DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.20
УДК 539.3

КОМБИНИРОВАННАЯ СИСТЕМА ЧИСЛЕННЫХ И СИМВОЛЬНЫХ МЕТОДОВ НА БАЗЕ MAPLE В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Ю.Ю. Андреева, Б.А. Жуков

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Российская федерация

MAPLE – широко распространенный пакет символьных преобразований, применяемый для теоретических исследований. Но этот пакет содержит и численную составляющую, расширяющую сферу его приложения. В настоящей работе предлагается проблемно специализированная система расчетов, являющаяся комбинацией численных методов и системы аналитических вычислений (САВ) в среде MAPLE. Данная система автоматизации решений не является альтернативой известных численных пакетов типа ANSYS, ABAQUS и подобных. Она просто расширяет возможности универсального пакета MAPLE, упрощает его, адаптирует к задачам механики. В качестве примера для моделирования выбрана конечная антиплоская деформация, поскольку она представляет собой наиболее простой вид конечной деформации. На практике эта деформация характерна для длинных резинометаллических амортизаторов сдвига. Предлагаемая комбинированная система расчетов включает мощные средства символьного интегрирования, методы минимизации функционалов, возможности визуализации результатов, присущие MAPLE при его функционировании. В статье описывается концептуальный подход к построению данной численно-символьной системы, особенности использования потенциала MAPLE, выбор и обоснование вариационного принципа, содержание библиотеки необходимых подпрограмм. Приводится тестирование работы системы на известном точном решении. Рассматриваемый в качестве примера расчет амортизатора сдвига не означает, что система предназначена только для этого узкого круга задач. В рамках MAPLE она позволяет автоматизировать приближенное решение статических задач конечной антиплоской деформации со смешанными граничными условиями и произвольным неогуковским потенциалом для областей со сложной конфигурацией. Аналогичные расчетные системы можно создать для плоской и осесимметричной деформаций. Вместе эти блоки могут составить для пользователя рабочее место в среде MAPLE.

Ключевые слова: антиплоская деформация, амортизатор сдвига, потенциалы энергии деформации, *R*-предикат

A COMBINED MAPLE-BASED SYSTEM OF NUMERICAL AND SYMBOLIC METHODS IN THE PROBLEMS OF NONLINEAR ANTI-PLANE DEFORMATION

Yu.Yu. Andreeva and B.A. Zhukov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

MAPLE is a symbolic computation package widely used in theoretical studies. The package also contains a numerical component expanding the scope of its application. In the present paper we propose a problem-oriented automated calculation system, which is a combination of numerical methods and systems of analytical calculations (SAV) in the MAPLE environment. This solution automation system is not an alternative for well-known numerical packages, such as ANSYS, ABAQUS, etc. It just extends the universal package MAPLE, simplifies and adapts it to the problems of mechanics. Finite anti-plane deformation has been chosen for modeling because it is the simplest type of finite deformation that occurs in long rubber-metal shock absorbers. The proposed automated calculation system includes powerful symbolic integration methods, functional minimization methods, and MAPLE visualization techniques. We describe here a conceptual approach to construction of our numerical and symbolic system, MAPLE capabilities, selection and justification of the variational principle, and the contents of a subprogram library. The method is verified using a known exact solution. The calculation of shock absorber (considered as an example) does not mean that the system is designed for this purpose only. With MAPLE, one can automate the approximate solution of static problems of anti-plane finite deformation under mixed boundary conditions and arbitrary neoquassin potential for areas of complex configuration. The same calculation systems can be created for planar and axisymmetric deformations. Taken together, these blocks can give users a workplace environment in MAPLE.

Key words: anti-plane deformation, shock absorber, energy deformation potential, *R*-predicate

1. Введение

MAPLE — система компьютерной алгебры, широко распространенный пакет символьных расчетов, к которому прибегают при теоретических исследованиях. Но этот пакет содержит и численную составляющую, расширяющую сферу его применения. В настоящей работе предлагается система автоматизированных вычислений (САВ), являющаяся проблемно специализированной комбинацией численных методов и аналитических вычислений, которая базируется на универсальной САВ. В качестве универсальной САВ выступает MAPLE. В статье используется терминология работы [1], в которой приведена история приложения символьных методов к механике.

Базирование специализированной системы расчетов на пакете MAPLE позволяет брать на вооружение присущие ему мощные средства символьного интегрирования, методы минимизации функционалов, возможности визуализации результатов и в то же время диктует ее конфигурацию в виде библиотек авторских программ, подгружаемых в универсальную САВ пользователем, и структуру интерфейса в виде рабочего листа MAPLE. Подгружаемые библиотеки, согласно [1], могут быть отнесены к алгоритмическим подсистемам, а содержащиеся в них программы — к символьным и численным блокам. Все программы пишутся на внутреннем языке программирования пакета MAPLE. От других специализированных систем предлагаемая САВ отличается сферой приложения, которой является нелинейная теория упругости.

Данная САВ не играет роли альтернативы известных численных пакетов типа ANSYS, ABAQUS и подобных. Она просто расширяет возможности универсального пакета MAPLE, упрощает его применение в задачах механики.

Создание сложных универсальных программных средств, призванных разрешать множество задач, требует огромных интеллектуальных, временных и материальных затрат. Представляется более эффективным использование простых моделей для решения конкретных задач [2]. Совокупность алгоритмических подсистем, реализующих такие задачи, может составить для исследователя автоматизированное рабочее место в среде MAPLE.

В линейной теории упругости из трехмерных задач выделяются задачи с плоской, осесимметричной, антиплоской деформацией. Последний вид деформации наиболее простой, поэтому естественно начать с модели антиплоской деформации. При наличии же нелинейности проблема такого разделения становится более сложной. Так, для несжимаемых материалов антиплоская деформация возможна только в телах с потенциалами энергии деформации, удовлетворяющими условиям, сформулированным в [4]. Например, она всегда возможна в материалах, описываемых обобщенным неогуковским потенциалом.

Естественным практическим приложением модели конечной антиплоской деформации является расчет деформированного состояния резинометаллического амортизатора продольного сдвига. Резинометаллические амортизаторы сдвига обычно состоят из металлических (плоских, трубчатых или фасонных) обойм, между которыми прочно закреплена резина. Обоймы сдвигаются относительно друг друга и на достаточном удалении от торцов (при условии, что рассматриваются длинные амортизаторы) обеспечивают антиплоскую деформацию резинового массива.

Следует отметить, что при антиплоской деформации объем сохраняется независимо от того, сжимаемый материал или несжимаемый: якобиан преобразования равен единице для любой функции депланации поперечного сечения, задающей эту деформацию. Это — геометрическое свойство самой деформации. В данной работе выбрана модель несжимаемого материала, поскольку она наиболее разработана. Следует отметить и то, что применение фасонных обойм предполагает разнообразие конфигураций поперечного сечения, которое может быть достаточно сложным.

Основное свойство предлагаемой специализированной системы заключается в том, что она позволяет автоматизировать расчет резинометаллических амортизаторов сдвига при конечных деформациях в рамках MAPLE, свободно вводить любой неогуковский потенциал и достаточно сложную конфигурацию поперечного сечения амортизатора. Система проста в использовании и при тестировании на известных точных решениях дает приемлемые результаты расчета жесткостных характеристик. Остальные компоненты, такие как приближенный метод реализации, аппроксимация неизвестных и так далее, могут быть изменены. То есть предлагается некоторый вариант системы в рамках основного концепта.

Выбор в качестве примера для расчета напряженно-деформированного состояния амортизатора сдвига не означает, что система предназначена только для этого. Она автоматизирует в рамках MAPLE приближенное решение статических задач при конечной антиплоской деформации со смешанными граничными условиями и произвольным неогуковским потенциалом для областей со сложной конфигурацией.

2. Напряженно-деформированное состояние при конечной антиплоской деформации

Литература, посвященная конечной антиплоской деформации, весьма обширна, так как это наиболее простой случай формоизменения, поэтому дать ссылки на отдельные работы не представляется возможным в виду их многочисленности. В данном разделе приводится постановка задач статики для однородного изотропного гиперупругого несжимаемого материала при антиплоской деформации в форме, удобной для дальнейшего использования [3, 5]. Для этого направим пространственную декартову систему координат так, чтобы вектор перемещения при антиплоской деформации $\mathbf{U}$ имел вид:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = w(x, y)\mathbf{k} , \qquad (1)$$

где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}$ — радиус-векторы точек в текущей и отсчетной конфигурациях соответственно; (x, y, z) — декартовы координаты точек в отсчетной конфигурации, принимаемые в качестве материальных; $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ — единичный базис декартовой системы координат. В случае обобщенного неогуковского потенциала тензор напряжений Пиола–Кирхгофа принимает вид:

$$\mathbf{D} = 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left(\overset{0}{\nabla} w\mathbf{k} + \mathbf{k}\overset{0}{\nabla} w\right), \qquad (2)$$

а уравнения равновесия в области σ и на части граничного контура поперечного сечения γ_1, на котором задана плотность сдвигающего усилия, записываются в форме:

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w\right)=0 \quad \text{в области } \sigma,$$
$$2\mathbf{n}\cdot\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w = f_Z \quad \text{на контуре } \gamma_1. \tag{3}$$

Здесь: $I_1 = \mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{G}$ — первый инвариант меры деформации Коши $\mathbf{G}=\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}\cdot\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, где точка означает скалярное произведение, а значок Т — транспонирование; $\overset{0}{\nabla}=\mathbf{i}\partial/\partial x+\mathbf{j}\partial/\partial y$ — оператор Гамильтона в базисе отсчетной конфигурации; $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к части граничного контура γ_1 поперечного сечения резинового элемента в отсчетной конфигурации. Плотность сдвигающего усилия $f_Z(t)\mathbf{k}$ рассчитывается на единицу площади боковой поверхности резинового элемента в отсчетной конфигурации. Кинематические граничные условия задаются на части граничного контура γ_2, дополнительной к γ_1:

$$w(t)=Z(t), \qquad t\in\gamma_2. \tag{4}$$

Здесь $Z(t)$ — заданное продольное смещение. Тензор истинных напряжений Коши отличается от тензора Пиола–Кирхгофа для антиплоской деформации неогуковского материала только наличием дополнительной компоненты

$$\mathbf{S}=2\frac{\partial W}{\partial I_1}\left[\overset{0}{\nabla} w\mathbf{k}+\mathbf{k}\overset{0}{\nabla} w+\left(1+\overset{0}{\nabla} w\cdot\overset{0}{\nabla} w\right)\mathbf{kk}\right],$$

которая в постановке не участвует, поэтому в дальнейшем рассматривается тензор Пиола–Кирхгофа, действующий как линейный оператор на вектор нормали в отсчетной конфигурации, которая не варьируется, что существенно упрощает обоснование вариационных методов.

2.1. Варианты обобщенного неогуковского потенциала

Ниже приводятся выражения обобщенного неогуковского потенциала в случае несжимаемых материалов:

− степенная модель Ноулса [6] $W=(\mu/(2b))\left[\left(1+(b/n)(I_1-3)\right)^n-1\right]$. Здесь: μ — модуль сдвига линейной теории упругости; b и n — положительные константы материала;

− при $n=1$ из модели Ноулса следует стандартная неогуковская модель — потенциал Трелоара $W=(\mu/2)(I_1-3)$;

− в предельном случае, при $n\to\infty$, получается еще один случай плотности энергии деформации — $W=(\mu/(2b))\left[\exp\left(b(I_1-3)\right)-1\right]$, который представлен Фунгом (см. библиографию в [7]) для описания биологических материалов;

− модель Гента [8], задающая плотность энергии деформации выражением $W=-(\mu/2)J_m\ln\left(1-(I_1-3)/J_m\right)$, где J_m — постоянная материала;

− в результате вычисления предела при $J_m\to\infty$ из модели Гента имеем модель Трелоара;

− в коммерческих вычислительных пакетах часто применяется модель Арруда–Бойса [9]:

$$W=\mu\left[\frac{1}{2}(I_1-3)+\frac{1}{20\lambda^2}\left(I_1^2-9\right)+\frac{11}{1050\lambda^4}\left(I_1^3-27\right)+\frac{19}{7000\lambda^6}\left(I_1^4-81\right)+\frac{519}{673750\lambda^8}\left(I_1^5-243\right)\right].$$

3. Вариационная формулировка

Для приближенного решения существенным моментом является формулировка постановки задачи в виде интегрального вариационного принципа, поскольку такой ее вид ослабляет требования, предъявляемые к гладкости искомых функций. В данной работе выбран функционал, в котором варьируются не только перемещения, но и напряжения, что позволяет аппроксимировать перемещения и напряжения независимо от граничных условий. В качестве обобщенного неогуковского потенциала используется функционал, полученный из общего, приведенного в [10]:

$$J(\mathbf{w},\mathbf{D}) = \iint_{\sigma} W\left[I_1(w)\right] ds - \int_{\gamma_2} \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{k}(w-Z)\, dl - \int_{\gamma_1} f_Z w\, dl. \tag{5}$$

Здесь: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ — граничный контур; σ — поперечное сечение амортизатора; контур γ обходится так, что область σ остается слева.

Покажем, что уравнения Эйлера для (5) совпадают с (3) и (4) при учете того, что не варьируются ни отсчетная конфигурация — $\delta\sigma = 0$, ни оператор Гамильтона в базисе отсчетной конфигурации — $\delta\overset{0}{\nabla} = 0$, то есть $\delta\left(\overset{0}{\nabla} w\right) = \overset{0}{\nabla}(\delta w)$. Для антиплоской деформации имеем $I_1 = 3 + \overset{0}{\nabla} w \cdot \overset{0}{\nabla} w$, следовательно [5]: $\partial I_1 / \partial \overset{0}{\nabla} w = 2\overset{0}{\nabla} w$. Вычислим вариацию функционала и приравняем ее к нулю:

$$\delta J(\mathbf{w},\mathbf{D}) = \iint_{\sigma} \frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \overset{0}{\nabla} w}\cdot\delta\left(\overset{0}{\nabla} w\right) ds - \int_{\gamma_2} \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{k}(w-Z)\, dl - \int_{\gamma_2} \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{k}\;\delta w\, dl - \int_{\gamma_1} f_Z\,\delta w\, dl = 0.$$

Двойной интеграл можно преобразовать:

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial W}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \overset{0}{\nabla} w}\cdot\delta\left(\overset{0}{\nabla} w\right) ds = \iint_{\sigma} \frac{\partial W}{\partial I_1} 2\overset{0}{\nabla} w\cdot\overset{0}{\nabla}\delta w ds = \iint_{\sigma} \overset{0}{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} 2\overset{0}{\nabla} w\delta w\right) ds - \iint_{\sigma} \overset{0}{\nabla}\cdot\left(2\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w\right)\delta w ds =$$
$$= -\iint_{\sigma} \overset{0}{\nabla}\cdot\left(2\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w\right)\delta w ds + \oint_{\gamma_1\cup\gamma_2} \mathbf{n}\cdot 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w\delta w dl.$$

Таким образом,

$$\delta J = -\iint_{\sigma} \overset{0}{\nabla}\cdot\left(2\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w\right)\delta w d\sigma + \int_{\gamma_2} \mathbf{n}\cdot\left(2\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w - \mathbf{D}\cdot\mathbf{k}\right)\delta w dl -$$
$$-\int_{\gamma_2} \mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{k}(w-Z)\, dl - \int_{\gamma_1}\left(\mathbf{n}\cdot 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w - f_Z\right)\delta w\; dl = 0.$$

Учитывая произвольность вариаций δw и $\delta\mathbf{D}$ в области σ и на границе γ, получаем:

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\left(2\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w\right) = 0 \quad \text{в области } \sigma,$$
$$\mathbf{n}\cdot 2\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w = f_Z \quad \text{на контуре } \gamma_1, \tag{6}$$
$$w(t) = Z(t) \quad \text{на контуре } \gamma_2. \tag{7}$$

Кроме того, на граничном контуре имеет место уравнение состояния:

$$\mathbf{n}\cdot\left(2\frac{\partial W}{\partial I_1}\overset{0}{\nabla} w - \mathbf{D}\cdot\mathbf{k}\right) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, на аппроксимации w, D_{xz}, D_{yz} не накладывается никаких условий, кроме требования гладкости, которое, в силу интегральности вариационного принципа, тоже не слишком жесткое. Все граничные условия являются для этого вариационного принципа естественными. Тем не менее, выполнения (8) только на граничном контуре не достаточно для соответствия напряженного состояния деформированному состоянию в области σ, поэтому напряжения после нахождения w следует отыскивать по формуле (2). В силу специфики конструкции амортизатора сдвига в дальнейшем используется постановка, при которой на границе поперечного сечения заданы только смещения: $\gamma = \gamma_2$, то есть рассматривается функционал

$$J(\mathbf{w}, \mathbf{D}) = \iint_\sigma W\left[I_1(w)\right] ds - \oint_\gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{k}(w - Z)\, dl ,$$

причем в (6) остается только первое уравнение.

4. Описание программного комплекса

Пакет программ, реализующий алгоритм анализа напряженно-деформированного состояния амортизатора сдвига, обладает следующими особенностями. Он представляет собой комбинацию символьных и численных методов, которые дополняют друг друга. Программы пакета написаны в среде MAPLE и организованы в виде библиотеки пользователя BF.m. Символьный пакет позволяет создать программу численного интегрирования для функций с параметрами, значения которых не заданы. Поэтому появляется возможность вычислять интегралы в функционале только один раз. То есть, если неизвестные функции аппроксимируются заданными функциями вида $z_k = z_k\left(x, y, c_{k_1}, c_{k_2}, \dots c_{k_n}\right)$, где c_{k_j} не заданы, то после численного интегрирования функционал превращается в функцию лишь числовых переменных $F\left(c_{k_1}, c_{k_2}, \dots c_{k_n}\right)$, необходимым условием стационарности которой служит система:

$$\frac{\partial F}{\partial c_{k_j}} = 0 . \tag{9}$$

Этот подход есть некоторая альтернатива методу конечных элементов, в котором одноразовость интегрирования достигается за счет разбиения области на элементы простой конфигурации и примитивизации искомых функций на каждом элементе, что позволяет интегрировать вручную, получать аналитические выражения для аддитивного функционала на элементах и закладывать их в программу. В рамках предлагаемого подхода искомая функция аппроксимируется сразу во всей области, что снижает количество неизвестных на порядки, хотя и лишает возможности локальной адаптации такой аппроксимации к особенностям распределения искомых полей. Вследствие одноразовости численного интегрирования при совершении его можно обходиться простейшими формулами, поскольку нет технических препятствий для значительного увеличения числа узлов квадратурной формулы. В программном комплексе использована квадратурная формула прямоугольников с экстраполяцией по Ричардсону [11]. Процессы интегрирования по границе области и внутри области не связаны друг с другом, так же, как и количество узлов в квадратурных формулах для границы и области.

При вычислении функционала пакет предусматривает аппроксимацию продольного смещения и компонент тензора Пиола–Кирхгофа многочленами разных степеней. Но, поскольку напряжения в конечном итоге находятся по продольному смещению, то аппроксимация компонент напряжения и смещения проводится многочленами одинакового порядка. Аналитический вид приближенного решения выбран из-за простоты апостериорной оценки качества решения. Вычисляются невязки, которые дают уравнения (6) и (7) после подстановки в них полученного решения. Используются нормы:

$$\left[\iint_\sigma \overset{0}{\nabla} \cdot \left(2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \overset{0}{\nabla} w\right) w ds\right]^{1/2} \text{ — энергетическая,}$$

$$\max_{t \in l} \left| w(t) - Z(t) \right| \text{ — равномерная.}$$

Для численных методов типа метода конечных элементов, дающих решение в виде таблиц, вопрос оценки апостериорной ошибки гораздо сложнее, и в настоящее время он интенсивно разрабатывается только для линейных задач [12].

Система уравнений (9) — нелинейная. Одним из методов решения таких систем является метод наименьших квадратов, гарантирующий вещественность полученных корней, а в MAPLE есть очень эффективный модуль LSSolve, предназначенный для решения систем нелинейных уравнений методом наименьших квадратов.

Еще одна особенность пакета, позволяющая исследовать амортизаторы с весьма сложным поперечным сечением резинового элемента, заключается в описании области интегрирования σ с помощью ее R-предиката — функции $\omega(x, y)$, обладающей свойством:

$$\omega(x,y)>0 \quad (x,y)\in\sigma; \qquad \omega(x,y)<0 \quad (x,y)\notin\sigma; \qquad \omega(x,y)=0 \quad (x,y)\in\gamma .$$

Предикат области строится из R-предикатов элементарных подобластей с помощью R-функции [13], задающей связь элементарных областей с заданной. На основании R-предиката строится индикатор области интегрирования:

$$ind=\begin{cases}1, & \omega(x,y)\ge 0,\\ 0, & \omega(x,y)<0,\end{cases}$$

который используется при вычислении двойного интеграла по области σ. Двойной интеграл находится по прямоугольной области, содержащей σ, но подынтегральная функция умножается на индикатор:

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\int\limits_c^d ind\; f(x,y)\,dxdy .$$

Программные модули, входящие в библиотеку пользователя BF.m, и их функции приведены в таблице 1. Ввод в модули необходимой информации производится в интерактивном режиме.

Таблица 1. Программные модули, входящие в пользовательскую библиотеку BF.m, и их функции

Номер модуля	Обозначение	Описание возможностей
1	GrCon( )	Программа предусматривает: − ввод элементов граничного контура; − вычисление предиката области, ограниченной контуром; − визуализацию области; − ввод граничных условий; − формирование части структуры перемещений, удовлетворяющей граничным условиям.
2	Structure( )	Программа вводит информацию о варьируемой части структуры с учетом симметрии задачи.
3	Fun( )	Программа задает потенциал энергии деформации и вычисляет его.
4	EqvSol( )	Программа строит систему уравнений и решает ее методом наименьших квадратов.

5. Результаты тестирования

Тестирование проводилось с помощью известного из [5] точного решения для амортизатора сдвига с цилиндрической резиновой втулкой, расположенной между двумя коаксиальными металлическими обоймами. Потенциал энергии деформации выбирался в форме Трелоара. Отношение радиуса внешней обоймы к радиусу внутренней составляло 2. Отнесенное к радиусу внутренней обоймы осевое смещение внешней обоймы относительно внутренней обоймы равнялось 1. Модуль сдвига полагался равным 10 МПа. Сравнивались поля смещений w, поля напряжений D_{xz}, D_{yz} и Q — модули главных векторов на обоймах. В качестве мер относительных ошибок брались:

$$\delta w=100\frac{\|w-w^{\text{т}}\|}{\|w\|},\qquad \delta D_{xz}=100\frac{\|D_{xz}-D_{xz}^{\text{т}}\|}{\|D_{xz}\|},\qquad \delta D_{yz}=100\frac{\|D_{yz}-D_{yz}^{\text{т}}\|}{\|D_{yz}\|},$$

$$\delta Q=100\cdot\frac{|Q_{\text{вн}}-Q_{\text{вн}}^{\text{т}}|}{Q_{\text{вн}}},\qquad \delta\Delta Q=100\cdot\frac{|Q_{\text{вн}}-Q_{\text{внут}}|}{Q_{\text{вн}}}.$$

Здесь: $\|u(x,y)\|=\max\limits_{(x,y)\in\sigma}|u(x,y)|$ — равномерная по сечению втулки норма; буквой «т» отмечены теоретические значения, символами «вн» и «внут» — значения главного вектора на внешней и внутренней обоймах. Степени аппроксимирующих многочленов для перемещений выбирались на единицу больше степеней соответствующих многочленов для напряжений (вообще говоря, у разных потенциалов энергии деформации это соотношение может варьироваться). Вычисления проводились на ПК Intel(R) Core(TM) Quad CPU Q6600 @ 2.40 GHz 2.0 Gb. Результаты тестирования приведены в таблице 2 и показывают, что выбором соответствующих параметров можно добиться весьма малой погрешности в распределении напряжений и перемещений.

Таблица 2. Результаты тестирования

Число узлов на контуре	Число узлов в области	Степень многочлена для w	Время вычисления функционала [c]	Время вычисления системы уравнений [c]	Время решения системы уравнений [c]	δw [%]	δD_{xz} [%]	δD_{yz} [%]	δQ [%]	$\delta \Delta Q$ [%]
2	100	4	0,000	0,000	0,000	87,1	70,6	71,1	27,9	49,1
8	100	4	0,000	0,015	0,000	5,39	37,8	37,5	13,9	17,6
16	100	4	0,000	0,016	0,000	5,39	37,4	37,5	13,9	17,6
24	100	4	0,000	0,031	0,000	5,39	37,4	37,5	13,9	17,6
24	400	4	0,046	0,063	0,000	4,66	34,2	34,3	22,0	6,49
24	900	4	0109	0,094	0,000	4,57	33,8	33,9	23,0	5,04
24	1600	4	0,172	0,141	0,000	4,43	33,1	33,3	24,6	2,37
48	1600	4	0,229	0,187	0,000	4,43	33,2	33,3	24,6	2,37
48	1600	6	0,297	0,968	0,000	1,00	13,6	13,7	11,2	20,9
48	1600	8	0,797	2,203	0,000	1,13	8,26	8,30	1,11	8,52
48	3600	8	0,917	4,266	0,000	0,64	7,47	5,61	2,59	9,28
48	4900	8	1,281	6,172	0,000	0,41	5,57	5,66	0,19	5,10
48	6400	8	1,547	7,203	0,000	0,51	5,85	5,89	0,15	5,40
48	4900	10	1,841	13,26	0,015	0,39	4,82	3,81	0,101	8,09
96	4900	10	2,750	15,59	0,015	0,39	5,19	4,10	0,009	8,47
96	6400	10	3,120	20,55	0,015	0,37	5,12	4,37	0,039	8,35
96	8100	10	3,844	29,81	0,015	0,26	3,50	3,26	0,190	4,27
96	10000	10	4,906	37,77	0,016	0,37	4,76	4,53	0,053	4,30

Влияние числа узлов на границе слабо сказывается на точности решения. При фиксированной степени аппроксимирующего многочлена увеличение числа узлов внутри области улучшает точность решения лишь до определенного предела. Далее наступает ухудшение, что характерно для аппроксимаций, лишенных возможности локальной адаптации.

Литература

1. *Грошева М.В., Ефимов Г.Б. Самсонов В.А*. История использования аналитических вычислений в задачах механики. – М.: Изд-во МГУ, 2005. – 87 с.
2. *Волкова В.Н., Денисов А.А*. Основы теории систем и системного анализа. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. – 512 с.
3. *Жуков Б.А*. Нелинейное взаимодействие конечного продольного сдвига и конечного кручения втулки из резиноподобного материала // МТТ. – 2015. – № 3. – С. 127-135. (English version DOI).
4. *Knowles J.K.* On finite anti-plane shear for incompressible elastic materials // J. Austral. Math. Soc. – 1976. – Vol. B19, no. 4. – P. 400-415. DOI
5. *Лурье А.И*. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
6. *Knowles J.K.* The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids // Int. J. Fracture. – 1977. – Vol. 13, no. 5. – P. 611-639. DOI
7. *Horgan C.O., Saccomandi G.* Superposition of generalized plane strain on anti-plane shear deformations in isotropic incompressible hyperelastic materials // J. Elasticity. – 2003. – Vol. 73, no. 1. – P. 221-235. DOI
8. *Gent A.N.* A new constitutive relation for rubber // Rubber Chem. Technol. – 1996. – Vol. 69. – P. 59-61. DOI
9. *Arruda E.M., Boyce M.C.* A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – Vol. 41, no. 2. – P. 389-412. DOI
10. *Зубов Л.М*. Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. – 1971. – Т. 35, № 3. – С. 406-410.
11. *Мак-Кракен Д., Дорн У*. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. – М.: Мир, 1977. – 584 с.
12. *Фролов М.Е.* О реализации контроля точности решений плоских задач теории упругости при помощи смешанных конечных элементов // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 73-81. DOI
13. *Рвачев В.Л., Шейко Т.И.* Введение в теорию *R*-функций // Проблемы машиностроения. – 2001. – Т. 4, № 1-2. – С. 46-58.

References

1. Grosheva M.V., Efimov G.B., Samsonov V.A. *Istoriya ispol'zovaniya analiticheskikh vychislenij v zadachakh mekhaniki* [The history of analytical calculation applications in mechanics]. Moscow: Moscow State University, 2005. 85 p.
2. Volkova V.N., Denisov A.A. *Osnovy teorii sistem i sistemnogo analiza* [Fundamentals of system theory and system analysis]. St. Petersburg: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 2001. 512 c.
3. Zhukov B.A. Nonlinear interaction of finite longitudinal shear with finite torsion of a rubber-like bushing. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 337-344. DOI
4. Knowles J.K. On finite anti - plan chare for incompressible elastic materials. *J. Austral. Math. Soc.*, 1976, vol. B19, no. 4, pp. 400-415. DOI
5. Lurie A.I. *Non-linear theory of elasticity*. Amsterdam: North Holland, 1990.
6. Knowles J.K. The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids. *Int. J. Fracture*, 1977, vol. 13, no. 5, pp. 611-639. DOI
7. Horgan C.O., Saccomandi G. Superposition of generalized plane strain on anti-plane shear deformations in isotropic incompressible hyperelastic materials. *J. Elasticity*, 2003, vol. 73, no. 1, pp. 221-235. DOI
8. Gent A.N. A new constitutive relation for rubber. *Rubber Chem. Technol.*, 1996, vol. 69, pp. 59-61. DOI
9. Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 41, no. 2, pp. 389-412. DOI
10. Zubov L.M. Variatsionnye printsipy nelinejnoj teorii uprugosti [Variational principles of the nonlinear theory of elasticity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – J. Appl. Math. Mech.*, 1971, vol. 35, no. 3, pp. 406-410.
11. McCracken D.D., Dorn W.S. Numerical methods and FORTRAN programming. Wiley, 1964. 457 p.
12. Frolov M. E. Implementation of error control for solving plane problems in linear elasticity by mixed finite elements. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 73-81. DOI
13. Rvachev V.L., Sheiko T.I. Vvedenie v teoriyu *R*-funktsij [An introduction to the theory of *R*-functions]. *Problemy mashinostroeniya – Problems of mechanical engineering*, 2001, vol. 4, no. 1-2, pp. 46-58.

Поступила в редакцию 03.03.2016; опубликована в электронном виде 30.06.2016

Сведения об авторах

Андреева Юлия Юрьевна, ст. преп., Волгоградский государственный технический университет (ВолгГТУ), 400005, Волгоград, пр. Ленина, д. 28; e-mail: ajj308@mail.ru

Жуков Борис Александрович, дтн, проф., ВолгГТУ; e-mail: zhukov.b.a@gmail.com