметим, что уравнения механики деформируемого твердого тела [27], используемые при моделировании МКЭ, не содержат характерный линейный размер r структуры материала. При дискретизации расчетной области естественным образом вводится структурный параметр, совпадающий с размером конечного элемента. Если МКЭ используется для материалов со структурой, то необходимо, чтобы размер конечного элемента не превышал характерного линейного размера структуры материала. Кроме того, при численном подходе остается неопределенным значение параметра ε_1 — максимального относительного удлинения (см. диаграмму деформирования материала (Рис. 1б)). Наоборот, уравнения (9), (10) или приближенные уравнения (12), (13) аналитической модели содержат величины r и ε_1 , причем величина r входит только в уравнения (9) и (12), а величина ε_1 — только в уравнения (10) и (13). Поэтому предлагается следующий алгоритм сравнения численных результатов из раздела 4 и результатов, которые можно рассчитать с помощью аналитической модели (12), (13).

1. Полагаем характерный линейный размер равным размеру элемента перед вершиной трещины $r = 0,02$ мм. Задаем значение параметра χ , например $\chi = 3$, и полудлину трещины например $l = 6$ мм.
2. На основе результатов численного моделирования с привлечением достаточного критерия аналитической модели вычисляем для заданного χ критическую нагрузку λ_S , как показано в конце предыдущего пункта.
3. По найденному значению λ_S определяем по формуле (15) соответствующее ему значение Δ_S .
4. Из уравнения (13) аналитической модели устанавливаем величину поправочного коэффициента m .
5. Имея значение m , получаем зависимость критической разрушающей нагрузки λ_* от длины трещины по формуле (14), которая позволяет спрогнозировать нагрузку λ_* для других длин трещины и сравнить рассчитанные значения с экспериментальными.
6. Вычисляем зависимость Δ от λ для всех $\lambda \geq \lambda_N$ по формуле (15) аналитической модели и сравниваем с зависимостью Δ_E от λ из численного эксперимента.

Таким образом, предлагаемая процедура, исходя из сведений для трещины заданной длины, позволяет построить прогноз критических нагрузок для трещин произвольной длины. Результаты для сравнения возможностей аналитической модели и численного подхода приведены в таблице.

Таблица. Численные и аналитические результаты

l , мм	λ_s	m	λ_6	λ_{12}	λ_{18}	λ_{24}
6	0,343	0,188	0,343	0,253	0,196	0,150
12	0,261	0,183	0,352	0,261	0,202	0,155
18	0,210	0,176	0,364	0,270	0,210	0,161
24	0,172	0,166	0,382	0,286	0,223	0,172

В таблице через λ_6 , λ_{12} , λ_{18} , λ_{24} обозначены критические нагрузки по достаточному критерию для трещин полудлины $l = 6, 12, 18$ и 24 мм соответственно. В каждой строке таблицы нагрузка, индекс которой отвечает соответствующей полудлине, найдена из численного расчета, три остальных являются прогнозом. Например, для трещины с $l = 6$ мм найдены $\lambda_s = \lambda_6$ и m (с использованием m предсказываются значения нагрузок λ_{12} , λ_{18} , λ_{24}), с $l = 12$ мм — $\lambda_s = \lambda_{12}$ и m (с использованием m предсказываются значения нагрузок λ_6 , λ_{18} , λ_{24}) и так далее. Аналогично для остальных длин трещин.

В целом прогнозирование критической нагрузки по формуле (14) аналитической модели можно считать удовлетворительным. Однако предсказывание длин зон предразрушения по формуле (15) при условии различных нагрузок оказалось менее удачным, особенно для нагрузок из диапазона $0,4 \div 0,5$, где погрешность достигает 100%. Напомним, что длины зон предразрушения, вычисленные по формулам (11), (15) и (16), совпадают только для значения нагрузки, критического по достаточному критерию. Хотя зависимость Δ от λ можно определить из уравнения (15) для любых нагрузок λ , и необязательно из диапазона от λ_N до λ_s , но значение поправочного коэффициента m ограничивается равенством (13), справедливым только для критических значений λ_s и Δ_s .

6. Обсуждение результатов

Выбор параметра осреднения r , входящего в необходимый критерий (1), в какой-то мере субъективен [29]. Зона радиуса r , где напряженное состояние обуславливает момент инициации трещины, больше сингулярной зоны, поэтому только значения коэффициента интенсивности напряжений K_I , как характеристики напряженно-деформированного состояния, теперь уже недостаточно. Эту зону следует рассматривать не как область, где реализуется процесс микрповреждений, пластических деформаций, микроразрушений, а как область, где напряженное состояние, согласно известным решениям теории упругости, за счет перераспределения внутренних усилий определяет момент разрушения. Размер осреднения r считается характеристикой материала и зависит от других его параметров: разрушающих напряжений для образца без трещины и характеристики трещиностойкости. Для относительно длинных трещин, принимая во внимание асимптотику поля напряжений в окрестности вершины трещины, можно получить оценку параметра r в виде

$$r = (2/\pi)(K_{Ic}/\sigma_c)^2,$$

где K_{Ic} — критический коэффициент интенсивности напряжений, σ_c — предел прочности материала на растяжение. Необходимость осреднения напряжений связывают с образованием зоны предразрушения, в которой происходит перераспределение напряжений и изменение физико-механических свойств материала. Размер этой зоны r сопоставим с размерами структурных составляющих материала и намного меньше размеров пластины, длины трещины, толщины сварного шва и другого [30, 31]. Интегральный критерий Нейбера–Новожилова (1) относится к структурным критериям разрушения. Присутствие в критерии параметра осреднения r означает, что процесс разрушения обладает собственной архитектурой, которая в общем случае не обязательно связана со структурой материала.

При компьютерном моделировании размер конечного элемента в окрестности вершины трещины необходимо согласовывать с параметром r . Достаточно нескольких элементов по длине r , чтобы достигнуть решения с приемлемой точностью. Сильно сгущать сетку у вершины не нужно, поскольку в задачах с сингулярностью поля напряжений отсутствует сходимость МКЭ к точному решению. Интегрирование напряжений по интервалу r устраняет особенность в вершине трещины и приводит к конечным значениям осредненных напряжений, а для них уже сходимость имеет место. Как показали численные эксперименты, уменьшение размера конечного элемента до 0,01 мм при прежнем интервале осреднения ($r = 0,02$ мм) привело к незначительному изменению результатов. Чтобы критическая нагрузка λ_N имела приемлемые значения по необходимому критерию, вполне достаточно 1–3 элементов у вершины трещины на интервале r .

Параметр m , найденный в численном эксперименте, характеризует отклонение реального поперечника пластической зоны от модельной величины a , входящей в соотношение (8). Естественно предположить, что в аналитической модели (12), (13) величина поправочного коэффициента m не должна быть связана с длиной трещины. Приведенные в таблице значения $m \approx 0,178$, полученные при прогнозировании длин четырех трещин, подтверждают это предположение. Точность вычисления параметра m зависит от точности расчета критической нагрузки λ_s и соответствующей ей критической длины Δ_s зоны предразрушения. Значение параметра m подчиняется величине выбранного интервала осреднения r , а также точности определения границы пластической области в численном расчете, которая, в свою очередь, обуславливается размером конечных элементов, но явно не зависит от величины r . Прямоугольник со сторонами Δ и a хорошо аппроксимирует зону пластичности при плоском напряженном состоянии (Рис. 1б), но плохо — при плоской деформации (Рис. 2б), особенно для пластической зоны, ограниченной сварным швом (Рис. 6). Поэтому прогнозирование длины зоны

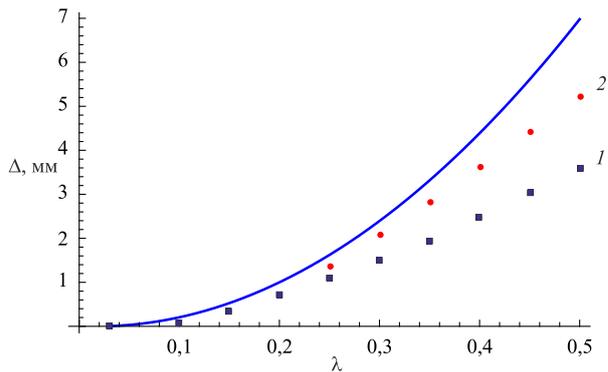


Рис. 7. Теоретическая зависимость длины зоны предразрушения от нагрузки (сплошная линия), обработка численных результатов по модельным уравнениям (квадратики 1), корректировка с учетом влияния толщины сварного шва (кружки 2)

по уравнениям аналитической модели (12), (13) — квадратиками, а зависимость с поправкой, учитывающей реальную длину зоны предразрушения в сварном шве, — кружками. Из рисунка 7 видно, что предлагаемая корректировка существенно улучшает предсказание длины зоны предразрушения по модельным уравнениям в диапазоне нагрузок $\lambda_N \leq \lambda \leq 0,5$.

7. Заключение

Уравнения аналитической модели (1)–(17), приведенные в разделе 3, не содержат толщину сварного соединения $2h$. Эта теория успешно применялась для нахождения критических нагрузок для однородных материалов, двухслойных и трехслойных композитов, для трещин нормального отрыва и поперечного сдвига, распространяющихся как внутри, так и по границам раздела разнородных материалов [11, 15–19, 26]. Получаемые на основе модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла диаграммы квазихрупкого разрушения были пригодны для прогнозирования разрушения в конструкциях и не требовали никаких дополнительных расчетов, уточняющих входящие в уравнения модели параметры. Однако для трещин нормального отрыва, распространяющихся в сварных соединениях, складывается несколько другая ситуация. Как показывают расчеты, для не очень длинных трещин ($l = 6, 12$ мм, $w = 50$ мм) результаты не отличаются от результатов по распространению трещин в однородных материалах. Для более длинных трещин ($l = 18, 24$ мм) на формирование зон пластичности начинает оказывать влияние граница раздела биматериала, ограничивающая распространение пластической зоны сварным соединением. Теперь необходимо дополнять уравнения аналитической модели результатами расчетов размеров и формы пластической зоны, рассчитываемых по компьютерной модели, либо совершенствовать предлагаемую аналитическую модель введением дополнительного параметра — толщины сварного соединения [16].

Построенные структурные формулы (11), (14)–(16) могут оказаться полезными для прогнозирования критической разрушающей нагрузки $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_Y$ и оценки длины зоны предразрушения Δ_* при нагружении по первой моде (при нормальном отрыве) в структурированных разномодульных биматериалах при плоском напряженном состоянии и плоской деформации. Указанные формулы выражают величину нагрузки λ и длины Δ_* через длину трещины $2l$ с использованием следующих

четырёх параметров: r — характерный линейный размер структуры материала; ε_0 и ε_1 — параметры σ – ε -диаграммы деформирования; m — поправочный коэффициент. Эти четыре параметра подбираются по результатам лабораторного эксперимента или численного моделирования, например, как показано в данной работе.

В целом рассматриваемая аналитическая модель может быть полезной при исследовании деформирования и разрушения композитов из структурированных материалов с различными упругими свойствами. Это позволит уменьшить количество лабораторных или численных экспериментов, необходимых для оценки разрушающей нагрузки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 14-08-00113-а и 16-08-00483-а).

Литература

1. *Итон Н., Гловер А., Мак-Грат Дж.* Особенности разрушения при изготовлении и эксплуатации сварных конструкций // *Механика разрушения: разрушение конструкций* / Под ред. Д. Тэплина. – М.: Мир, 1980. – Вып. 20. – С. 92-120.
2. *Lin G., Meng X.-G., Cornec A., Schwalbe K.-H.* The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints // *Int. J. Fracture*. –1999. –Vol. 96, no. 1. – P. 37-54. DOI
3. *Chandra N.* Evaluation of interfacial fracture toughness using cohesive zone model // *Compos. Part A-Appl*. – 2002. – Vol. 33, no. 10. – P.1433-1447. DOI
4. *Kruzic J.J., McNaney J.M., Cannon R.M., Ritchie R.O.* Effects of plastic constraint on the cyclic and static fatigue behavior of metal/ceramic layered structures // *Mech. Mater*. – 2004. – Vol. 36, no. 1-2. – P. 57-72. DOI
5. *Pirondi A., Moroni F.* An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metal joints // *Int. J. Adhes. Adhes.* – 2009. – Vol. 29, no. 8. – P. 796-805. DOI
6. *Aluru K., Wen F.-L., Shen Y.-L.* Direct simulation of fatigue failure in solder joints during cyclic shear // *Mater. Design*. – 2011. – Vol. 32, no. 4. – P. 1940-1947. DOI
7. *Kim Y.-J., Schwalbe K.-H.* Mismatch effect on plastic yield loads in idealised weldments: II. Heat affected zone cracks // *Eng. Fract. Mech.* – 2001. – Vol. 68, no. 2. – P. 183-199. DOI
8. *Сукнев С.В.* Применение нелокальных и градиентных критериев для оценки разрушения геоматериалов в зонах концентрации растягивающих напряжений // *Физ. мезомех.* – 2011. – Т. 14, № 2. – С. 67-76.
9. *Андреев А.В.* Перспективы использования новых сингулярных решений теории упругости в прикладных задачах механики разрушения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. докладов, Казань, 20-24 августа 2015 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – С. 154-156.
10. *Белов П.А.* Градиентные теории упругости. Зачем нужны сложные и очень сложные модели // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. докладов, Казань, 20-24 августа 2015 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – С. 427-428.
11. *Бибосинов А.Ж., Исхакаев А.И., Бекбаутов Б.Е.* Моделирование и исследование зоны пластичности вокруг трещины Гриффитса // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. докладов, Казань, 20-24 августа 2015 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – С. 472-474.
12. *Иштыряков И.С., Яруллин Р.Р.* Развитие трещин в полых образцах при растяжении и кручении // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. докладов, Казань, 20-24 августа 2015 г. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2015. – С. 1641-1644.
13. *Глаголев В.В., Деватова М.В., Маркин А.А.* Модель трещины поперечного сдвига // *ПМТФ*. – 2015. – Т. 56, № 4. – С. 182-192. (English version DOI).
14. *Смирнов С.В., Веретенникова И.А., Вичужанин Д.И.* Моделирование расслоения при пластической деформации биметаллического материала, полученного сваркой взрывом // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2014. – Т. 7, № 4. – С. 398-411. DOI
15. *Кургузов В.Д., Корнев В.М., Астапов Н.С.* Модель разрушения биматериала при расслоении. Численный эксперимент // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2011. – Т. 17, № 4. – С. 462-473.
16. *Корнев В.М., Астапов Н.С.* Модель разрушения сварного соединения при расслоении // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2012. – Т. 18, № 2. – С. 213-225.
17. *Кургузов В.Д., Астапов Н.С., Астапов И.С.* Модель разрушения квазихрупких структурированных материалов // *ПМТФ*. – 2014. – Т. 55, № 6. – С. 173-185. (English version DOI).
18. *Корнев В.М., Кургузов В.Д.* Достаточный дискретно-интегральный критерий прочности при отрыве // *ПМТФ*. – 2001. – Т. 42, № 2. – С. 161-170. (English version DOI).
19. *Корнев В.М., Кургузов В.Д.* Достаточный критерий разрушения в случае сложного напряженного состояния при непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения // *ПМТФ*. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 153-163. (English version DOI).
20. *Леонов М.Я., Панасюк В.В.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле // *Прикладная механика*. – 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391-401.
21. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1960. – Vol. 8, no. 2. – P. 100-104. DOI
22. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 488 с.
23. *Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В.* Нелинейная механика разрушения. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2001. – 632 с.

24. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
25. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов / Под общ. ред. В.В. Панасюка. – Киев: Наукова думка, 1988. – Т. 2. – 619 с.
26. Кургузов В.Д. Выбор параметров сетки конечных элементов при моделировании роста трещин гидроразрыва // Выхисл. мех. сплош. сред. – 2015. – Т. 8, № 3. – С. 254-263. DOI
27. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
28. MARC Users Guide. Vol. A. – Santa Ana (CA): MSC.Software Corporation, 2015. – 943 p.
29. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения. Курс лекций. – СПб.: ЦОП Профессия, 2012. – 552 с.
30. Сукнев С.В., Новопашин М.Д. Определение локальных механических свойств материалов // ДАН. – 2000. – Т. 373, № 1. – С. 48-50.
31. Новопашин М.Д., Сукнев С.В. Градиентные критерии предельного состояния // Вестник СамГУ. – 2007. – № 4(54). – С. 316-335.

References

1. Eaton N.F., Glover A.G., McGrath J.T. *Advances in research on the strength and fracture of materials*. Fracture 1977: Fourth Int. Conf. on Fracture, June 1977, University of Waterloo, Canada, ed. by D.M.R. Taplin. New York: Pergamon, 1978, vol. 1. Pp. 751-773.
2. Lin G., Meng X.-G., Cornec A., Schwalbe K.-H. The effect of strength mis-match on mechanical performance of weld joints. *Int. J. Fracture*, 1999, vol. 96, no. 1, pp. 37-54. DOI
3. Chandra N. Evaluation of interfacial fracture toughness using cohesive zone model. *Compos. Part A-Appl.*, 2002, vol. 33, no. 10, pp. 1433-1447. DOI
4. Kruzic J.J., McNaney J.M., Cannon R.M., Ritchie R.O. Effects of plastic constraint on the cyclic and static fatigue behavior of metal/ceramic layered structures. *Mech. Mater.*, 2004, vol. 36, no. 1-2, pp. 57-72. DOI
5. Pirondi A., Moroni F. An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metal joints. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 2009, vol. 29, no. 8, pp. 796-805. DOI
6. Aluru K., Wen F.-L., Shen Y.-L. Direct simulation of fatigue failure in solder joints during cyclic shear. *Mater. Design*, 2011, vol. 32, no. 4, pp. 1940-1947. DOI
7. Kim Y.-J., Schwalbe K.-H. Mismatch effect on plastic yield loads in idealised weldments: II. Heat affected zone cracks. *Eng. Fract. Mech.*, 2001, vol. 68, no. 2, pp. 183-199. DOI
8. Suknev S.V. Application of nonlocal and stress gradient criteria for estimation of fracture of geomaterials in tensile stress concentration zones. *Fiz. mezomekh – Physical Mesomechanics*, 2011, vol. 14, no. 2, pp. 67-76.
9. Andreev A.V. *The XI All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics*. Kazan: Kazan Federal University, 2015, pp. 154-156.
10. Belov P.A. *The XI All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics*. Kazan: Kazan Federal University, 2015, pp. 427-428.
11. Bibosinov A.Zh., Iskakbaev A.I., Bekbautov B.E. *The XI All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics*. Kazan: Kazan Federal University, 2015, pp.472-474.
12. Ishtyryakov I.S., Yarullin R.R. *The XI All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics*. Kazan: Kazan Federal University, 2015, pp.1641-1644.
13. Glagolev V.V., Devyatova M.V., Markin A.A. Model of a mode II shear crack. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2015, vol. 56, no. 4, pp. 698-706. DOI
14. Smirnov S.V., Veretennikova I.A., Vichuzhanin D.I. Modeling of delamination in multilayer metals produced by explosive welding under plastic deformation. *Vychisl. mekh. splosh. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 398-411. DOI
15. Kurguzov V.D., Kornev V.M., Astapov N.S. Fracture model of bi-material under exfoliation. Numerical experiment. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij – Journal on Composite Mechanics and Design*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 462-473.
16. Kornev V.M., Astapov N.S. Fracture model of weldments under delamination. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij – Journal on Composite Mechanics and Design*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 213-225.
17. Kurguzov V.D., Astapov N.S., Astapov I.S. Fracture model for structured quasibrittle materials. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2014, vol. 55, no. 6, pp.1055-1065. DOI
18. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Sufficient discrete-integral criterion of rupture strength. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2001, vol. 42, no. 2, pp. 328-336. DOI
19. Kornev V.M., Kurguzov V.D. Sufficient criterion of fracture in the case with a complex stress state and non-proportional deformation of the material in the pre-fracture zone. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2010, vol. 51, no. 6, pp. 904-912. DOI
20. Leonov M.Ya., Panasyuk V.V. Razvitie mel'chajshikh treshchin v tverdom tele [Development of the smallest cracks in a solid]. *Prikladnaya mekhanika – International Applied Mechanics*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391-401.
21. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 1960, vol. 8, no. 2, pp. 100-104. DOI
22. Panasyuk V.V., Andreykiv A.E., Parton V.Z. *Osnovy mekhaniki razrusheniya materialov* [Foundations of fracture mechanics of materials]. Kiev: Naukova dumka, 1988. 488 p.
23. Astaf'ev V.I., Radaev Yu.N., Stepanova L.V. *Nelinejnaya mekhanika razrusheniya* [Non-linear fracture mechanics]. Samara: Samara University, 2001. 632 p.
24. Matvienko Yu.G. *Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya* [Models and criteria of fracture mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2006. 328 p.
25. Savruk M.P. *Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov* [Fracture mechanics and strength of materials], ed. by V.V. Panasyuk. Kiev: Naukova Dumka, 1988, vol. 2. 619 p.

26. Kurguzov V.D. Optimization of the finite element mesh in modeling of hydrofracturing crack growth. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no 3, pp. 254-263. DOI
27. Korobeynikov S.N. *Nelinejnoe deformirovanie tverdykh tel* [Nonlinear strain analysis of solids]. Novosibirsk: SB RAS, 2000. 262 p.
28. *MARC Users Guide*. Vol. A. Santa Ana (CA): MSC.Software Corporation, 2015. 943 p.
29. Pestrikov V.M., Morozov E.M. *Mekhanika razrusheniya* [Mechanics of fracture]. St. Petersburg: Professia, 2012. 552 p.
30. Suknev S.V., Novopashin M.D. Opredelenie lokal'nykh mekhanicheskikh svoystv materialov [Determination of local mechanical properties of materials]. *Doklady Akademii Nauk – Doklady Physics*, 2000, vol. 373, no 1, pp. 48-50.
31. Novopashin M.D., Suknev S.V. Gradientnye kriterii predel'nogo sostoyaniya [Gradient criteria of the limit state]. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 4(54), pp. 316-335.

Поступила в редакцию 13.02.2016; опубликована в электронном виде 30.09.2016

Сведения об авторах

Кургузов Владимир Дмитриевич, дфмн, проф., внс, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (ИГиЛ СО РАН), 630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, д. 15; e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Астапов Николай Степанович, кфмн, доц., снс, ИГиЛ СО РАН; e-mail: nika@hydro.nsc.ru