

DOI: [10.7242/1999-6691/2016.9.2.18](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.18)
УДК 519.63, 532.5

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ МЕДЛЕННОГО ТЕЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ

В.В. Пак

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток, Российская Федерация

Разработана двухмерная комплексная численная модель эволюции медленного течения в расчетной области, состоящей из толстого вязкого слоя, покрытого тонким многослойным вязким пластом. Модель соединяет в себе уравнения Стокса для описания течения в слое с уравнениями Рейнольдса в пласте. Найдено аналитическое решение и проведено исследование эволюции поверхности и границ раздела слоев на малых и больших временах. Методом асимптотических разложений получено обыкновенное дифференциальное уравнение, включающее в себя смещения границ пласта и скорости на границе сопряжения пласта с подстилающим слоем. Это асимптотическое уравнение применяется далее как внутреннее граничное условие, связывающее уравнения Стокса с уравнениями Рейнольдса. С его помощью построена система квазилинейных уравнений параболического типа для описания эволюции границ раздела пласта. Численная реализация осуществлена модифицированным методом конечных элементов в сочетании с методом проекции градиента. Это позволило значительно сократить вычислительные затраты по сравнению с применением большинства ранее известных комплексных моделей. Численно исследованы поля скоростей и положения границ пласта на различных стадиях течения. Сопоставление численных результатов с аналитическими показало, что предлагаемая комплексная модель предоставляет возможность расчета эволюции неоднородного течения на больших временах с хорошей точностью и без существенных вычислительных затрат. Представлены результаты численного решения эволюционной задачи в случае значительных отклонений границ слоев пласта от начального положения. Показан пример возможного приложения модельных результатов в тектонике и геофизике.

Ключевые слова: комплексная модель, уравнения Стокса, уравнения Рейнольдса, метод малого параметра, метод конечных элементов, метод проекции градиента

NUMERICAL STUDY OF THE LONG-TIME EVOLUTION FOR INHOMOGENEOUS CREEPING FLOW

V.V. Pak

Il'ichev Pacific Oceanological Institute FEB RAS, Vladivostok, Russian Federation

A two-dimensional numerical coupled model is developed to describe creeping flow in a computational domain that consists of thick viscous layer overlaid by a thin multi-layered viscous sheet. The model couples the Stokes equations describing the flow in the layer and the Reynolds equations describing the flow in the sheet. We obtain an analytical solution and study the short- and long-time evolution of the surface and interfaces between layers. We investigate the long-time behavior of the flow in the sheet using the method of asymptotic expansions and derive an ordinary differential equation with respect to sheet boundary displacements and velocities at the interface between the sheet and layer. Applying the obtained equation as an internal boundary condition, we couple the Stokes and Reynolds equations. Based on this condition, the system of quasi-linear parabolic equations describing the long-time evolution of sheet boundaries has been developed. Numerical implementation is fulfilled by the modified finite element method combined with the projection gradient method. The proposed model enables different-type hydrodynamic equations to be coupled without any iterative improvements. This reduces significantly computational costs in comparison with the available coupled models. Numerical simulation of the velocity field and the boundary topography at different stages of evolution is fulfilled. Comparison between the analytical and numerical results confirms that the developed coupled model enables simulation of the inhomogeneous flow with a good accuracy at low computational cost. We investigate the evolution of the flow with large displacement of layer boundaries. Some possible applications in tectonics and geophysics of these model results are outlined.

Key words: coupled model, Stokes equations, Reynolds equations, small parameter method, finite element method

1. Введение

В настоящее время для описания эволюции сложных течений вязкой жидкости, имеющих существенно отличающиеся пространственные и временные масштабы, широко практикуются так называемые комплексные (совместные) модели (“coupling models” в англоязычной литературе), соединяющие в себе упрощенные уравнения в погранслоном приближении и более общие уравнения вязкой жидкости [1]. Для численного решения систем эволюционных уравнений, составляющих модель, применяются традиционные методы (например, метод Рунге–Кутты), в которых используются разномасштабные по времени сетки, и, при возможности, осуществляется расщепление по физическим процессам [2].

Характерной особенностью рассматриваемых течений является наличие различных режимов эволюции: резкие изменения скоростей на относительно малом интервале, в так называемом «временном пограничном слое», и медленная стадия, когда за длительный промежуток времени происходят незначительные изменения. В этом случае система уравнений, моделирующая процесс, оказывается жесткой, и при ее численном решении обычными методами возникают существенные ограничения,

а именно, шаг интегрирования по времени должен оставаться малым на всем протяжении счета. Попытки уменьшить время вычисления на медленной фазе путем увеличения шага интегрирования приводят к резкому возрастанию погрешности и вообще к потере устойчивости вычислительного процесса. Таким образом, возникает необходимость создания численных методов, которые обеспечивали бы правильное поведение решения в «пограничном слое», а также возможно точнее воспроизводили бы его на участке интегрирования за пределами этого слоя. В настоящее время специальные численные методы решения жестких систем разработаны только для обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Однако применение таких методов для моделирования рассматриваемых сложных течений сопряжено со значительным ростом вычислительных затрат [4].

При использовании общих методов численного решения нестационарных систем уравнений гидродинамики [5] малый шаг дискретизации по времени еще не гарантирует хорошую вычислительную точность. Как показано в работе [6], при постановке естественных условий непрерывности поля скоростей и напряжений на границе сопряжения разнородных уравнений на больших временах поле скоростей определяется с большой погрешностью.

Однако при численном моделировании в некоторых практических приложениях (например, в тектонике и геофизике) поведение решения во «временном пограничном слое» не играет существенной роли, а гораздо более важным является изучение особенностей течения на медленной фазе. Поэтому важное значение приобретает разработка численных алгоритмов, которые позволяли бы достаточно точно моделировать решение на больших временах и производить расчет с большим шагом по времени для сокращения чрезмерных вычислительных затрат.

В настоящей работе построена комплексная численная модель, в которой для описания течения в толстом однородном слое применяются уравнения Стокса, а в тонком многослойном пласте — уравнения Рейнольдса. Методом асимптотических разложений получено уравнение, связывающее смещения границ слоев многослойного пласта со скоростями на его нижней границе. С помощью этого уравнения, как дополнительного условия, построена система квазилинейных параболических уравнений, представляющая эволюцию течения на больших временах. Найдено аналитическое решение, и исследуется характер течения в приповерхностной области на малых и больших временах. Проводится сравнение численного и аналитического решений. Показан пример возможного приложения модельных результатов в тектонике и геофизике.

2. Система уравнений

Пусть расчетная область представляет собой относительно толстый слой однородной вязкой несжимаемой жидкости, на поверхности которого расположен тонкий пласт, состоящий из N вязких слоев. Обозначим через Z_k , где $k = \overline{0, N}$, границы многослойного пласта. Задаются скорости движения жидкости на нижней границе расчетной области.

Для описания движения вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести применяем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} u_{1,t} + u_1 u_{1,1} + u_2 u_{1,2} &= -p_{,1} + \mu_i (u_{1,11} + u_{1,22}), \\ u_{2,t} + u_1 u_{2,1} + u_2 u_{2,2} &= -p_{,2} + \mu_i (u_{2,11} + u_{2,22}) - \rho_i g, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_i и μ_i — плотности и вязкости слоев (постоянные внутри слоев); u_k — компоненты скорости; p — давление; g — ускорение силы тяжести; нижний индекс « t » обозначает частную производную функции по времени, а « k » — частную производную функции по координате x_k . Поле скоростей также должно удовлетворять уравнению неразрывности:

$$u_{1,1} + u_{2,2} = 0. \quad (2)$$

Приведем уравнения к безразмерному виду:

$$x_1 = L x'_1, \quad x_2 = L x'_2, \quad \mu_i = \mu_0 \mu'_i, \quad \rho_i = \rho_0 \rho'_i, \quad u_1 = u_0 u'_1, \quad u_2 = u_0 u'_2, \quad p = p_0 p',$$

где L , μ_0 , ρ_0 , $p_0 = \rho_0 g L$ и $t_0 = L/u_0$ — это, соответственно, масштабы длины, вязкости, плотности, давления, скорости и времени (в дальнейшем, для удобства, штрихи опускаются).

Вязкие течения в земной коре и мантии являются медленными с пренебрежимо малым числом Рейнольдса [1, 7], поэтому в уравнениях (1) инерционными и конвективными членами пренебрегаем.

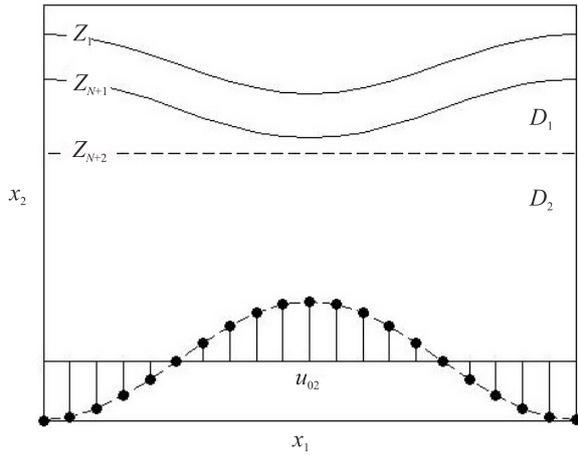


Рис. 1. Общая схема расчетной области: сплошные линии – границы вязкого пласта, штриховая линия – фиктивная граница; отрезки с маркерами изображают эпюру скорости движения нижней границы

Так как горизонтальный размер многослойного пласта существенно больше вертикального и горизонтальные скорости течения в нем значительно больше вертикальных, для описания движения жидкости можно применить упрощенные уравнения вязкой жидкости в длинноволновом приближении (уравнения Рейнольдса) [4]. Однако течение жидкости имеет субгоризонтальный характер не только в самом пласте, но и в окрестности верхней границы подстилающего его вязкого слоя. Поэтому поставим ниже границы Z_{N+1} (на расстоянии порядка толщины пласта) фиктивную горизонтальную границу Z_{N+2} , которая разделит расчетную область на верхнюю — D_1 , и нижнюю — D_2 , подобласти (см. общую схему на Рис. 1).

Упрощенные уравнения вязкой жидкости в длинноволновом приближении получим из (1) при следующих предположениях: характерный горизонтальный масштаб возмущений много больше вертикального; негидростатические напряжения существенно меньше гидростатического давления; плотность не убывает с глубиной:

$$\begin{aligned} p_{,1} f &= \mu_i u_{1,22}, \\ p_{,2} &= -\rho_i \quad (i = \overline{1, N+1}, \quad f = \rho_0 g L^2 / (\mu_0 u_0)), \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) поле скоростей удовлетворяет уравнению неразрывности (2) и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} p &= 0, \quad \mu_1 u_{1,2} = 0, \quad z = Z_1, \\ [u_1]_+^+ &= 0, \quad [p]_-^+ = 0, \quad [\mu_1 u_{1,2}]_-^+ = 0, \quad z = Z_i \quad (i = \overline{1, N+2}). \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме этого на подвижных границах раздела пласта заданы кинематические условия отсутствия перетока массы

$$u_2(x_1, Z_i, t) - Z_{i,1} u_2(x_1, Z_i, t) - Z_{i,t} = 0 \quad (i = \overline{1, N+1}) \quad (5)$$

и начальное положение границ слоев пласта

$$Z_i(x_1, 0) = Z_{i0} \quad (i = \overline{1, N+1}). \quad (6)$$

Используя уравнение неразрывности (2), преобразуем условие (5) следующим образом:

$$Z_{i,t} = -S(x_1, Z_i)_{,1} - (u_1(x_1, Z_{N+2})(Z_i - Z_{N+2}))_{,1} + u_2(x_1, Z_{N+2}) \quad (i = \overline{1, N+1}). \quad (7)$$

где
$$S(x_1, x_2) = \int_{Z_{N+2}}^{x_2} (u_1(x_1, z) - u_1(x_1, Z_{N+2})) dz \quad (i = \overline{1, N+1}).$$

На боковых границах области D_1 также поставим условия отсутствия перетока массы:

$$Z_{i,1} = 0. \quad (8)$$

Решая уравнения (3) с учетом условий (4), определим значения u_1 , u_2 и p на границах слоев. После подстановки их в (7) и некоторых преобразований получим уравнения относительно границ слоев Z_i :

$$Z_{i,t} = \left(\left(A_{i1} Z_{1,1} + \sum_{k=2}^{N+1} A_{ik} (\rho_k - \rho_{k-1}) Z_{k,1} \right) - u_1(x_1, Z_{N+2})(Z_i - Z_{N+2}) \right)_{,1} + u_2(x_1, Z_{N+2}) \quad (i = \overline{1, N+1}), \quad (9)$$

где $A_{ji} = A_{ij} = f \sum_{l=i}^{N+1} h_l \sum_{m=j}^{N+1} h_m \sum_{k=j}^{N+1} \frac{1}{\mu_k} \frac{h_k}{1 + \delta_{ik} + \delta_{ij}}$ ($i \leq j$, $i, j = \overline{1, N+1}$), $h_i = Z_i - Z_{i+1}$ ($i = \overline{1, N+1}$), δ_{ij} — символ Кронекера.

Таким образом, эволюция поверхности и границ раздела слоев описывается системой нелинейных уравнений параболического типа (9) с граничными условиями (6), (8).

Для моделирования течения в подобласти D_2 воспользуемся уравнениями (1) без инерционных и конвективных членов (уравнениями Стокса):

$$\begin{aligned} -p_{,1} f + \mu_{N+1} (u_{1,11} + u_{1,22}) &= 0, \\ -p_{,2} f + \mu_{N+1} (u_{2,11} + u_{2,22}) - \rho_{N+1} f &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Поле скоростей из (10) также удовлетворяет уравнению неразрывности (2).

На боковых границах расчетной области зададим условия гладкой неподвижной стенки

$$u_1 = 0, \quad \mu_{N+1} (u_{1,2} + u_{2,1}) = 0, \quad (11)$$

а на нижней границе — скорости

$$u_1 = u_{01}, \quad u_2 = u_{02}. \quad (12)$$

Исходя из (4), условия сопряжения на границе $z = Z_{N+2}$ приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_{N+1} (u_{1,2} + u_{2,1}) \Big|_{Z_{N+2}} &= -f \sum_{i=1}^{N+1} \left(\rho_i Z_{i,1} + \sum_{k=2}^i (\rho_k - \rho_{k-1}) Z_{k,1} \right) (Z_i - Z_{i+1}), \\ -p + 2\mu_{N+1} u_{2,2} \Big|_{Z_{N+2}} &= -f \sum_{i=1}^N \rho_i (Z_i - Z_{i+1}). \end{aligned} \quad (13)$$

3. Аналитическое исследование

Для аналитического исследования выберем модель с однослойным пластом, характеризуемую следующими масштабами и значениями безразмерных параметров:

– $L = 400$ км; $\rho_0 = 3000$ кг/м³; $g = 9,81$ м/с²; $\mu_0 = 10^{22}$ Па·с; $u_0 = 0,01$ м/год $\approx 3,17 \cdot 10^{-10}$ м/с [7] (тогда $t_0 = 4 \cdot 10^7$ лет $\approx 1,26 \cdot 10^{15}$ с, $f \approx 494,989$);

– положения границ в начальный момент времени $Z_1 = 1$, $Z_2 = 0,9$;

– плотности слоев $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 1,1$;

– вязкости слоев $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$;

– скорости на нижней границе $u_{01} = 0$, $u_{02} = -0,002 \cos x_1$.

С помощью преобразования Фурье по x_1 и преобразования Лапласа по t получим аналитическое решение при малых возмущениях границ слоев [8].

$$\begin{aligned} U_1 &= w_0 \left((B_{11} \exp(-\lambda_1 t) + B_{12} \exp(-\lambda_2 t)) + B_{13} \right) \sin x_1, \\ U_2 &= w_0 \left((B_{21} \exp(-\lambda_1 t) + B_{22} \exp(-\lambda_2 t)) + B_{23} \right) \cos x_1, \end{aligned} \quad (14)$$

где коэффициенты $\lambda_i > 0$ и B_{ij} вычисляются через толщины слоев, вязкости и плотности, причем $\lambda_1 \gg \lambda_2$.

Отклонения границ слоев от начального положения найдем по формулам:

$$\Delta Z_i = w_0 \left(\sum_{j=1}^2 \frac{B_{ij}}{\lambda_j} (1 - \exp(-\lambda_j t)) + B_{i3} \right) \cos x_i \quad (i = \overline{1, 2}). \quad (15)$$

Как видно из результатов, представленных на рисунке 2, на начальной стадии (при $t = 0,01$) границы Z_1 и Z_2 смещаются в одном направлении, а на больших временах (при $t = 4$) они движутся противоположно друг другу. На рисунке 3 показаны соответствующие этим смещениям поля скоростей. Для их наглядного представления используется функция тока, которая определяется из (7). Сопоставление рисунков 3а и 3б показывает, что существенное изменение поля скоростей происходит только в небольшой окрестности верхней границы Z_1 , а в нижней части расчетной области течение почти стационарное.

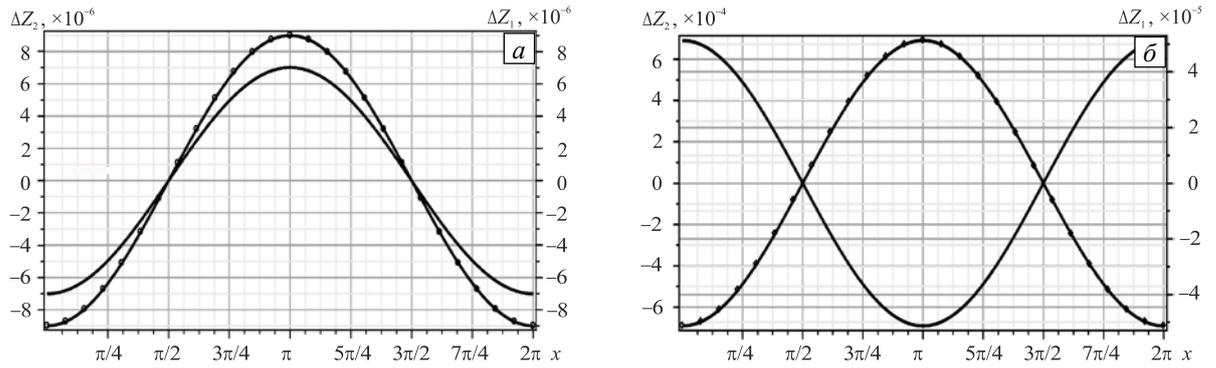


Рис. 2. Смещение границ слоев на малых и больших временах t : 0,01 (а) и 4 (б); сплошные линии – граница Z_1 , линии с маркерами – граница Z_2

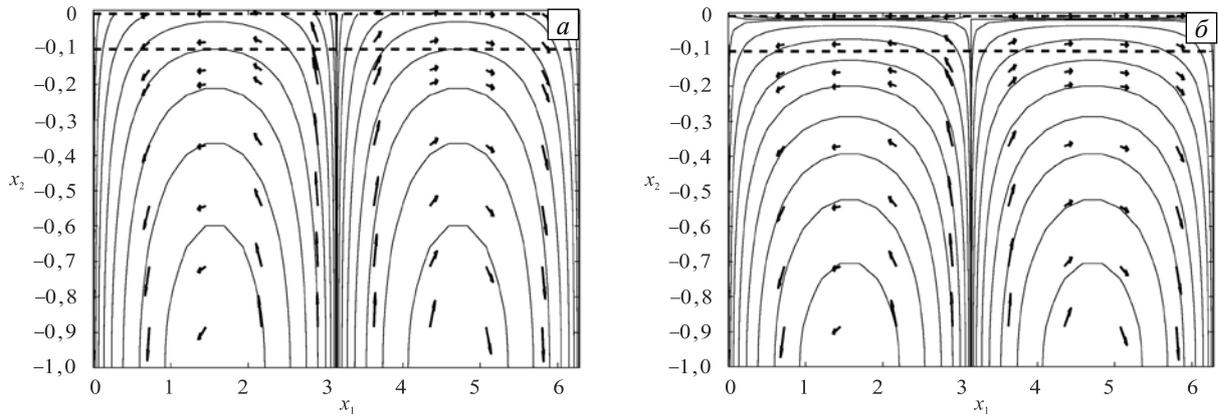


Рис. 3. Изолинии функции тока (сплошные линии) на малых и больших временах t : 0,01 (а) и 4 (б); стрелками показаны направления вектора скорости, штриховыми линиями – границы слоев

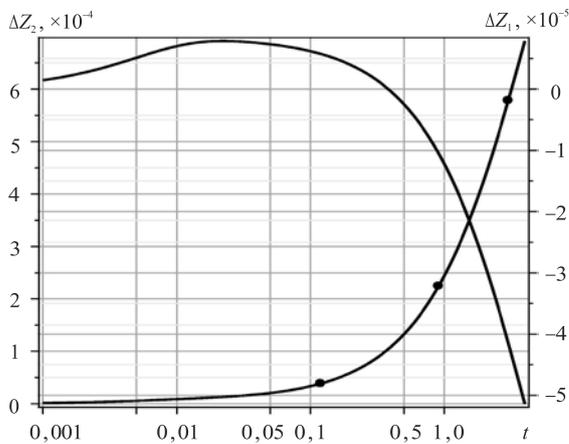


Рис. 4. Смещения границ в точке $x_1 = \pi$ относительно начального положения на малых и больших временах: сплошная линия – смещение границы Z_1 , сплошная линия с маркерами – смещение границы Z_2

На рисунке 4 показана эволюция смещений границ относительно начального положения в точке $x_1 = \pi$, где их величины максимальны. Для того чтобы наглядно изобразить на одном графике эволюцию движения границ полностью, по оси времени использовался логарифмический масштаб (то есть деления на оси t соответствуют значениям $\lg t$). По результатам видно, что характерной особенностью эволюции течения является наличие двух различных режимов: подъем обеих границ Z_1 и Z_2 за относительно короткий начальный промежуток (за так называемый «временной пограничный слой»), переходящий в медленную стадию, на которой происходят нисходящее движение верхней границы Z_1 и восходящее движение границы Z_2 .

4. Численная модель

Численное решение находилось следующим образом. Исходя из положения поверхности и границ слоев в начальный момент времени, методом конечных элементов вычислялось поле скоростей в нижней подобласти D_2 с помощью уравнений (2), (10) и граничных условий (11)–(13). Использовалась вариационная формулировка уравнений (2), (10). Для этого (10) скалярно умножались на соленоидальное поле v_i и преобразовывались по формуле Остроградского–Гаусса с учетом граничных условий (12). Получалось следующее вариационное уравнение:

$$J(u_i, v_i) = C(u_i, v_i) - F_1(v_i) - F_2(v_i) = 0, \quad (16)$$

где

$$C(u_i, v_i) = \iint_D \mu(u_{i,j} + u_{j,i})(v_{i,j} + v_{j,i}) dx \quad (i = \overline{1, 2}),$$

$$F_1(v_i) = -\iint_D \rho g v_2 dx, \quad (17)$$

$$F_2(v_i) = -\int_{Z_{N+2}} \sum_{k=1}^{N+1} \left(\rho_1 Z_{k,j} + \sum_{l=2}^k (\rho_l - \rho_{l-1}) Z_{l,j} \right) (Z_k - Z_{k+1}) v_1 d\Gamma - \int_{Z_{N+2}} \sum_{k=1}^{N+1} \rho_k (Z_k - Z_{k+1}) v_2 d\Gamma.$$

Для численного решения (16), (17) применялся модифицированный метод конечных элементов в сочетании с методом проекции градиента (подробное описание метода решения приводится в работе [6]). Затем по известным значениям скоростей на границе сопряжения Z_{N+2} определялось поле скоростей в верхней подобласти D_1 . После этого устанавливались положения границ слоев на следующем временном слое путем решения системы разностных уравнений, приведенной ниже.

Обозначим x_1^l ($l = \overline{1, L}$) и t^m ($m = \overline{1, M}$) — равномерные расчетные сетки для координаты x_1 и времени t . Тогда неявная схема для уравнений (9) с граничными условиями (8) примет следующий вид [5]:

$$\begin{aligned} \frac{Z_i^{l,m+1} - Z_i^{l,m}}{\Delta t} = & \frac{1}{\Delta x_1} \left(\frac{A_{i1}^{l,m+1} + A_{i1}^{l+1,m+1}}{2} \frac{Z_1^{l+1,m+1} - Z_1^{l,m+1}}{\Delta x_1} - \frac{A_{i1}^{l-1,m+1} + A_{i1}^{l,m+1}}{2} \frac{Z_1^{l,m+1} - Z_1^{l-1,m+1}}{\Delta x_1} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=2}^{N+1} (\rho_k - \rho_{k-1}) \left(\frac{A_{ik}^{l,m+1} + A_{ik}^{l+1,m+1}}{2} \frac{Z_k^{l+1,m+1} - Z_k^{l,m+1}}{\Delta x_1} - \frac{A_{ik}^{l-1,m+1} + A_{ik}^{l,m+1}}{2} \frac{Z_k^{l,m+1} - Z_k^{l-1,m+1}}{\Delta x_1} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{u_1^{l+1,m} (Z_i^{l+1,m+1} - Z_{N+2}^{l+1,m+1}) - u_1^{l-1,m} (Z_i^{l-1,m+1} - Z_{N+2}^{l-1,m+1})}{2} \right) + u_2^{l,m} \quad (i = \overline{1, N+1}, \quad l = \overline{2, L-1}), \end{aligned} \quad (18)$$

где $Z_i^{l,m}$, $u_1^{l,m}$ и $u_2^{l,m}$ — значения сеточных функций, аппроксимирующих, соответственно, Z_i , u_1 и u_2 в узлах (x_1^l, t^m) ; $A_{ik}^{l,m} = A_{ik}|_{Z_i=Z_i^{l,m}}$; Δx_1 и Δt — шаги расчетных сеток по x_1 и t . Значения сеточных функций в фиктивных узлах x_1^l ($l = 0, L+1$) дополнялись следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_i^{0,m} &= Z_i^{2,m}, \quad u_1^{0,m} = -u_1^{2,m}, \quad u_2^{0,m} = u_2^{2,m}, \\ Z_i^{L+1,m} &= Z_i^{L-1,m}, \quad u_1^{L+1,m} = -u_1^{L-1,m}, \quad u_2^{L+1,m} = u_2^{L-1,m} \quad (m = \overline{1, M}). \end{aligned}$$

Так как система уравнений (18) нелинейна относительно $Z_i^{l,m+1}$, для нахождения ее решения использовался метод итераций. В качестве начальных приближений для коэффициентов $A_{ik}^{l,m+1}$ принимались их значения на предыдущем шаге по времени — $A_{ik}^{l,m}$, которые подставлялись в (18), и из решения полученной линеаризованной системы определялось новое приближение для $Z_i^{l,m+1}$. По этим значениям вычислялись значения $A_{ik}^{l,m+1}$, которые снова подставлялись в (18), и процесс совершался вновь.

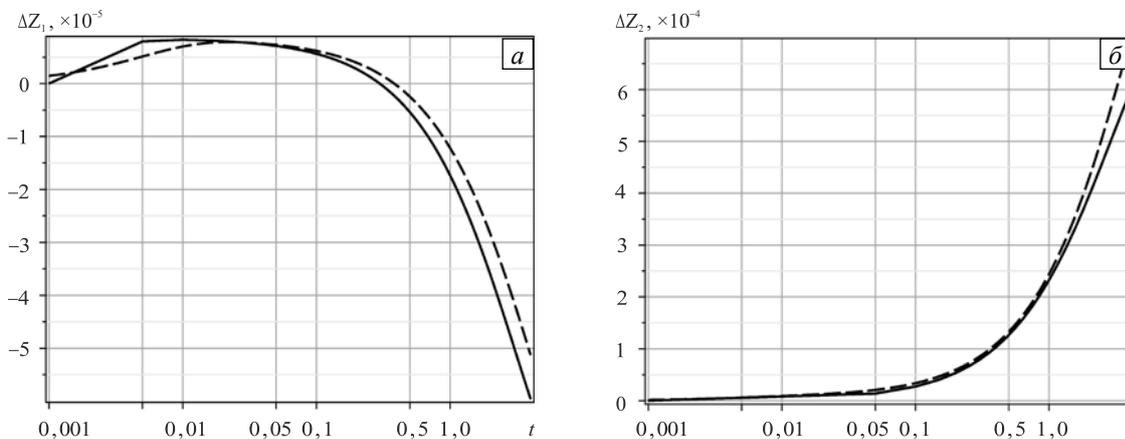


Рис. 5. Смещения границ Z_1 (а) и Z_2 (б) в точке $x_1 = \pi$ на малых и больших временах; сплошная линия – точное аналитическое решение, штриховая линия — численное решение

Далее повторялась вся процедура.

Проведено сравнение результатов численного решения при малых отклонениях границ слоев от начального положения с аналитическими (14), (15). На рисунке 5 представлены смещения границ слоев относительно их начального положения в точке $x_1 = \pi$, где погрешность решения максимальная. Численная схема построена на равномерной по координатам расчетной сетке с шагами $\Delta x_1 = 2\pi/14$ и $\Delta x_2 = 0,1$. Шаг по времени Δt задавался равным 0,005. Дальнейшее увеличение Δt приводило к значительным искажениям данных численного расчета. Таким образом, на реализацию эволюционной задачи до момента времени $t = 4$ потребовалось 800 итераций. Относительные погрешности решения на границах слоев составили: $\eta(Z_1) \approx 16,2\%$ и $\eta(Z_2) \approx 13\%$.

На рисунке 6а показаны изолинии функции тока, полученной из численного расчета в момент времени $t = 4$. Относительная погрешность для функции тока примерно равна $\eta(S) \approx 3,4\%$. Однако, если численные значения смещения границ Z_i заменялись на их значения из точного аналитического решения, то погрешность резко возрастала: $\eta(S) \approx 123\%$ (см. Рис. 6б). Таким образом, численное решение оказалось очень чувствительным к незначительным возмущениям границ слоев, а также к величине шага по времени, уменьшение которой приводило к значительному увеличению времени счета.

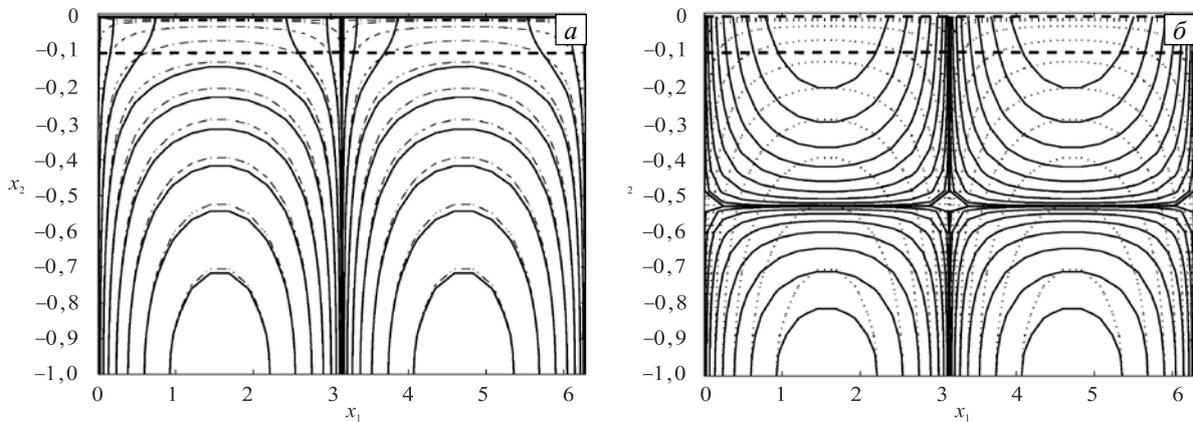


Рис. 6. Изолинии функции тока при $t = 4$, построенные для различных вариантов выбора Z_i : (а) – Z_i взяты из численного решения; (б) – Z_i взяты из точного решения; штриховыми линиями обозначены границы слоев, сплошными линиями – изолинии функции тока, полученные из численного решения уравнений (18); тонкими штрихпунктирными линиями для сравнения показаны линии тока точного решения

При численном решении подобных жестких эволюционных задач основная проблема заключается в том, чтобы обеспечить качественно правильное поведение численного решения как на участке «временного пограничного слоя», так и возможно точнее воспроизвести решение на основном участке интегрирования, вне этого слоя [4]. В некоторых приложениях, например, в тектонике и геофизике, поведение решения во «временном пограничном слое» практически непредсказуемо, так как нет информации ни о моменте начала процесса, ни о начальных условиях. В связи с этим, более важное для исследователя значение имеет поведение течения в промежутке времени, отвечающем медленной фазе, слабо зависящей от начальных условий. Поэтому возникает необходимость разработки численного метода, который позволил бы достаточно точно моделировать решение на больших временах. При этом желательно вести счет с большим шагом по времени, поскольку малый шаг при моделировании медленно меняющегося процесса приводит к неоправданному увеличению вычислительных затрат. Однако при использовании методов, не учитывающих указанные особенности процесса, несмотря на медленное изменение численного решения, шаг интегрирования должен оставаться малым. Попытки уменьшить время вычисления за счет увеличения шага интегрирования приводят к резкому возрастанию погрешности и к значительным искажениям численного решения.

5. Асимптотическое условие на границе сопряжения

Так как плотность в коре и мантии Земли изменяется в пределах 3000–3300 кг/м³, величину $\varepsilon = \max(\rho_k - \rho_{k-1})$ можно считать малым параметром. Представим решение системы (9) в виде сумм:

$$Z_1 = z_1(x_1, t) + \zeta_1(x_1, \tau), \quad Z_2 = z_2(x_1, t) + \zeta_2(x_1, \tau), \quad (19)$$

где ζ_1 и ζ_2 являются пограничными функциями, компенсирующими невязки начальных условий и быстро убывающими к нулю на бесконечности, $\tau = t/\varepsilon$ — «быстрое» время [9]. Очевидно, что начальные условия для z_i и ζ_i из (19) должны удовлетворять следующим соотношениям: $Z_i(x_1, 0) = z_i(x_1, 0) + \zeta_i(x_1, 0)$. Предположим, что скорости на границе сопряжения подобластей являются малыми величинами: $u_1(x_1, Z_{N+2}) = \varepsilon U_1$, $u_2(x_1, Z_{N+2}) = \varepsilon U_2$.

Для того чтобы выделить из решения функции ζ_i , разобьем систему, полученную в результате подстановки (19) в (9), следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon z_{i,\tau} &= \left(A_{i1} \Big|_{z_i=z_i} z_{i,1} + \varepsilon \sum_{k=2}^{N+1} A_{ik} \Big|_{z_i=z_i} \gamma_k z_{k,1} \right)_{,1} - \varepsilon U_1 (z_i - Z_3)_{,1} + \varepsilon U_2, \\ \zeta_{i,t} &= \left(A_{i1} \Big|_{z_i=z_i} Z_{i,1} + \varepsilon \sum_{k=2}^{N+1} A_{ik} \Big|_{z_i=z_i} \gamma_k Z_{k,1} \right)_{,1} - \left(A_{i1} \Big|_{z_i=z_i} z_{i,1} + \varepsilon \sum_{k=2}^{N+1} A_{ik} \Big|_{z_i=z_i} \gamma_k z_{k,1} \right)_{,1} - \varepsilon U_1 (Z_i - z_i)_{,1}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\gamma_k = (\rho_k - \rho_{k-1})/\varepsilon$.

Представим приближенное решение в виде асимптотических разложений:

$$z_i = z_{i0} + \varepsilon z_{i1} + \dots, \quad \zeta_i = \zeta_{i0} + \varepsilon \zeta_{i1} + \dots \quad (21)$$

Подробный асимптотический анализ уравнений приводится в [11].

Подставив (21) в (20) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие уравнения в первом приближении:

– уравнение относительно z_{i1} :

$$0 = \left(A_{i1} \Big|_{z_i=z_{i0}} z_{i1,1} + \sum_{k=2}^{N+1} A_{ik} \Big|_{z_i=z_{i0}} \gamma_k z_{k0,1} \right)_{,1} - U_1 (-Z_{N+2})_{,1} + U_2. \quad (22)$$

– система уравнений относительно z_{i0} :

$$z_{i0,\tau} = \left(A_{i1} \Big|_{z_i=z_{i0}} z_{i1,1} + \sum_{k=2}^{N+1} A_{ik} \Big|_{z_i=z_{i0}} \gamma_k z_{k0,1} \right)_{,1} - (U_1 (z_{i0} - Z_{N+2}))_{,1} + U_2. \quad (23)$$

Таким образом, в первом приближении, на больших временах, смещения границ слоев связаны со скоростями на границе Z_{N+2} обыкновенным дифференциальным уравнением (22) и не зависят от начального рельефа поверхности и границ раздела слоев.

Система уравнений (23) описывает эволюцию границ пласта на больших временах. Для ее решения использовалась численная схема, аналогичная (18):

$$\begin{aligned} \frac{z_{i0}^{l,m+1} - z_{i0}^{l,m}}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta x_1} \left(\frac{A_{i10}^{l,m+1} + A_{i10}^{l+1,m+1}}{2} \frac{z_{i1}^{l+1,m+1} - z_{i1}^{l,m+1}}{\Delta x_1} - \frac{A_{i10}^{l-1,m+1} + A_{i10}^{l,m+1}}{2} \frac{z_{i1}^{l,m+1} - z_{i1}^{l-1,m+1}}{\Delta x_1} + \right. \\ &+ \sum_{k=2}^{N+1} \gamma_k \left(\frac{A_{ik0}^{l,m+1} + A_{ik0}^{l+1,m+1}}{2} \frac{z_{k0}^{l+1,m+1} - z_{k0}^{l,m+1}}{\Delta x_1} - \frac{A_{ik0}^{l-1,m+1} + A_{ik0}^{l,m+1}}{2} \frac{z_{k0}^{l,m+1} - z_{k0}^{l-1,m+1}}{\Delta x_1} \right) - \\ &\left. \frac{U_1^{l+1,m} (z_{i0}^{l+1,m+1} - Z_{N+2}^{l+1,m+1}) - U_1^{l-1,m} (z_{i0}^{l-1,m+1} - Z_{N+2}^{l-1,m+1})}{2} \right) + U_2^{l,m} \quad (i = \overline{2, N+1}, \quad l = \overline{2, L-1}), \end{aligned} \quad (24)$$

где $z_i^{0,m} = z_i^{2,m}$, $U_1^{0,m} = -U_1^{2,m}$, $U_2^{0,m} = U_2^{2,m}$; $z_i^{L+1,m} = z_i^{L-1,m}$, $U_1^{L+1,m} = -U_1^{L-1,m}$, $U_2^{L+1,m} = U_2^{L-1,m}$ ($m = \overline{1, M}$); $z_{i0}^{l,m}$, $U_1^{l,m}$ и $U_2^{l,m}$ — значения сеточных функций, аппроксимирующих, соответственно, z_{i0} , U_1 и U_2 в узлах (x_1^l, t^m) ; $A_{ik0}^{l,m} = A_{ik} \Big|_{z_i=z_{i0}^{l,m}}$.

Проведено сравнение численного решения с применением асимптотического условия (22) для малых отклонений границ слоев от начального положения с предыдущим вариантом. Рисунок 7 позволяет проследить эволюцию смещений границ слоев из численного решения (23) в точке $x_1 = \pi$ относительно их

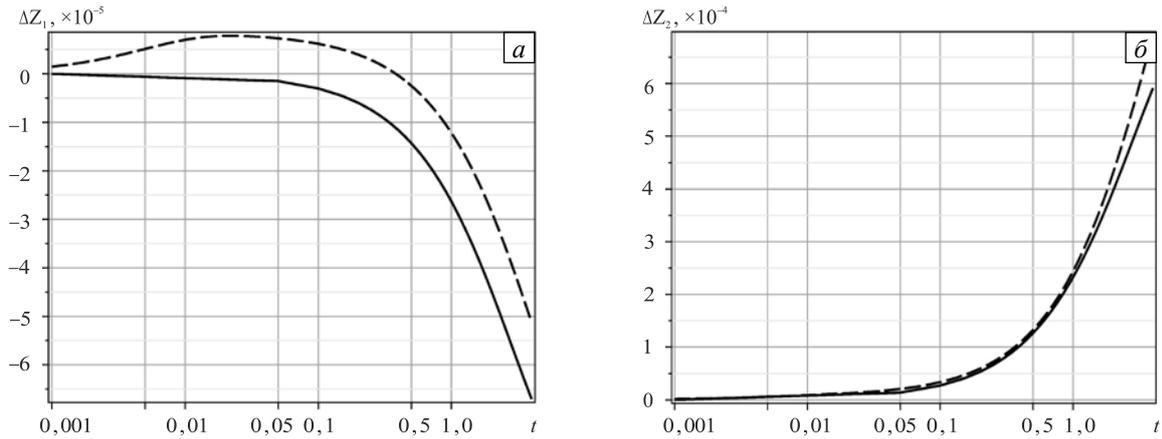


Рис. 7. Смещения границ Z_1 (а) и Z_2 (б) в точке $x_1 = \pi$ на малых и больших временах: сплошная линия – точное аналитическое решение, штриховая линия – численное решение с применением асимптотического условия (22); $\eta(Z_1) \approx 0,3073$, $\eta(Z_2) \approx 0,1462$

начального положения и сопоставить с аналитическим решением. При шаге по времени $\Delta t = 0,2$ на решение эволюционной задачи до момента $t = 4$ потребовалось 20 итераций по времени. Погрешность численного решения для границ слоев получилась равной $\eta(Z_1) \sim 30,7\%$ и $\eta(Z_2) \sim 14,6\%$.

На рисунке 8 приведены изолинии функции тока, соответствующие моменту времени $t = 4$. Погрешность численного решения для функции тока получилась равной $\eta(S) \sim 3,6\%$, а при задании смещения границ из аналитического решения — $\eta(S) \sim 4,29\%$. При сопоставлении результатов на рисунках 8а и 8б видно, что они идентичны. Хотя погрешность смещения границы Z_1 и была почти вдвое большей по сравнению с предыдущим вариантом, у функции тока она сохранила тот же порядок величины. Сравнение же рисунков 8б и 8в показывает значительную разницу: в отличие от предыдущего варианта, погрешность функции тока практически не изменилась при замене смещений границ на их значения из аналитического решения. Таким образом, с помощью асимптотического условия (22) без существенных ограничений на шаг по времени получено численное решение эволюционной задачи (23), устойчивое к возмущениям границ слоев и имеющее хорошую точность.

Проведено численное исследование течения в расчетной области с двухслойным пластом на развитой стадии при больших отклонениях границ слоев от начального положения. Результаты представлены на рисунке 9. Так как скорость течения в нижней подобласти в процессе эволюции почти не меняется, изолинии функции тока показаны только для верхней части D_1 . При $t = 5$ изменения происходят лишь в окрестности верхней границы Z_1 , а затем при $t = 10$ поля скоростей разделяются на две зоны, в которых направления вертикальных смещений прямо противоположны. Верхняя зона охватывает почти весь

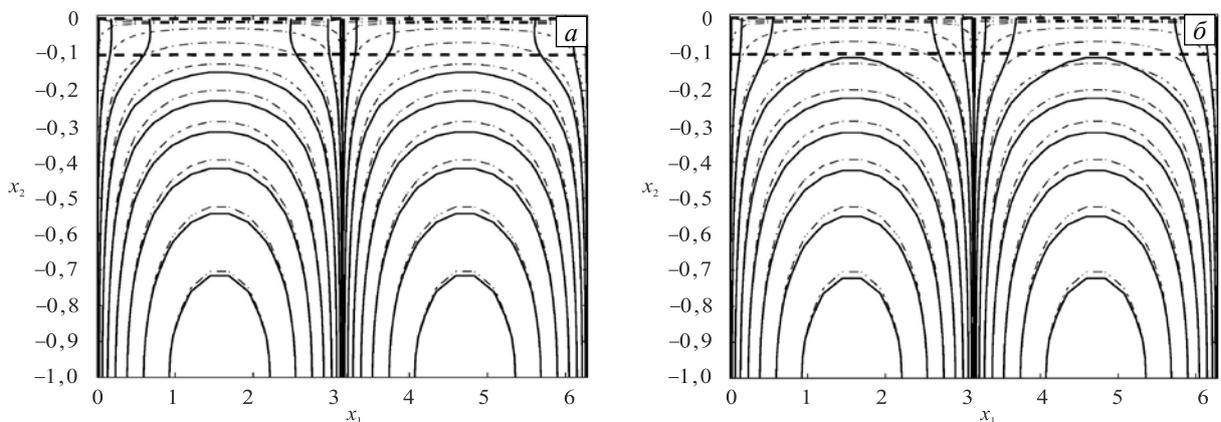


Рис. 8. Изолинии функции тока при $t = 4$, построенные с применением асимптотического условия (22) для различных вариантов выбора Z_i : (а) – Z_i взяты из численного решения; (б) – Z_i взяты из точного решения; штриховыми линиями обозначены границы слоев, сплошными линиями – изолинии функции тока, полученные из численного решения уравнений (24); штрихпунктирные линии – линии тока точного решения

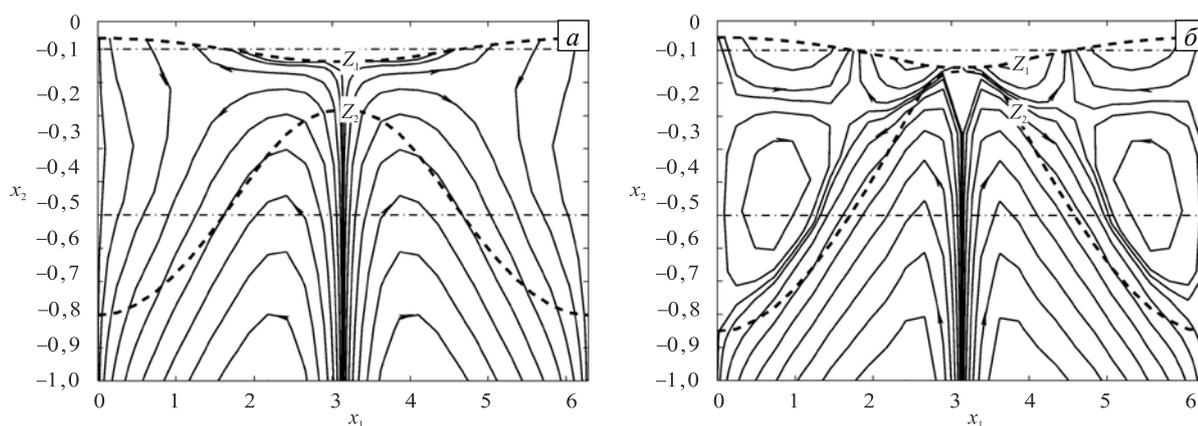


Рис. 9. Профили больших отклонений границ слоев от начального положения и изолинии функция тока в верхней части расчетной области, вычисленные с применением асимптотического условия в различные моменты времени t : 5 (а); 10 (б); сплошные линии со стрелками – линии тока течения, штриховые линии – границы слоев, штрихпунктирные линии – начальные положения границ слоев

верхний слой, заключенный между границами Z_1 и Z_2 . Здесь наблюдается довольно сложная картина с образованием замкнутых ячеек по обе стороны от места поднятия границы Z_2 .

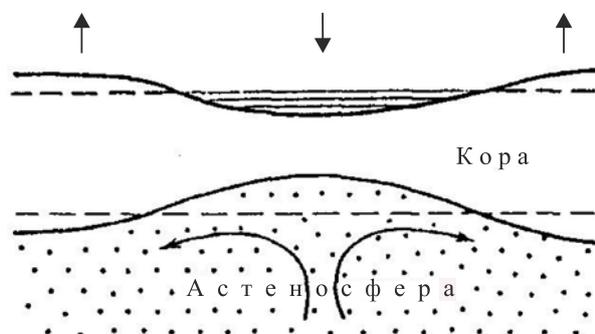


Рис. 10. Эрозия нижней части земной коры конвективными течениями в мантии (рисунок взят из [12])

Таким образом, применение асимптотического уравнения (22) в качестве дополнительного ограничения на искомое решение позволило существенно сократить вычислительные затраты, и достигалось это следующим путем:

– поле скоростей на больших временах вычислялось с хорошей точностью за одну итерацию. При использовании обычного способа сопряжения разнородных уравнений по скоростям и напряжениям поле скоростей имело очень большую погрешность (см. Рис. 6). В этом случае потребовались бы дополнительные уточняющие итерации для получения приемлемой точности, что значительно увеличивало бы время счета;

– наличие малого параметра в уравнениях (9) приводило к тому, что приемлемая точность численного решения достигалась только при очень малых шагах по времени. Преобразование эволюционных уравнений с помощью асимптотического уравнения (22) позволило вычлнить из решения быстро убывающую компоненту («временной пограничный слой») и достигнуть хорошей точности численного решения на медленной стадии даже при задании большого шага дискретизации по времени.

Как показано на рисунках 6, 8, для реализации одного и того же решения при обычном методе использовался шаг по времени 0,005, и потребовалось совершить 800 шагов, а асимптотическое условие (22) позволило увеличить шаг по времени до 0,2 и получить решение за 20 шагов.

Представленные результаты моделирования могут быть использованы в геофизических приложениях для изучения процесса формирования крупномасштабных тектонических прогибов, которые, по мнению многих ведущих исследователей [12], образовались в результате так называемой подкорковой эрозии, то есть перемещения конвективных течений в астеносфере — в верхнем слое мантии земной коры, из-под прогиба в окружающие области. Общая тектоническая схема этого процесса приведена на рисунке 10.

6. Заключение

На основе уравнений Рейнольдса и Стокса разработана комплексная численная модель, описывающая эволюцию медленного вязкого течения в расчетной области, включающей в себя относительно толстый слой вязкой жидкости и многослойный вязкий пласт на его поверхности.

Получено аналитическое решение для модели с однослойным пластом, и проведено исследование эволюции его границ. Анализ решения показал существенные различия режимов смещения границ слоев и поля скоростей на малых и больших временах.

Сравнение численного и аналитического решений показало сильную чувствительность численного решения к малым возмущениям границ слоев. Кроме этого, установлено существенное ограничение на шаг

по времени для численного счета, что приводит к увеличению вычислительных затрат при решении эволюционной задачи.

С помощью метода малого параметра получено асимптотическое уравнение, которое является дополнительным ограничением при численном решении системы уравнений. Результаты моделирования показали, что использование этого ограничения позволяет достигать хорошей точности и повышает устойчивость численного решения к возмущениям границ слоев, а также предоставляет возможность вести счет с более крупным шагом по времени, тем самым существенно сокращая вычислительные затраты. Проведены расчеты полей скоростей в случае больших отклонений границ слоев от начального положения. Модельные расчеты показали существенную перестройку поля скоростей в поверхностном пласте на больших временах.

В качестве геофизических приложений результаты могут применяться для изучения процесса образования крупномасштабных тектонических прогибов.

Литература

1. D'Acremont E., Leroy S., Burov E.B. Numerical modelling of a mantle plume: the plume head-lithosphere interaction in the formation of an oceanic large igneous province // *Earth Planet. Sc. Lett.* – 2003. – Vol. 206, no. 3-4. – P. 379-396. DOI
2. Tan E., Choi E., Thoutireddy P., Gurnis M., Aivazis M. GeoFramework: Coupling multiple models of mantle convection within a computational framework // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems.* – 2006. – Vol. 7, no. 6. – Q06001. DOI
3. Kushnir D., Rokhlin V. A highly accurate solver for stiff ordinary differential equations // *SIAM J. Sci. Comput.* – 2012. – Vol. 34, no. 3. – P. A1296-A1315. DOI
4. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
6. Пак В.В. Применение метода проекции градиента к численному решению совместной системы уравнений Стокса и уравнений Рейнольдса // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 23-29. DOI
7. Schubert G., Turcotte D.L., Olson P. *Mantle convection in the Earth and planets.* – Cambridge University Press: Cambridge, 2001. – 956 p. DOI
8. Hu J., Millet S., Botton V., Hadid H.B., Henry D. Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification // *Phys. Fluids.* – 2006. – Vol. 18. – 104101. DOI
9. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
10. Коврижных О.О. Об асимптотическом решении сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами // *Труды института математики и механики.* – 2007. – Т. 13, № 2. – С. 124-134. (English version DOI)
11. Пак В.В. Нелинейная модель осесимметричного течения двухслойной вязкой жидкости со свободной поверхностью // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки.* – 2010. – № 2. – С. 91-100.
12. Артюшков Е.В. *Физическая тектоника.* – М.: Наука, 1993. – 455 с.

References

1. D'Acremont E., Leroy S., Burov E.B. Numerical modelling of a mantle plume: the plume head-lithosphere interaction in the formation of an oceanic large igneous province. *Earth Planet. Sc. Lett.*, 2003, vol. 206, no. 3-4, pp. 379-396. DOI
2. Tan E., Choi E., Thoutireddy P., Gurnis M., Aivazis M. GeoFramework: Coupling multiple models of mantle convection within a computational framework. *Geochemistry. Geophysics. Geosystems*, 2006, vol. 7, no. 6, Q06001. DOI
3. Kushnir D., Rokhlin V. A highly accurate solver for stiff ordinary differential equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2012, vol. 34, no. 3, pp. A1296-A1315. DOI
4. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. *Chislennoe modelirovanie protsessov teplo- i massoobmena* [Numerical modeling of heat and mass transfer processes]. Moscow: Nauka, 1984. 285 p.
5. Samarsky A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1989. 616 p.
6. Pak V.V. Using the projection gradient method for the numerical solution of the coupled system of Stokes and Reynolds equations. *Vychisl. mekh. splosh. sred– Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 23-29. DOI
7. Schubert G., Turcotte D.L., Olson P. *Mantle convection in the Earth and planets.* Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 956 p. DOI
8. Hu J., Millet S., Botton V., Hadid H.B., Henry D. Inertialess temporal and spatio-temporal stability analysis of the two-layer film flow with density stratification. *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, 104101. DOI
9. Nayfeh A.H. *Perturbation methods.* New-York: Wiley-Interscience, 1973.
10. Kovryzhnykh O.O. On an asymptotic solution of a singularly perturbed system with two small parameters. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2007, vol. 259, suppl. 2, pp. S178-S189. DOI
11. Pak V.V. The nonlinear model of axisymmetric free-surface two-layered creeping flow. *Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, no. 2, pp. 91-100.
12. Artyushkov E.V. *Fizicheskaya tektonika* [Physical tectonics]. Moscow: Nauka, 1993. 455 p.

Поступила в редакцию 29.03.2015; опубликована в электронном виде 30.06.2016

Сведения об авторе

Пак Владимир Васильевич, кфмн, внс, Тихоокеанский океанологический институт им. В.И.Ильичева ДВО РАН (ТОИ ДВО РАН), 690041, Владивосток, ул. Балтийская, д. 43; e-mail: pakvv@poi.dvo.ru