

DOI: [10.7242/1999-6691/2016.9.3.22](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.22)

УДК 519.63

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТЫХ ВЫТЯНУТЫХ ПО ВЫСОТЕ ОБЛАСТЯХ

В.М. Головизнин¹, И.А. Короткин², С.А. Финогенов²¹МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация²Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Российская Федерация

В предыдущей работе авторов (см. журнал «Вычислительная механика сплошных сред», 2015, Т. 8, № 1, С. 60-70) было показано, что использование вихреразрешающей, свободной от настроечных параметров схемы КАБАРЕ для решения как двумерной, так и трехмерной задачи Дэвиса приводит к удивительно хорошему совпадению результатов расчетов на очень грубых сетках (20×20 и $20 \times 20 \times 20$) с результатами экспериментов и прецизионных расчетов для чисел Релея вплоть до значения 10^{14} . Настоящая работа посвящена исследованию чувствительности этого феномена к изменению формы каверны (переходу каверны от кубической формы к прямоугольной). Рассмотрены области в форме параллелепипеда с аспектными отношениями 1:4, 1:10 и 1:28,6. Представлено сравнение данных, полученных методом КАБАРЕ, с экспериментально установленными (для отношения 1:28,6), а также с найденными в ходе прямого численного моделирования (для отношения 1:4) и вычисленными по эмпирической формуле (для отношения 1:10). Во всех случаях метод КАБАРЕ продемонстрировал хорошее согласование интегральных характеристик течения в каверне с данными других авторов. При этом в расчетах применялись показательно грубые сетки, сгущающиеся по мере приближения к стенкам области. Показано, что приемлемая точность расчетов на экстремально грубых сетках сохраняется вплоть до аспектного отношения 1:10. При более высоких аспектных отношениях необходимое для достижения заданной точности число ячеек существенно возрастает.

Ключевые слова: тепловая конвекция, турбулентные течения, несжимаемая жидкость

TURBULENT NATURAL CONVECTION MODELING IN ENCLOSED TALL CAVITIES

V.M. Goloviznin¹, I.A. Korotkin² and S.A. Finogenov²¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation²Nuclear Safety Institute RAS, Moscow, Russian Federation

In our previous work on the parameter-free numerical method for modeling thermal convection in square cavities in a wide range of Rayleigh numbers (Computational Continuum Mechanics, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 60-70), it was shown that using eddy-resolving parameter-free CABARET scheme for solution of both two and three dimensional Davis' test leads to surprisingly good agreement of computational results on the coarse grids (20×20) and ($20 \times 20 \times 20$) with experimental results and accurate computations for Rayleigh numbers up to 10^{14} . Current work is devoted to sensitivity analysis of this phenomenon in terms of cavity form variation from cubical to highly stretched. Therefore, the computational regions with the aspect ratio 1:4, 1:10, and 1:28.6 were considered. Comparison of CABARET scheme results with the experimental data (for the aspect ratio 1:28,6), DNS results (for the ratio 1:4), and empirical relation (for the ratio 1:10) is presented. In all the cases CABARET method showed good agreement of integral parameters of the flow with the results of other authors. For CABARET calculations notably coarse grids were used with refining to the walls of the region. It is shown that acceptable computation accuracy on the extremely coarse grids is achieved for the aspect ratio up to 1:10. For the higher aspect ratio and the given accuracy the number of computational cells significantly grows.

Key words: thermal convection, turbulent flows, incompressible liquid

1. Введение

Для описания турбулентных течений обычно используются модели турбулентности, параметры которых зависят от решаемой задачи и нуждаются в настройке. Альтернативой являются методы прямого численного моделирования (DNS), требующие экстремально больших вычислительных ресурсов. В последнее время усилился интерес к методам DNS с неполным разрешением, позволяющим в большом числе случаев получать приемлемые результаты на относительно грубых расчетных сетках — на сетках с размерами ячеек, превышающими колмогоровский масштаб. К таким методам, названным «вихреразрешающими», относятся LES и DES методы [1]. Они более универсальны, однако также содержат настроечные коэффициенты.

В работе [2] сформулирована концепция идеальных вихреразрешающих алгоритмов (Perfect LES), характерными чертами которых является отсутствие настроечных параметров и повышение точности расчетов при измельчении сетки. В работах [2–4] описаны такие алгоритмы, базирующиеся на численной схеме КАБАРЕ [5].

В предыдущей публикации [3] было показано, что применение беспараметрической схемы КАБАРЕ для решения двумерной и трехмерной задач Дэвиса [6] приводит к очень хорошему совпадению результатов расчетов на очень грубых сетках (20×20 и $20 \times 20 \times 20$) с результатами экспериментов и прецизионных расчетов для чисел Релея вплоть до значения 10^{14} . Достаточно убедительного объяснения

этого феномена в настоящее время нет. В связи с этим возникает вопрос, насколько такая точность оказывается чувствительной к переходу формы каверны от кубической к прямоугольной.

Задача, таким образом, заключается в том, чтобы при варьировании соотношения сторон в прямоугольной каверне (увеличении аспектного отношения) определить максимально грубую расчетную сетку, при которой достигается приемлемая точность интегральных параметров турбулентного течения. Разумеется, речь не идет о математически строгом нахождении нижней границы достаточного числа расчетных ячеек. Интерес представляет качественный характер поведения аномальности. Критерием точности расчетов на грубых сетках может быть либо сравнение с прецизионными DNS-расчетами, либо с экспериментом.

В качестве первой верификационной задачи были выбраны DNS-расчеты термоконвекции в прямоугольной полости с аспектным отношением 1:4 при числе Релея 10^{10} и числе Прандтля 0,71, проделанные в работах [7, 8]. Вторая задача — сравнение с эмпирической зависимостью числа Нуссельта от чисел Релея и Прандтля в прямоугольной полости с аспектным соотношением 1:10. Аналитическая формула для данной зависимости приведена в [9]. Третья верификационная задача — это эксперимент [10, 11] (P.L. Betts и I.N. Vokhari) при аспектном отношении 28,6. Числа Релея, найденные по расстоянию между холодной и горячей стенками, составляют $0,86 \cdot 10^6$ и $1,43 \cdot 10^6$. Это один из немногих имеющихся в литературе экспериментов, который можно рассматривать как надежный и качественный бенчмарк, признанный вычислителями во всем мире. Результаты данного эксперимента приняты за основу при верификации вычислительных методик в Европейском сообществе инженеров и вычислителей ERCOFTAC [12].

В вытянутых областях переход течения в турбулентный режим происходит при гораздо меньших числах Релея. Например, в практически квадратной области (эксперимент S. Mergui [13]) турбулентное течение наблюдается при значении порядка 10^9 , что подтверждает и работа Y. Tian [14]. В то же время результаты A.A. Dafa'Alla и P.L. Betts [11] показывают, что в области с соотношением сторон 28,6 течение полностью турбулентно уже при числах Релея порядка 10^6 — на три порядка меньших, чем в квадратных областях. Пульсации скорости при этом достигают половины от средних значений. Резкое уменьшение величины числа Релея (рассчитанного по ширине области), необходимого для турбулизации потока, при увеличении аспектного соотношения сторон продемонстрировано Le Quee и Alziary [15]. Все это говорит о том, что в вытянутых областях более адекватную оценку чисел Релея имеет смысл делать по максимальному геометрическому размеру, и в таком случае для рассматриваемого эксперимента они составят $2 \cdot 10^{10}$ и $3,3 \cdot 10^{10}$ соответственно.

Поиск «максимально грубой» сетки проводится следующим образом: при законе ее сгущения к границам области, подобранном в работе [3], число слоев сетки по высоте выбирается вначале пропорциональным аспектному соотношению. По окончании расчетов и после сравнения результатов с референсными значениями (или взятыми из DNS-расчетов, или полученными по эмпирической формуле, или экспериментальными) сетка дробится эвристическим образом до достижения приемлемой точности.

2. Постановка задачи

Для моделирования процесса свободной конвекции теплоносителя за основу принято уравнение Навье–Стокса в классическом приближении Буссинеска, дополненное уравнениями теплопроводности и несжимаемости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{u} + \beta(T - T_0) \mathbf{g}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \Delta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: ν — кинематическая вязкость; β — коэффициент теплового объемного расширения; ρ_0 — плотность теплоносителя при некоторой равновесной температуре T_0 ; α — коэффициент температуропроводности; \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения; вектор $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x, y, z)$ и скаляр $T = T(t, x, y, z)$ — соответственно, функции скорости и температуры теплоносителя; $P = P(t, x, y, z)$ — давление.

Система (1) решается в замкнутой области, имеющей форму параллелепипеда (Рис. 1). На боковых вертикальных стенках задана постоянная температура:

$$T(t, x, y, z)|_{z=0} = T_c, \quad T(t, x, y, z)|_{z=W} = T_h.$$

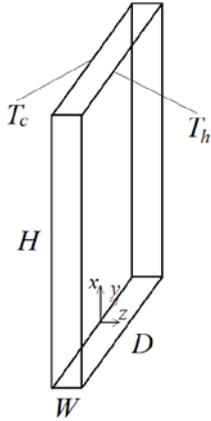


Рис. 1. Схема расчетной области

по всем направлениям сетки с произвольным количеством узлов. Число арифметических операций при этом совпадает по асимптотике с числом действий в методах, основанных на быстром преобразовании Фурье. Комплекс программ, разработанных для их реализации, ориентирован на расчетные системы с параллельной организацией вычислений.

3. Термоконвекция в прямоугольной камере с аспектным отношением 1:4

Естественная конвекция в замкнутой области, имеющей форму параллелепипеда с соотношением сторон $W/H = 1/4$ (см. Рис. 1) подробно рассмотрена в серии исследований [7, 8]. При этом размер области по третьему измерению — D , равняется расстоянию между изотермическими стенками — W , ускорение

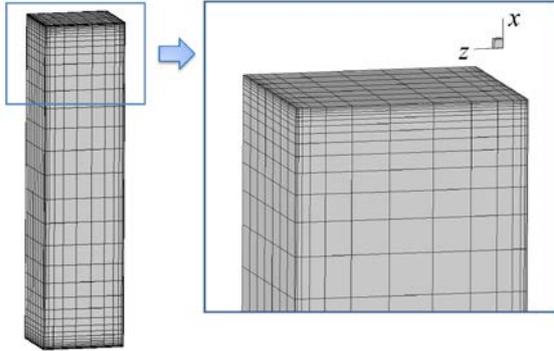


Рис. 2. Расчетная сетка из $40 \times 8 \times 16$ ячеек и ее фрагмент

силы тяжести направлено вертикально вниз, камера наполнена воздухом, число $Pr = 0,71$. Задача решена при нескольких числах Релея как с использованием метода DNS, так и различных инновационных методик, которые, как и схема КАБАРЕ, дают удовлетворительный результат на грубых сетках.

Рассмотрим, например, задачу при $Ra = 10^{10}$. Расчетную сетку выберем самую грубую из тех, к которым авторы [7, 8] прибегали в своих беспараметрических методах: из $40 \times 8 \times 16$ ячеек со сгущением (см. Рис. 2).

В некоторый момент времени для данного числа Релея построены изоповерхности температуры, найденной методом DNS и по схеме КАБАРЕ (Рис. 3). По рисунку видно, что характер течения существенно турбулентный и трехмерный. Образуются вихри различных масштабов. Общие картины течения полученными методами DNS и КАБАРЕ очень похожи, при этом DNS-расчет выполнялся на сетке с $462 \times 128 \times 190$ узлами.

В некоторый момент времени для данного числа Релея построены изоповерхности температуры, найденной методом DNS и по схеме КАБАРЕ (Рис. 3). По рисунку видно, что характер течения существенно турбулентный и трехмерный. Образуются вихри различных масштабов. Общие картины течения полученными методами DNS и КАБАРЕ очень похожи, при этом DNS-расчет выполнялся на сетке с $462 \times 128 \times 190$ узлами.

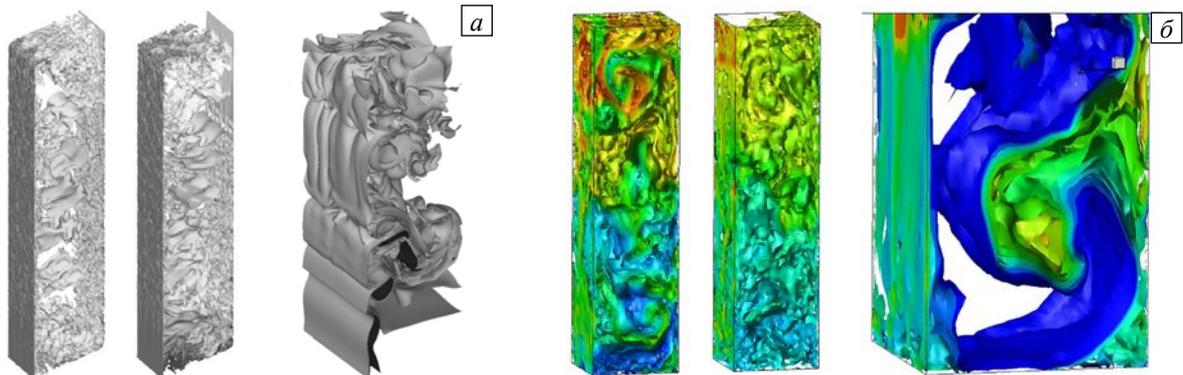


Рис. 3. Мгновенные изоповерхности температуры в некоторый момент времени t , полученные методом DNS на сетке с $462 \times 128 \times 190$ узлами (а) и методом КАБАРЕ на сетке с $40 \times 8 \times 16$ узлами (б)

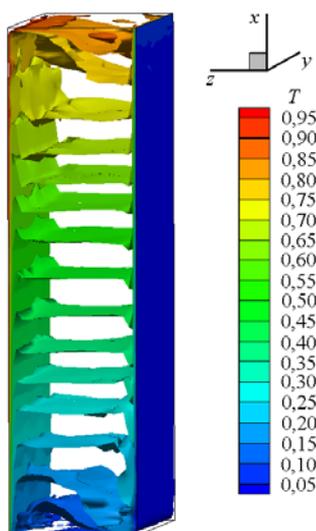


Рис. 4. Изоповерхности температуры при установившемся режиме течения, полученной методом КАБАРЕ

Установившееся течение в расчетной области показано на рисунке 4, где представлены изоповерхности температуры. Наблюдается полная температурная стратификация по всей высоте параллелепипеда. Среднее число Нуссельта на стенках со временем сходится к величине 101,0, которая хорошо согласуется как с результатами расчета методом DNS, так и с данными беспараметрических методик RM1 и RM2 из [7, 8] на грубых сетках, а также с результатом вычислений по эмпирической формуле (см. Табл. 1).

Как видно из таблицы, на одинаковых сетках методика КАБАРЕ показывает сравнимую с авторским методом RM2 [8] точность. Метод же RM1 требует более подробных сеток. Вычислительная эффективность схемы КАБАРЕ превосходит DNS-метод более чем в 2000 раз за счет использования гораздо более грубой сетки.

Точность расчетов по схеме КАБАРЕ при различной степени сгущения расчетной сетки по мере приближения к боковым изотермическим стенкам демонстрируют графики на рисунке 5. На нем полученные числа Нуссельта изображены в зависимости от безразмерного параметра Y^+ при двух значениях числа Рейля. Горизонтальная черная линия показывает DNS-решение.

Таблица 1. Средние значения числа Нуссельта, найденные по различным методикам

Методики расчета	DNS	RM1	RM2	Эмпирическая формула $Nu = 0,182Ra^{0,275}$	Схема КАБАРЕ
Сетка (число узлов)	462×128×190	80×16×34	40×8×17		40×8×16
Число Nu	101,9	100,8	102,2	102,35	101,0

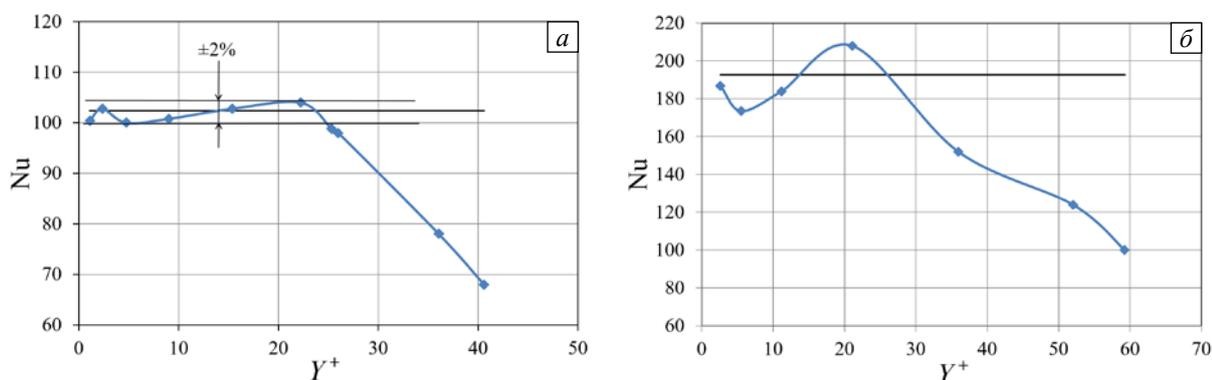


Рис. 5. Зависимость числа Нуссельта от параметра Y^+ при $Ra = 10^{10}$ (а) и $Ra = 10^{11}$ (б); $H/W = 4$

Из графиков следует, что по схеме КАБАРЕ при $Ra = 10^{10}$ число Нуссельта вблизи активной стенки вычисляется с точностью до 2% вплоть до $Y^+ = 25$. При $Ra = 10^{11}$ имеет место большая погрешность (порядка 10%), но соответствует она тем же параметрам: $Y^+ \leq 25$.

4. Термоконвекция в прямоугольной камере с аспектным отношением 1:10

Исследуем теплообмен в прямоугольном вертикальном зазоре с аспектным соотношением 1:10 и размером по третьему измерению (глубине), равным ширине ($D = W$). В качестве рабочей среды зададим воздух, число $Pr = 0,69$. В общем случае для параметров $0,02 < Pr < 11560$, $5 < H/W < 18$, $10^4 < Ra < 7 \cdot 10^8$ средние числа Нуссельта могут быть описаны следующей эмпирической формулой [9]:

$$Nu = 0,05Ra^{0,33} \cdot Pr^{0,074} . \quad (2)$$

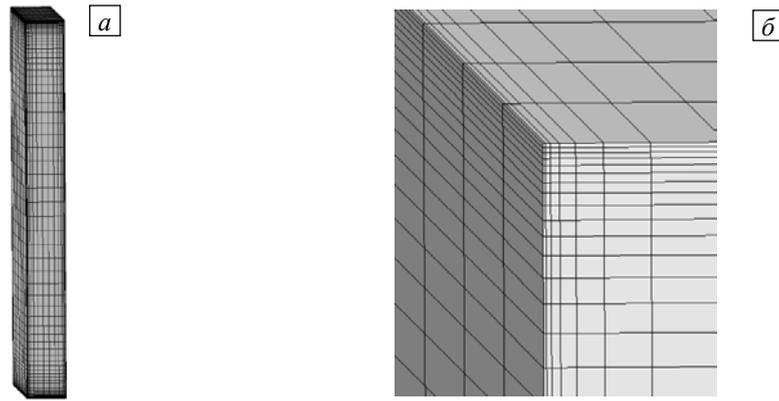


Рис. 6. Расчетная сетка из $80 \times 10 \times 20$ ячеек (а) и ее фрагмент (б)

Рассмотрим случай $Ra = 5,3 \cdot 10^8$ — это практически предельное значение числа Релея, находящееся в рамках области применимости формулы (2). Эмпирическое значение числа Нуссельта, согласно (2), будет составлять около 36,82. Выберем показательно грубую сгущающуюся расчетную сетку из $80 \times 10 \times 20$ ячеек (Рис. 6).

Для взятых величин чисел Релея и Прандтля оценки числа Нуссельта по схеме КАБАРЕ сходятся к значению 37,2, что очень хорошо согласуется с результатом, который дает эмпирическая формула (2). Дальнейшее увеличение времени счета не приводит к существенному изменению характера теплообмена. Сетки с числом ячеек $80 \times 10 \times 20$ при должном сгущении оказывается достаточно для вычисления среднего числа Нуссельта вблизи активных стенок.

5. Термоконвекция в вытянутой прямоугольной каверне с аспектным отношением 1:28,6

Эксперимент с тепловой конвекцией в вытянутой по высоте прямоугольной каверне проведен А.А. Dafa'Ala и Р.Л. Betts [11] на установке, которая подробно описана в [10] и [18]. Внутренние размеры полости, имеющей форму параллелепипеда, составляли 2,18 м по высоте (H), 0,076 м — по ширине (W) и 0,52 м — в глубину (D), как схематично показано на рисунке 1. Полость была заполнена воздухом при нормальном давлении. Основные физические характеристики воздуха при различных температурах приведены в таблице 2. Для расчетов брались средние значения параметров для заданного режима течения. Температура холодной стенки поддерживалась на уровне $15,1^\circ\text{C}$, для горячей стенки было выбрано два различных значения: $34,7^\circ\text{C}$ и $54,7^\circ\text{C}$. Это дало два числа Релея: $0,86 \cdot 10^6$ и $1,43 \cdot 10^6$, которые определялись по расстоянию между активными стенками (то есть по ширине области). Остальные границы являлись адиабатическими.

Таблица 2. Физические характеристики воздуха при разных температурах

Температура, $^\circ\text{C}$	T_c	T_h	
	15,1	34,7	54,7
Теплопроводность, Вт/(м·К)	0,0253	0,0268	0,0283
Коэффициент теплового расширения β , K^{-1}	0,00347	0,00325	0,00305
Кинематическая вязкость $\nu \cdot 10^5$, m^2/c	1,46	1,65	1,84
Число Pr	0,704	0,700	0,697
Плотность ρ , kg/m^3	1,225	1,146	1,085
Теплоемкость C_p , $\text{kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$	1,005	1,005	1,005

Следует подчеркнуть, что если вычислить число Релея по высоте области, то его значения будут порядка 10^{10} , а это лежит на границе возможностей DNS-методов даже при привлечении к расчетам современных многопроцессорных вычислительных систем.

Помимо осредненных тепловых характеристик в эксперименте были измерены пульсации температуры и спектральные характеристики в трех контрольных точках. Места, в которых размещались датчики с более низким временем отклика, находились на середине высоты области ($x = H/2$) на расстоянии 0,005, 0,0381 и 0,0712 м от холодной стенки на линии, перпендикулярной изотермическим вертикальным стенкам и проходящей через центр области.

Расчеты по схеме КАБАРЕ проведены на серии структурированных ортогональных сгущающихся к границам сеток, начиная от 100 тыс. ячеек (сетка $200 \times 10 \times 50$) до 32 млн. ячеек (сетка $1600 \times 100 \times 200$). Ярко выраженные пульсации температур и скоростей в турбулентном движении воздуха между стенками отмечаются уже на самой грубой сетке. Однако оценки средних чисел Нуссельта на стенках при таких сетках получаются заниженными. При измельчении сетки наблюдается сходимость чисел Нуссельта к значениям из эксперимента. При этом хорошая согласованность с экспериментальными данными по интегральным тепловым потокам (с точностью до 9%) имеет место на сетках порядка 2...8 млн. ячеек.

Рассмотрим результаты решения по методике КАБАРЕ на сетке из 8 млн. ячеек ($800 \times 100 \times 100$). Безразмерный параметр Y^+ пристеночного слоя ячеек для такой сетки составляет $0,8 \dots 1,1$, что достигается сгущением сетки к границам области. Для проведения вычислений на таких достаточно подробных сетках мощностей обычного персонального компьютера недостаточно. В данном случае исследуемую область удобно разбить на 8 подобластей из $100 \times 100 \times 100$ ячеек или на 64 подобласти из $50 \times 50 \times 50$ ячеек. Тогда в каждой из подобластей реализацию методики можно производить независимо, на отдельном процессоре, а граничные условия выбирать исходя из условий сшивки. Время счета одного варианта задачи с 32 млн. расчетных ячеек на 32 вычислительных узлах занимает около 2-3 дней реального времени.

5.1. Интегральные характеристики и среднеквадратичные отклонения

Течение воздуха внутри каверны уже при $Ra = 0,86 \cdot 10^6$ имеет ярко выраженный турбулентный характер. Хаотичность течения хорошо прослеживается на рисунке 7 (для наглядности расчетная область растянута по ширине в 2 раза). На рисунках 7а, б представлено распределение температуры и вертикальной компоненты скорости в центральном вертикальном сечении $y/D = 1/2$ в один из моментов времени. Отчетливо видны возникающие и отрывающиеся от стенок вихревые структуры. На осредненном по времени распределении температуры наблюдается вертикальная температурная стратификация (Рис. 7в). Максимальные скорости в вертикальном направлении достигают 35 см/с (Рис. 7б), в двух горизонтальных — 25 см/с. Очевидно, что течение в области полностью трехмерное.

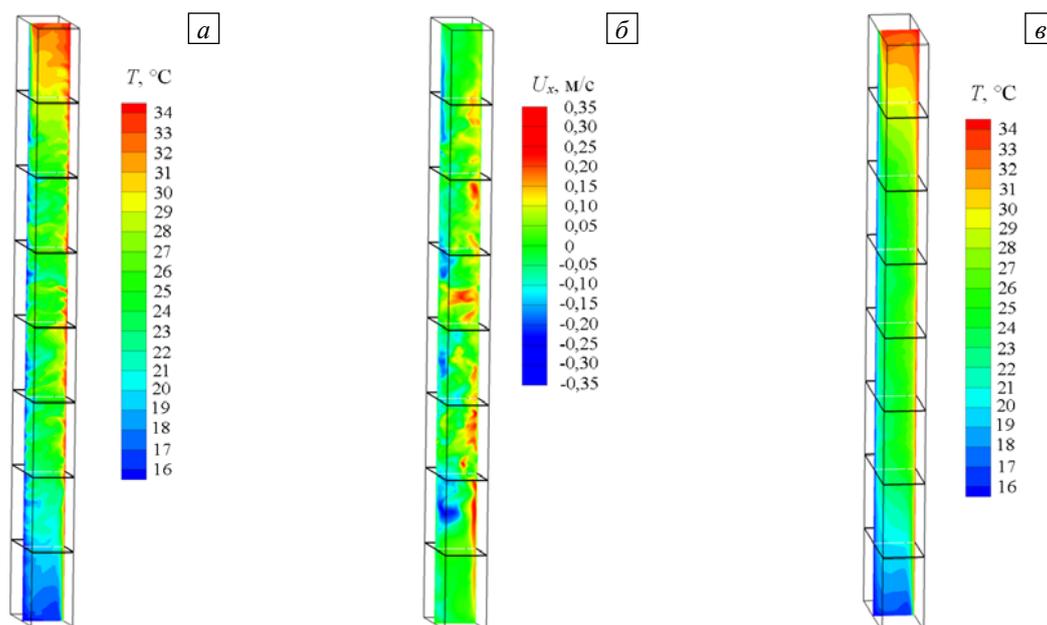


Рис. 7. Мгновенное поле температур (а), поле вертикальных компонент скоростей (б) и осредненное по времени поле температур (в) в сечении, лежащем в плоскости $y/D = 1/2$

Зависимость среднего числа Нуссельта от времени на холодной и горячей стенках для $Ra = 0,86 \cdot 10^6$ постоянно флуктуирует от 5,5 до ~6,0. В среднем результат, полученный по схеме КАБАРЕ, очень хорошо согласуется с данными эксперимента (в пределах 1,7%, см. Табл. 3). При большем числе Релея ($1,43 \cdot 10^6$) совпадение с экспериментом среднего числа Нуссельта находится в пределах 8,2%. Но расчетов других авторов, которые подтверждали бы этот экспериментальный результат, не обнаружено.

Задача, аналогичная данному эксперименту была решена также с помощью стандартной $k-\epsilon$ модели и ее различных модификаций (см. [19]). Кроме того, имеются результаты по определению средних чисел Нуссельта в более ранних экспериментах на очень похожей установке [11]. Все вычисленные и найденные в упомянутых выше источниках средние числа Нуссельта сведены в таблицу 3.

Таблица 3. Средние значения числа Нуссельта, полученные с помощью различных экспериментальных и вычислительных методик

Ra	Эксперимент [10, 18]	Эксперимент [11]	КАБАРЕ, сетка 800×100×100 (откл. от эксп. [10, 18])	$k-\varepsilon$ модель [19]	$k-\varepsilon$ модель + Yар [19]	$k-\varepsilon$ модель + Yар + GGDH [19]
$0,86 \cdot 10^6$	5,85	4,9	5,75 (1,7%)	6,53	4,66	4,74
$1,43 \cdot 10^6$	7,57	–	6,95 (8,2%)	–	–	–

Как видно из таблицы, не каждый вычислительный метод способен с достаточной точностью предсказать даже такую осредненную характеристику теплопередачи, как среднее число Нуссельта. В то же время заметно заниженный результат наблюдался и в более ранних экспериментах [11].

В ходе эксперимента были найдены также распределения температур и вертикальных компонент скоростей в различных горизонтальных сечениях области, построены средние профили и распределения среднеквадратичных отклонений вдоль горизонтальной оси z . На рисунке 8 для $Ra = 0,86 \cdot 10^6$ представлены средние значения температур (Рис. 8а, в, д) и скоростей (Рис. 8б, з, е) в центральном вертикальном сечении расчетной области ($y/D = 1/2$) на разной относительной высоте: $x/H = 0,05$, 0,5 и 0,95, то есть в нижней части (Рис. 8а, б), в центре (Рис. 8в, з) и в верхней части (Рис. 8д, е) каверны.

По характерным отклонениям экспериментальных точек друг от друга (см. Рис. 8а) можно примерно оценить погрешность измерений. Как видно, данные расчета по методике КАБАРЕ полностью согласуются с экспериментом в пределах заданной погрешности.

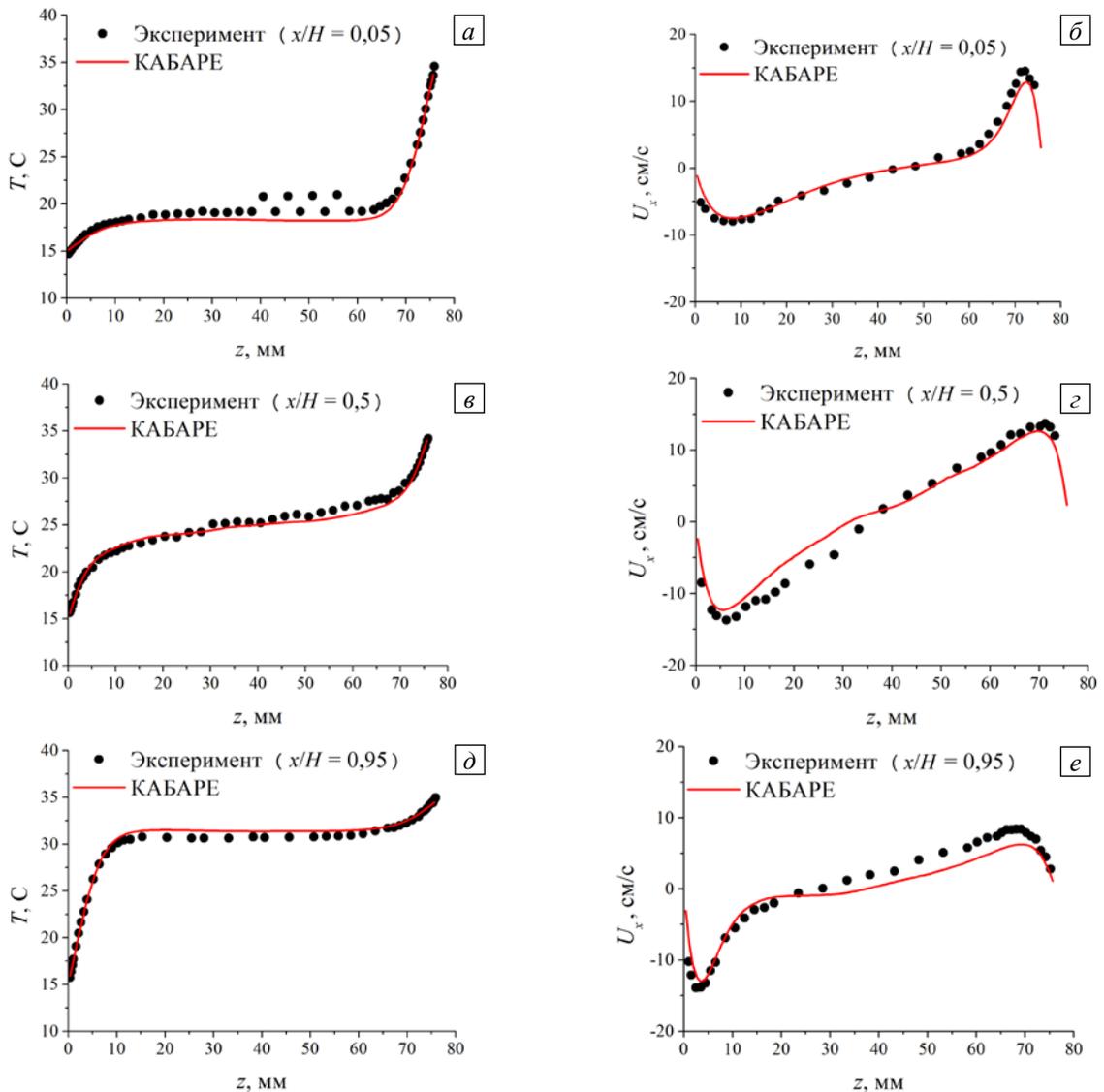


Рис. 8. Распределения средних температур (а), (в), (д) и средних вертикальных компонент скоростей (б), (з), (е) вдоль направления z в сечении $y/D = 1/2$

На следующей серии рисунков — 9а-е, представлены среднеквадратичные отклонения температур и скоростей от их средних значений. Как и на рисунке 8, для $Ra = 0,86 \cdot 10^6$ приведены профили функций для центрального вертикального сечения области ($y/D = 1/2$) на трех различных высотах x/H : 0,05, 0,5 и 0,95.

На рисунке 9 отмечается достаточно большой разброс экспериментальных данных, что говорит о высокой погрешности измерений. Тем не менее хорошо прослеживается увеличение амплитуды пульсаций температуры в пристеночной области (Рис. 9а, д), характерный наклон профиля пульсаций скорости в верхней и нижней частях области (Рис. 9б, е). На всех рисунках результаты расчета в целом идентичны данным эксперимента. Заметное отличие по амплитуде пульсаций наблюдается только на рисунке 9в, на котором представлены распределения пульсаций температур в центре расчетной области. Вероятно, это связано с низким временем отклика температурных датчиков, которые не воспроизводят пульсации с амплитудой выше 1°C . Возможно, этим объясняется и тот факт, что в верхней и нижней частях каверны вблизи активных стенок зафиксировано увеличение амплитуды температурных пульсаций (Рис. 9а, д), а в центре области (Рис. 9в) стандартные отклонения практически по всей ширине составляют ровно 1°C . К тому же величина отклонений на рисунках 9а, д не превышает $0,7^\circ\text{C}$. Поэтому образовавшееся на рисунке 9в «плато» можно трактовать так, что для данного сечения экспериментаторы достигли потолка возможностей температурных датчиков. В действительности амплитуда пульсаций по всей ширине может превышать 1°C , на что указывают данные расчета по методике КАБАРЕ.

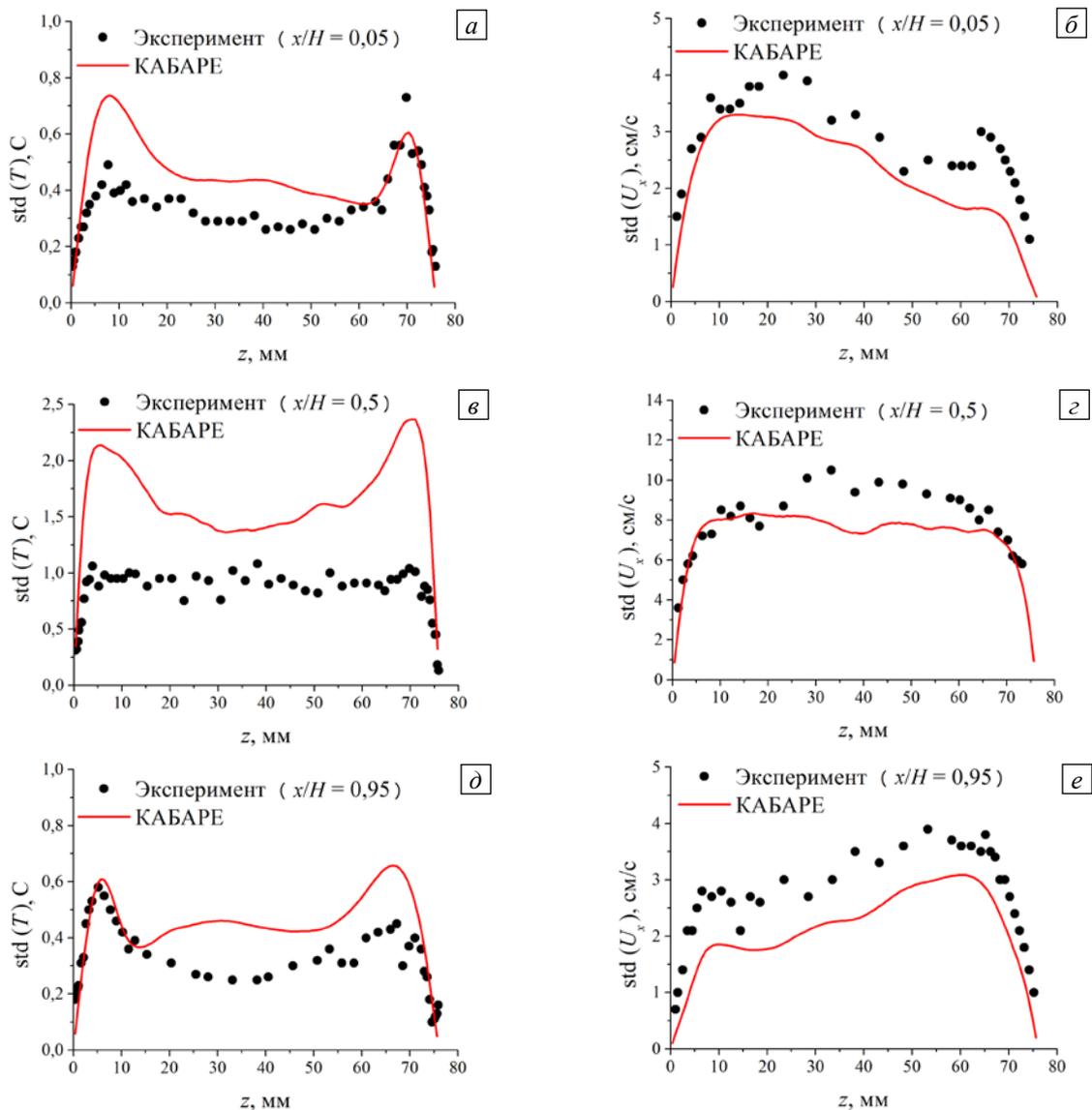


Рис. 9. Распределения среднеквадратичных отклонений температур (а), (в), (д) и вертикальных компонент скоростей (б), (г), (е) вдоль направления z в сечении $y/D = 1/2$

5.2. Спектральные характеристики

Одной из наиболее наглядных характеристик нестационарного квазихаотического сигнала является его спектр. В эксперименте были проведены прецизионные измерения температуры в центральном горизонтальном сечении каверны ($x/H = 0,5$) с помощью температурных датчиков с малым временем отклика. Это позволило построить спектральную плотность температуры (E_T) в диапазоне частот от 0,1 Гц до 10 Гц для двух чисел Рейля: $0,86 \cdot 10^6$ и $1,43 \cdot 10^6$. На рисунке 10 представлены экспериментальные спектры температурных пульсаций и спектры, полученные по результатам расчетов на основе схемы КАБАРЕ.

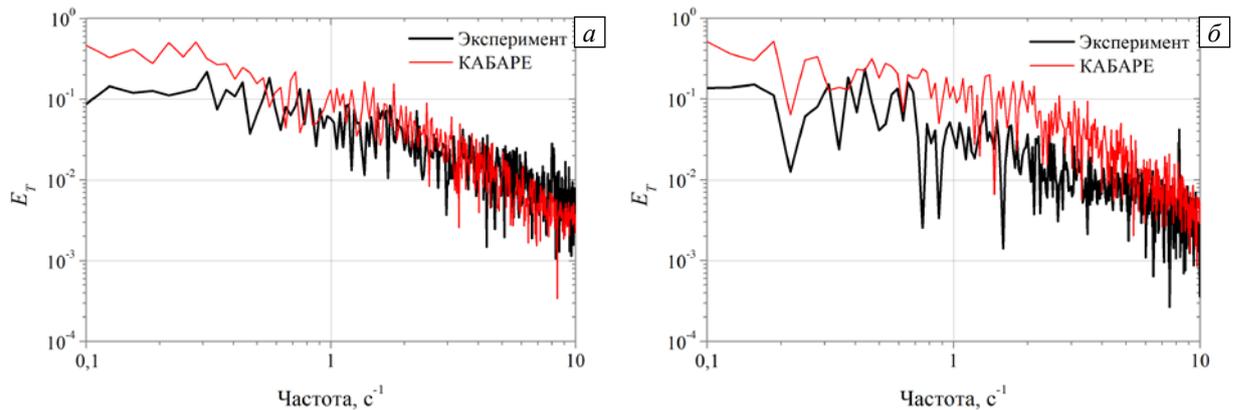


Рис. 10. Спектральная плотность пульсаций температуры при $Ra = 0,86 \cdot 10^6$ (а) и $Ra = 1,43 \cdot 10^6$ (б) в центре расчетной области ($x/H = 1/2$, $y/D = 1/2$)

Из приведенных графиков видно, что в данном диапазоне частот присутствует полный спектр флуктуаций температур, который был успешно воспроизведен численным методом вплоть до самых высокочастотных гармоник. Количественное расхождение в энергии низкочастотных пульсаций может быть связано с относительной грубостью расчетной сетки в центре каверны.

6. Заключение

Проведена верификация схемы КАБАРЕ [3] на решении серии трехмерных задач моделирования турбулентной термоконвекции в прямоугольных кавернах с разнонагретыми стенками. Расчеты осуществлены при различных числах Рейля и отношениях размеров каверн-параллелепипедов. Результаты вычислений по схеме КАБАРЕ сравнивались с результатами прецизионных DNS-расчетов других авторов [7, 8] и с экспериментами [10, 11] из европейской базы данных ERCOFTAC [12]. При этом рассматривались как интегральные параметры течений, так и флуктуации скорости и температуры (в случаях, где такие данные были доступны).

В процессе верификации выяснилось, что приемлемая точность вычислений достигается на anomalно грубых дискретизирующих область сетках. Для трехмерной задачи Дэвиса высокая точность для чисел Рейля вплоть до 10^{14} отвечает расчетной сетке из $20 \times 20 \times 20$ ячеек [3]. У вытянутых по высоте параллелепипедов с отношением сторон 1:4 и числах Рейля $10^8 - 10^{11}$ на сетке с $40 \times 8 \times 16$ ячейками ошибка в определении интегральных тепловых потоков составляет 0,5–9%. При аспектном отношении 1:10 хорошие результаты дает сетка из $80 \times 10 \times 20$ ячеек.

Помимо общего числа ячеек точность расчетов зависит и от степени сгущения слоев сетки к границам области. Нахождение интегрального числа Нуссельта для каверны с аспектным отношением 1:4 в зависимости от величины Y^+ показало, что точность в 2% при $Ra = 10^{10}$ и 10% при $Ra = 10^{11}$ достигается при $Y^+ \in (1...25)$, то есть на сетках, обычно используемых в низкорейнольдсовских RANS-моделях.

Исследование термоконвекции в узкой щели с аспектным отношением 1:28,6 продемонстрировало, что количество необходимых расчетных ячеек в этом случае резко возрастает. Приемлемые результаты были получены на сетках из 2...8 миллионов ячеек. Это, по всей видимости, связано с тем, что в узких щелях теплоперенос обуславливается не только пристеночными пограничными слоями, но и в большой степени сильно развитой турбулентностью слоя смешения. Дальнейшее измельчение сетки, вплоть до 32 миллионов ячеек, не привело к заметному изменению определяемых характеристик.

Установленные в работе результаты, скорее всего, связаны с особенностями схемы КАБАРЕ. Одна из таких особенностей заключается в том, что схема обладает временной обратимостью в течениях,

характеристики одного семейства в которых не пересекаются. Применительно к уравнениям Эйлера для несжимаемой жидкости, имеющим только одно семейство характеристик, это означает, что схема КАБАРЕ является бездиссипативной. Другими словами, она не обладает присущей в той или иной мере другим схемам аппроксимационной вязкостью. Таким образом, реальная вязкость, включаемая в вычислительный процесс вследствие расщепления задачи по физическим процессам, имеет возможность проявить себя даже при очень больших числах Рейнольдса. Нелинейная коррекция потоков при решении системы уравнений Эйлера осуществляется на основе фундаментального математического принципа — принципа максимума переноса локальных римановых инвариантов, и не содержит настроечных параметров. Эта коррекция играет роль «подсеточной вязкости» и обеспечивает необходимую величину оттока кинетической энергии «на подсеточный уровень» на масштабах порядка размеров расчетной ячейки. Никакие представления о физике турбулентных течений при конструировании вычислительного алгоритма на основе схемы КАБАРЕ не используются.

Схема КАБАРЕ, как показано в работе [4], без каких-либо настроек (при отсутствии настроечных параметров) может быть успешно применена для численного моделирования пристенной турбулентности при различных числах Рейнольдса с полным разрешением спектра турбулентных пульсаций, то есть как в DNS-алгоритме. С другой стороны, в исследованиях термоконвекции, проделанных в настоящей работе, спектр турбулентных пульсаций на сетке в 8...16 тысяч ячеек разрешается не полностью, что характерно для LES-алгоритмов. Этой области разрешимости спектра, однако, оказывается достаточно, чтобы хорошо воспроизводить интегральные тепловые потоки на сетке с числом расчетных ячеек примерно в 2000 раз меньшим, чем это требуется для полновесных DNS-расчетов.

Следует отметить, что попытки создания беспараметрических моделей турбулентных течений предпринимались и ранее. Так в работе [8] построен беспараметрический алгоритм термоконвекции в прямоугольной полости с аспектным отношением 1:4, позволяющий находить интегральные числа Нуссельта, средние скорости, температуры и стратификацию при числах Релея вплоть до 10^{17} на достаточно грубых сетках, однако область его успешного применения оказалась ограниченной.

Литература

1. *Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л.* Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 88 с.
2. *Головизнин В.М., Готов В.Ю., Данилин А.В., Короткин И.А., Карабасов С.А.* Моделирование турбулентных течений по схеме «КАБАРЕ» в двухмерной и трехмерной несжимаемой жидкости / Сб. Фундаментальные проблемы моделирования турбулентных течений и двухфазных течений. – Москва: Комтехпринт, 2012. – Т. 3. – С. 113-185.
3. *Головизнин В.М., Короткин И.А., Финогенов С.А.* Беспараметрический численный метод для расчета термоконвекции в прямоугольных кавернах в широком диапазоне чисел Рэлея // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2015. – Т. 8, № 1. – С. 60-70. DOI
4. *Асфандияров Д.Г., Головизнин В.М., Финогенов А.С.* Беспараметрический метод расчета турбулентного течения в плоском канале в широком диапазоне чисел Рейнольдса // ЖВММФ. – 2015. – Т. 55, № 9. – С. 1545-1558. (English version DOI)
5. *Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. – М.: Изд-во Московского университета, 2013. – 472 с.
6. *De Vahl Davis G.* Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution // Int. J. Numer. Meth. Fl. – 1983. – Vol. 3, no. 3. – P. 249-264. DOI
7. *Trias F.X., Gorobets A., Soria M., Oliva A.* Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to 10^{11} – Part I: Numerical methods and time-averaged flow // Int. J. Heat Mass Tran. – 2010. – Vol. 53, no. 4. – P. 665-673. DOI
8. *Trias F.X., Verstappen R.W.C.P., Gorobets A., Soria M., Oliva A.* Parameter-free symmetry-preserving regularization modeling of a turbulent differentially heated cavity // Computers & Fluids. – 2010. – Vol. 39, no. 10. – P. 1815-1831. DOI
9. *Кумателадзе С.С.* Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат, 1979. – 416 с.
10. *Betts P.L., Bokhari I.H.* Experiments on turbulent natural convection in an enclosed tall cavity // Int. J. Heat Fluid Fl. – 2000. – Vol. 21, no. 6. – P. 675-683. DOI
11. *Dafa'Alla A.A., Betts P.L.* Experimental study of turbulent natural convection in a tall air cavity // Exp. Heat Transfer. – 1996. – Vol. 9, no. 2. – P. 165-194. DOI
12. ERCOFTAC, European research community on flow, turbulence and combustion. <http://www.ercofac.org/> (дата обращения: 17.06.2016).
13. *Mergui S., Penot F., Tuhault J.L.* Experimental natural convection in an air-filled square cavity at $Ra = 1.7 \cdot 10^9$ // Proc. of the Eurotherm Seminar no. 22, Editions Europeennes Thermiques et Industrie, Paris, 1993. – P. 97-108.
14. *Tian Y.* Low turbulence natural convection in an air filled square cavity / PhD thesis. – UK, London: South Bank University, 1997.
15. *Le Quere P., de Alziary R.A.* Transition to unsteady natural convection of air in differentially heated cavities // Proc. of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Swansea, Pineridge Press, 1985. – P. 841.
16. *Кузнецов Ю.А.* Вычислительные методы в подпространствах // Вычислительные процессы и системы / Под. ред. Г.И. Марчука. – Вып. 2. – М.: Наука, 1985. – С. 265-350.

17. Кузнецов Ю.А., Финогенов С.А. Пакет программ для решения эллиптических задач с разделяющимися переменными // Численные методы и программное обеспечение. – М.: ИВМ АН СССР, 1990. – С. 95-105.
18. Bokhari I.H. Turbulent natural convection in a tall cavity / PhD thesis. – University of Manchester: UMIST, 1996.
19. Ince N.Z., Launder B.E. On the computation of buoyancy-driven turbulent flows in rectangular enclosures // Int. J. Heat Fluid Fl. – 1989. – Vol. 10, no. 2. – P. 110-117. DOI

References

1. Garbaruk A.V., Strelets M.Kh., Shur M.L. *Modelirovanie turbulentnosti v raschetakh slozhnykh techeniy* [Modeling of turbulence in the calculation of complex flows]. St.-Petersburg: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 2012. 88 p.
2. Goloviznin V.M., Glotov V.Yu., Danilin A.V., Korotkin I.A., Karabasov S.A. *Fundamental'nye problemy modelirovaniya turbulentnykh techeniy i dvukhfaznykh techeniy* [Fundamental problems of modeling of turbulent flows and two-phase flows]. Moscow: Komtekhpriint, 2012, vol. 3, pp. 113-185.
3. Goloviznin V.M., Korotkin I.A., Finogenov S.A. Parameter-free numerical method for modeling thermal convection in square cavities in a wide range of Rayleigh numbers. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 60-70. DOI
4. Asfandiyarov D.G., Finogenov S.A., Goloviznin V.M. Parameter-free method for computing the turbulent flow in a plane channel in a wide range of Reynolds numbers. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 9, pp. 1515-1526. DOI
5. Goloviznin V.M., Zajtsev M.A., Karabasov S.A., Korotkin I.A. *New algorithms in computational fluid dynamics for multiprocessor computing systems*. Moscow: Lomonosov Moscow State University, 2013. 472 p.
6. De Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 1983, vol. 3, no. 3, pp. 249-264. DOI
7. Trias F.X., Gorobets A., Soria M., Oliva A. Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with Rayleigh numbers up to 10^{11} – Part I: Numerical methods and time-averaged flow. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2010, vol. 53, no. 4, pp. 665-673. DOI
8. Trias F.X., Verstappen R.W.C.P., Gorobets A., Soria M., Oliva A. Parameter-free symmetry-preserving regularization modeling of a turbulent differentially heated cavity. *Computers & Fluids*, 2010, vol. 39, no. 10, pp. 1815-1831. DOI
9. Kutateladze S.S. *Osnovy teorii teploobmena* [Fundamentals of heat transfer theory]. Moscow: Atomizdat, 1979. 416 p.
10. Betts P.L., Bokhari I.H. Experiments on turbulent natural convection in an enclosed tall cavity. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 2000, vol. 21, no. 6, pp. 675-683. DOI
11. Dafa'Alla A.A., Betts P.L. Experimental study of turbulent natural convection in a tall air cavity. *Exp. Heat Transfer*, 1996, vol. 9, no. 2, pp. 165-194. DOI
12. ERCOFTAC, European research community on flow, turbulence and combustion. <http://www.ercofac.org/> (accessed 17 June 2016).
13. Mergui S., Penot F., Tuhaut J.L. Experimental natural convection in an air-filled square cavity at $Ra = 1.7 \cdot 10^9$. *Proc. of the Eurotherm Seminar no. 22, Editions Europeennes Thermiques et Industrie, Paris, 1993*, pp. 97-108.
14. Tian Y. *Low turbulence natural convection in an air filled square cavity*. PhD thesis, UK, London: South Bank University, 1997.
15. Le Quere P., de Alziary R.A. Transition to unsteady natural convection of air in differentially heated cavities. *Proc. of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Swansea, Pineridge Press, 1985*, pp. 841.
16. Kuznetsov Y.A. *Vychislitel'nye protsessy i sistemy* [Computational processes and systems], ed. by G.I. Marchuk. Moscow: Nauka, 1985, no. 2. Pp. 265-350.
17. Kuznetsov Y.A., Finogenov S.A. *Chislennyye metody i programmnoe obespechenie* [Numerical methods and software]. Moscow: Institute of Numerical Mathematics of Academy of Sciences USSR, 1990. Pp. 95-105.
18. Bokhari I.H. *Turbulent natural convection in a tall cavity*. PhD thesis, University of Manchester, UMIST, 1996.
19. Ince N.Z., Launder B.E. On the computation of buoyancy-driven turbulent flows in rectangular enclosures. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 1989, vol. 10, no. 2, pp. 110-117. DOI

Поступила в редакцию 02.12.2015; опубликована в электронном виде 30.09.2016

Сведения об авторах

Головизнин Василий Михайлович, дфмн, проф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (МГУ им. М.В. Ломоносова), 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1; e-mail: gol@ibrae.ac.ru

Короткин Иван Александрович, кфмн, снс, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН (ИБРАЭ РАН), 115191, Москва, ул. Большая Тульская, д. 52; e-mail: korotkin@ibrae.ac.ru

Финогенов Сергей Александрович, кфмн, внс, ИБРАЭ РАН; e-mail: saf@ibrae.ac.ru