

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.17

УДК 539.3

РАЗРАБОТКА И ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФАЗОВОЙ ДЕФОРМАЦИИ В СПЛАВАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

К.А. Тихомирова

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Статья посвящена разработке одномерной феноменологической модели для описания фазовой и структурной деформаций в сплавах с памятью формы (СПФ). В основе модели лежит представление о фазовой деформации как изменении длины цепочки из последовательно соединенных структурных элементов: сферических аустенитных и продолговатых мартенситных. Мартенситные элементы образуются из аустенитных при прямом фазовом превращении, вызываемом понижением температуры или приложением нагрузки, а при обратном переходе вновь становятся аустенитными. Угол наклона мартенситного элемента к продольной оси цепочки характеризует степень ориентированности возникающих в материале мартенситных пластин и игл относительно напряжения, действующего в момент их появления, и обуславливается величиной этого напряжения. «Запоминание» угла поворота каждого мартенситного элемента в момент его зарождения в ходе прямого превращения и воспроизведение соответствующего значения с его исчезновением при обратном превращении позволяет учесть историю деформирования материала и с позиции единого подхода учесть ряд явлений, связанных с мартенситным превращением. Структурная деформация рассматривается как изменение угла наклона мартенситного элемента вследствие перераспределения внешнего напряжения. Полная деформация системы находится суммированием упругой, фазовой и температурной составляющих. Предложен способ определения констант модели исходя из данных макроскопического эксперимента: прямого превращения под действием постоянного растягивающего/сжимающего напряжения (несколько испытаний при различных нагрузках), а также прямого превращения без нагрузки (случай объемного расширения). Приведены примеры численной реализации модели для случаев эффекта памяти формы, прямого превращения в условиях ступенчатого нагружения, реверсивной памяти формы с учетом структурной деформации, образующейся в момент смены знака нагрузки. Для некоторых задач проведено сравнение с экспериментальными данными, а также с результатами, полученными при использовании модели других авторов.

Ключевые слова: одномерная феноменологическая модель, сплавы с памятью формы, мартенситное превращение, реверсивная память формы, фазовая деформация, структурная деформация

DEVELOPMENT AND NUMERICAL IMPLEMENTATION OF ONE-DIMENSIONAL PHENOMENOLOGICAL MODEL FOR PHASE DEFORMATION IN SHAPE MEMORY ALLOYS

K.A. Tikhomirova

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The paper is devoted to the development of a one-dimensional phenomenological model for phase and structural deformations in shape memory alloys. Phase deformation is reckoned as the length change in a chain of structural elements working in series: spherical austenitic and elongated martensitic elements. Martensitic elements are formed from the austenitic ones during the forward phase transition caused by cooling or loading and become the austenitic ones again after the reverse transition. A rotation angle of the martensitic element related to the longitudinal axis of the chain is determined by macroscopic stress acting at the moment of the element origination and characterizes the extent of the martensite orientation according to the acting stress. A remembering of a martensitic element rotation angle at the moment of its origination under forward transformation and its subsequent reproduction during reverse transformation allow taking into account the loading history and with the use of the universal approach describe several phenomena caused by martensitic transformation. Structural deformation is considered as a change in the rotation angle of the martensitic element due to the changed external stress. Total system deformation is determined by summing the elastic, phase and thermal components. A method of the model constants identification on the basis of macroscopic experimental data is suggested. The following experiments are needed for this purpose: forward transition under constant tension/compression load (several tests under different loads) and forward transition without any load (a dilatation expansion case). Several examples of the model numerical implementation for different cases are given: the shape memory effect, the forward transformation under a stepwise changing load, and reverse shape memory, taking into account the structural deformation occurring at the time of the load sign change. For some examples, a comparison with experimental data and with the results obtained by another model is given.

Key words: one-dimensional phenomenological model, shape memory alloys, martensitic transformation, non-monotonic shape memory, phase deformation, structural deformation

1. Введение

История изучения сплавов с эффектом памяти насчитывает более пятидесяти лет, и за это время было создано значительное количество математических моделей фазового перехода, информация о которых опубликована как в отечественной, так и зарубежной литературе. Условно эти модели можно разделить на микроструктурные и макро-феноменологические.

Описание внутреннего строения материала, лежащее в основе микроструктурного моделирования, позволяет дать ясную физическую трактовку происходящих в материале процессов, а также учесть эволюцию его структуры и свойств в процессе деформирования. Такие модели способны достаточно точно отображать широкий круг явлений, связанных с мартенситным превращением в сплавах с памятью формы

(СПФ). Однако алгоритмическая сложность микроструктурных моделей и необходимость задания большого числа материальных констант затрудняет их практическое использование. Поэтому чаще всего их применяют для проведения численных экспериментов и проверки адекватности феноменологических моделей.

Микроструктурному моделированию процессов мартенситных превращений в СПФ посвящен ряд отечественных [1–5] и зарубежных [6–11] работ. В моделях [1, 7, 10, 11], наряду с деформацией фазового перехода и структурной деформацией мартенсита, учитывается пластическая деформация мартенситной и аустенитной фаз. Микроплоскостная модель, предложенная в [12], занимает промежуточное положение между феноменологической и микроструктурной: введенные в рассмотрение микроплоскости различной ориентации не являются прямыми аналогами вариантов мартенсита, однако отражают особенности внутренней структуры материала.

Макроскопические модели, чаще всего применяющиеся на практике, более простые, содержат меньшее количество материальных констант, подлежащих определению. Поскольку их возможности достаточно ограничены, то обычно при их создании ставится цель отобразить конкретный круг явлений: эффект памяти формы, изотермические процессы (сверхупругость, мартенситную неупругость) и другое. Однако в условиях сложного термосилового нагружения в материале может протекать сразу несколько процессов, связанных с прямым и обратным мартенситными превращениями, а также с переориентацией мартенситных доменов (структурная деформация). Поэтому актуальной является проблема создания таких феноменологических моделей, которые позволили бы на основе единого подхода наиболее полно описать совокупность макромеханических процессов, происходящих при мартенситном и структурном превращениях в СПФ.

В большинстве макро-феноменологических моделей используется представление полной деформации как совокупности упругой, температурной, фазовой и, в ряде работ [13–15], пластической составляющих. Некоторые авторы [16–19] одновременно с фазовой деформацией учитывают также структурную составляющую (деформацию раздвоения, переориентацию). При этом с точки зрения моделирования мартенситного превращения наиболее интересен способ задания фазовой (структурной) деформации. В ряде моделей [15, 16, 20, 21] фазовая составляющая записывается в виде произведения деформационной величины, имеющей смысл максимально возможной [15] или средней [16] фазовой деформации, и объемной доли мартенсита. В работах [22–24] прибегают к более сложному дифференциальному уравнению, а именно $\dot{\varepsilon}_{ph} = \Lambda \dot{q}$, где ε_{ph} — фазовая деформация, q — доля мартенситной фазы, Λ — некоторая функция, зависящая от напряжения и различающаяся для случаев прямого и обратного мартенситных превращений; точкой обозначено дифференцирование по времени. Выражение Λ для обратного превращения содержит величину ε_{ph}^0 — фазовую деформацию на момент окончания прямого превращения (на момент смены знака \dot{q}).

Поскольку на характер восстановления деформации в ходе обратного превращения в сплавах с памятью влияет не только величина конечной фазовой деформации ε_{ph}^0 , но и вся история деформирования в процессе прямого перехода (чему подтверждением служит, например, явление реверсивной памяти формы), то представляется целесообразным введение в выражение для фазовой деформации операции интегрирования по временному интервалу от начального момента, соотносящегося с полностью аустенитным состоянием материала, до текущего момента. Кроме того, встает вопрос о правомерности разделения фазовой и структурной компонент деформации, так как обе они связаны с образованием направленного мартенсита, но имеют различные механизмы развития: мартенсит, соответствующий фазовой деформации, образуется из аустенитной фазы, а структурной деформации — из мартенситной фазы в результате переориентации. Поэтому в момент зарождения имеет смысл вычислять эти составляющие по-разному, но не различать их вклады в общую деформацию.

В предлагаемой в настоящей работе модели делается попытка учесть высказанные выше положения. Надо отметить, что вопрос учета изменения направленности мартенситных ячеек достаточно обширен, и в данной статье структурная деформация будет рассмотрена только как возникающая наряду с фазовой внутри температурного интервала прямого превращения.

2. Некоторые сведения о природе мартенситного превращения

Для СПФ характерны два фазовых состояния: высокотемпературное (аустенитное) и низкотемпературное (мартенситное). Прямой фазовый переход в мартенситное состояние осуществляется при охлаждении материала внутри температурного интервала прямого мартенситного превращения или инициируется приложением нагрузки, превышающей критическое напряжение мартенситного сдвига. При последующем нагреве в интервале температур обратного фазового перехода происходит превращение мартенсита в аустенит, сопровождающееся исчезновением фазовой деформации, накопленной в процессе прямого превращения.

Кристаллическая ячейка аустенитной фазы обладает высокой степенью симметрии, тогда как ячейка мартенсита является низкосимметричной. В связи с этим имеется множество возможных направлений

перехода высокосимметричной аустенитной ячейки в мартенситную. Например, для никелида титана таких направлений 12 [25]. Имеющееся в материале напряжение обуславливает преимущественную ориентацию мартенсита; в отсутствие полей напряжений (как внешних, так и внутренних) все варианты равновероятны. Таким образом, величина фазовой деформации, наблюдаемая в макроэксперименте, ограничена кристаллографически случаем хаотического мартенсита с одной стороны и полностью упорядоченного — с другой. Первому случаю соответствует аномальное объемное расширение сплава при охлаждении, сравнительно небольшое по величине. Во втором случае достигается предельное значение фазовой деформации, которое довольно значительно (порядка 5–10% для разных сплавов) и зависит от химического состава сплава, размеров зерен, предварительной термической и механической обработки и ряда других факторов.

Совокупности близлежащих кристаллических ячеек мартенситной фазы одинаковой ориентации образуют области, имеющие форму пластин или игл. Поскольку в развиваемом в данной работе подходе не делается различия между пластинчатым и игольчатым мартенситом, то далее будет использоваться только термин мартенситная пластина. При изменении направления действия напряжения возможно изменение ориентации существующих мартенситных ячеек, а также преобразование хаотического мартенсита в направленный, что обуславливает структурную составляющую деформации.

Фазовое превращение протекает бездиффузионным способом, то есть с сохранением атомами своего соседства, следовательно, является обратимым. Экспериментально установлено [26, 27], что мартенситные пластины, появляющиеся первыми при прямом превращении, исчезают последними при обратном. Такое поведение может послужить объяснением некоторых эффектов, возникающих в условиях сложного термосилового нагружения, в частности, эффекта реверсивной памяти формы [27–29], при котором знакопеременному деформированию материала при прямом превращении соответствует также знакопеременный характер восстановления формы при обратном.

3. Описание феноменологической модели

Основываясь на изложенных в предыдущем разделе сведениях о физике мартенситного превращения, при построении модели будем использовать следующие гипотезы:

1. Ориентация мартенситной пластины полностью определяется локальным напряжением, действующим в материале в момент ее зарождения. В отсутствие напряжения пластина может располагаться произвольно.
2. При обратном превращении мартенситные пластины исчезают в порядке, противоположном порядку их возникновения в ходе прямого превращения.

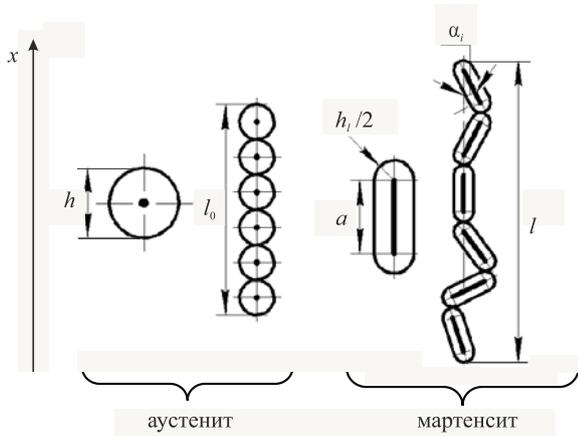


Рис. 1. Структурные элементы аустенитной и мартенситной фаз

Для моделирования фазового перехода введем совокупность последовательно соединенных структурных элементов (Рис. 1). Сферические элементы соответствуют аустенитной фазе с высокой степенью симметрии ячеек, продолговатые — мартенситной с низкой степенью симметрии. Аустенитные элементы в процессе прямого превращения переходят в мартенситные, а при обратном переходе вновь становятся сферическими аустенитными. В одноосном случае ориентация i -го мартенситного элемента определяется углом наклона α_i к оси x , а величина фазовой деформации равняется отношению изменения длины проекции цепочки структурных элементов на эту ось. Объемную долю мартенситной фазы q можно вычислить как отношение количества мартенситных элементов к общему числу элементов.

Физическая интерпретация предлагаемого подхода состоит в следующем. Увеличение доли мартенситной фазы на Δq приводит к приросту фазовой деформации на величину, которая зависит от ориентации возникающих ячеек мартенсита. Она же, согласно гипотезе 1, обуславливается действующим локальным напряжением, которое в общем случае отличается от прикладываемого внешнего напряжения. Таким образом, не все появившиеся мартенситные пластины оказываются направленными как внешнее напряжение. Однако, чем выше его интенсивность, тем больше доля ориентированного в направлении его действия мартенсита, а, следовательно, больше и величина суммарной фазовой деформации.

В терминах развиваемой модели прирост фазовой деформации определяется проекцией вновь образовавшегося структурного элемента на ось цепочки. Поскольку большему внешнему напряжению

соответствует большее по модулю значение фазовой деформации, то зависимость $\alpha(|\sigma|)$ должна иметь монотонно убывающий характер. Исходя из этого угол наклона структурного элемента α не является прямым аналогом ориентации мартенситных пластин в материале, а отражает степень их направленности в сторону действия внешнего напряжения.

Пусть цепочка состоит из n структурных элементов, каждый из которых в начальный момент времени находится в аустенитном состоянии. Переход одного из элементов в мартенситное состояние вызовет прирост доли мартенситной фазы на величину

$$\Delta q = 1/n \tag{1}$$

и фазовую деформацию, равную

$$\Delta \varepsilon_{ph} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{h(n-1) + h_1 + a \cos \alpha_1 - hn}{hn}, \tag{2}$$

где a , h , h_1 — характерные геометрические размеры элементов (Рис. 1). Введя обозначения структурных параметров $K = a/h$, $A = -1 + h_1/h$ и учитывая (1), после преобразования получим выражение (2) вида:

$$\Delta \varepsilon_{ph} = (K \cos \alpha_1 + A) \Delta q.$$

При переходе m структурных элементов в мартенситное состояние фазовая деформация составит:

$$\sum_{i=1}^m (\Delta \varepsilon_{ph})_i = \sum_{i=1}^m (K \cos \alpha_i + A) (\Delta q)_i.$$

Устремляя общее число структурных элементов к бесконечности и осуществляя предельный переход, приходим к интегральной сумме, описывающей фазовую деформацию:

$$\varepsilon_{ph} = \int_0^t (K \cos \alpha(\tau) + A) dq(\tau).$$

В общем случае угол α может быть как положительным, так и отрицательным. Но поскольку в выражение для фазовой деформации он входит как аргумент четной функции косинуса, то его знак можно не учитывать. Согласно гипотезе 1 угол α зависит от действующего локального напряжения, представляющего собой суперпозицию полей внешних и внутренних напряжений. При некотором растягивающем напряжении σ_m^+ фазовая деформация в материале достигает максимально возможного значения ε_{ph}^{\max} , что связано с образованием полностью ориентированного мартенсита. В этом случае структурные элементы направлены вдоль оси цепочки, что обеспечивает ее максимальную длину и угол

$$\alpha|_{\sigma=\sigma_m^+} = 0. \tag{3}$$

В отсутствие внешних напряжений в материале образуется разнонаправленный мартенсит. При этом фазовая деформация по абсолютной величине минимальна, и угол наклона структурного элемента составляет:

$$\alpha|_{\sigma=0} = \pi/2, \tag{4}$$

что отражает наименьшую степень ориентированности мартенситных пластин.

По данным работ [30, 31] кривые изотермического деформирования никелида титана выглядят по-разному для случаев растяжения и сжатия. Различие можно объяснить тем, что при растяжении имеется только одно преимущественное направление образования мартенситных пластин — вдоль действия напряжения. В случае же сжатия равновероятными являются все направления, перпендикулярные линии приложения сжимающей нагрузки. Поэтому и зависимость $\alpha(\sigma)$ должна быть несимметричной относительно нуля. В данной работе примем, что вид этой зависимости для сжатия аналогичен случаю растяжения, но со своим параметром σ_m^- .

С учетом вышесказанного введем кусочно-линейную зависимость величины угла α от внешнего напряжения σ :

$$\alpha = \begin{cases} 0, & \sigma > \sigma_m^+; \\ c^+ \sigma + d, & 0 \leq \sigma \leq \sigma_m^+; \\ c^- \sigma + d, & \sigma_m^- \leq \sigma < 0; \\ 0, & \sigma < \sigma_m^-. \end{cases} \quad (5)$$

Коэффициенты c^+ , c^- , d можно найти из граничных условий (3), (4).

Для описания обратного превращения воспользуемся гипотезой 2. Пусть в ходе прямого превращения в некоторый момент времени t_1 доля мартенситной фазы составила $q(t_1)$, а ее приращение — $\Delta q(t_1)$. При этом образовалось $n\Delta q(t_1)$ элементов мартенситной фазы с ориентацией $\alpha(t_1)$, определяемой действующим в этот момент напряжением. Когда при последующем обратном превращении убывающая доля мартенситной фазы вновь станет равной $q(t_1)$, произойдет исчезновение образовавшихся в момент времени t_1 структурных элементов, ориентированных под углом $\alpha(t_1)$. Таким образом, для вычисления фазовой деформации на этапе обратного превращения необходимо знать, как были направлены исчезающие в каждый момент времени мартенситные элементы. Из этих соображений вытекает общее выражение для фазовой деформации, позволяющее учесть историю изменения как напряжений, так и температуры:

$$\varepsilon_{ph} = \int_0^t (K \cos \alpha^*(\tau) + A) dq(\tau). \quad (6)$$

Здесь t — время, начало отсчета которого должно принадлежать полностью аустенитному состоянию материала; $\alpha^*(\tau)$ — значение α при $q = q(\tau)$, но на этапе прямого мартенситного превращения. Другими словами, при организации вычислительного алгоритма необходимо «запоминать» зависимость $\alpha(q)$ при прямом превращении, а затем воспроизводить ее при обратном.

Надо отметить, что в общем случае подынтегральное выражение в (6) может быть функцией напряжений произвольного вида, наиболее полно соответствующей эксперименту. Особенностью предлагаемых соотношений является наличие некоторого параметра (в данном случае угла α), задающего степень ориентированности мартенситных пластин в зависимости от напряжения, действующего на этапе прямого превращения. Определение этого параметра как функции доли мартенситной фазы q при прямом превращении позволяет вычислить фазовую деформацию на любом этапе термомеханического нагружения.

Предлагаемая модель по типу учета деформации восстановления аналогична модели для стеклюющихся полимеров, представленной в [32]. Отличие последней заключается в использовании параллельного соединения структурных элементов-пружин, а в качестве параметра, запоминающего форму, — длины недеформированного элемента в момент его возникновения в процессе стеклования.

4. Экспериментальное определение параметров модели

Известно, что кривая деформирования СПФ несимметрична относительно точки смены знака напряжения, поэтому константы модели, входящие в (5), (6), должны различаться для случаев растяжения и сжатия (с этой целью буквенные обозначения имеют пометки + и –). Для их определения на основании (6) необходимо записать выражения для случаев разнонаправленного ($\sigma = 0$) и полностью ориентированного ($\sigma = \sigma_m^{+(-)}$) мартенсита.

В случае прямого превращения без нагрузки, согласно условию (4), угол наклона структурных элементов составляет $\alpha = \pi/2$, а соотношение (6) для полной фазовой деформации после завершения прямого перехода принимает вид

$$\varepsilon_v = A. \quad (7)$$

В соответствии с (7), коэффициент A имеет смысл объемной деформации прямого превращения в отсутствие нагрузки и является одинаковым для случаев растяжения и сжатия.

Как было отмечено ранее, при $\sigma = \sigma_m^+$ фазовая деформация достигает своего максимума ε_{ph}^{\max} и при дальнейшем увеличении напряжения уже не меняется. Рассмотрим случай прямого превращения под действием постоянного напряжения σ_m^+ . Угол наклона структурных элементов при этом (см. (3)) нулевой, а выражение для полной фазовой деформации после завершения прямого превращения, согласно (6), имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{ph}^{\max} = K^+ + A. \tag{8}$$

При сжатии соотношение аналогично (8), но для минимальной фазовой деформации ε_{ph}^{\min} , отвечающей напряжению $\sigma = \sigma_m^-$, оно другое:

$$\varepsilon_{ph}^{\min} = K^- + A. \tag{9}$$

Таким образом, для нахождения параметров модели на основании выражений (3)–(5) и (7)–(9) необходимо экспериментально определить значения ε_v , σ_m^+ , σ_m^- , ε_{ph}^{\max} , ε_{ph}^{\min} . По данным [33] линейная фазовая деформация объемного расширения прямого превращения без нагрузки для никелида титана составляет $\varepsilon_v = 0,34\%$. В этой же работе

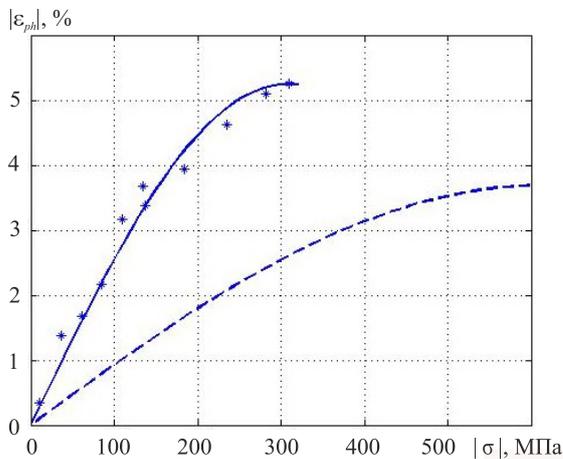


Рис. 2. Зависимость фазовой деформации полного прямого превращения от действующего напряжения за вычетом объемного расширения: точки – экспериментальные данные для растяжения [33]; сплошная линия – результаты расчета для растяжения; штриховая линия – результаты расчета для сжатия

представлены экспериментальные данные для зависимости от действующего растягивающего напряжения фазовой деформации полного превращения никелида титана за вычетом объемного расширения (Рис. 2); каждая точка — это отдельное испытание: прямой фазовый переход при постоянном напряжении. На графике заметно снижение темпа роста деформации с увеличением напряжения, и можно предположить наличие горизонтальной асимптоты при дальнейшем росте напряжения. Поэтому можно считать, что в испытании, соответствующем верхней экспериментальной точке на графике, реализовалась максимально возможная фазовая деформация. Координаты этой точки принимались далее за искомые пороговые значения деформации и напряжения: $(\varepsilon_{ph}^{\max} - \varepsilon_v) = 5,25\%$ и $\sigma_m^+ = 310$ МПа. С их использованием были получены параметры

$c^+ = -0,0051 \text{ МПа}^{-1}$, $d = \pi/2$ (из соотношений (3)–(5)), а также константы модели $A = 0,0034$, $K^+ = 0,0525$ (из (7), (8)) для случая растяжения.

Итак, для определения констант модели была взята только одна экспериментальная точка с рисунка 2. В качестве процедуры верификации выполнена аппроксимация полной экспериментальной зависимости, представленной на этом графике. Выражение (6) для полной фазовой деформации прямого перехода, протекающего под действием постоянного напряжения, имеет вид:

$$\varepsilon_{ph} = K^{+(-)} \cos(\alpha(\sigma)) + A.$$

Расчетная кривая, построенная на основании этого выражения с использованием найденных констант модели (см. сплошную линию на Рис. 2), демонстрирует хорошее качественное согласование с экспериментальными данными.

Как правило, при сжатии СПФ демонстрируют более высокие по абсолютному значению напряжения и более низкие величины деформаций [30, 31]. Так, приведенным в работе [30] экспериментальным зависимостям напряжений от деформаций для явления псевдоупругости никелида титана соответствуют максимальное напряжение $\sigma = 300$ МПа и деформация $\varepsilon = 5\%$ при растяжении и $\sigma = -600$ МПа и $\varepsilon = -3\%$ при сжатии. Поскольку экспериментальных данных, аналогичных представленным на рисунке 2, для случая сжатия в литературе найти не удалось, то из условия соблюдения пропорций между приведенными выше величинами было принято, что значения максимального сжимающего напряжения и минимальной фазовой деформации равняются:

$$\begin{aligned}\sigma_m^- &= -2\sigma_m^+; \\ \varepsilon_{ph}^{\min} &= -0,6\varepsilon_{ph}^{\max}.\end{aligned}\quad (10)$$

С учетом (10), аналогично растяжению, были получены следующие константы модели для сжатия: $K^- = -0,0369$, $c^- = 0,0025 \text{ МПа}^{-1}$. На рисунке 2 представлена также расчетная зависимость фазовой деформации полного прямого превращения от напряжения для сжатия, построенная с использованием найденных констант.

5. Вычисление полной деформации системы и объемной доли мартенситной фазы

В работе [34] была предложена модель для описания релаксационных переходов в полимерных материалах, которая может быть адаптирована для случая мартенситных превращений в металлах. При этом вводится кинематическое соотношение связи высокотемпературного и низкотемпературного состояний:

$$\dot{\varepsilon} = (q\varepsilon_M)^\cdot + ((1-q)\varepsilon_A)^\cdot + \dot{\varepsilon}_{ph} + \dot{\varepsilon}_T.$$

Здесь ε — полная деформация; индексы M , A , ph , T соответствуют упругой мартенситной, упругой аустенитной, фазовой и температурной составляющим. Точкой обозначено дифференцирование по времени. Тогда в случае малых деформаций связь между различными компонентами осевой деформации определится выражением:

$$\varepsilon = q\varepsilon_M + (1-q)\varepsilon_A + \varepsilon_{ph} + \varepsilon_T. \quad (11)$$

Как отмечается в работе [35], при записи уравнений для изменения свободной энергии можно пренебречь слагаемым, отвечающим за взаимодействие частиц в мартенситном и аустенитном состояниях на межфазной границе, поскольку его величина незначительна. Поэтому уравнение для свободной энергии ψ представим в виде:

$$\psi = q\psi_M(\varepsilon_M) + (1-q)\psi_A(\varepsilon_A) + \psi_T(\varepsilon_T),$$

где ψ_M , ψ_A , ψ_T — свободная энергия деформаций мартенситной и аустенитной фаз, а также температурной деформации. Отсюда для случая одноосного напряженного состояния из термодинамических соображений следует [34]:

$$\sigma = E_M\varepsilon_M = E_A\varepsilon_A, \quad (12)$$

где σ — осевое напряжение; E_M , E_A — модули Юнга мартенситной и аустенитной фаз. Для никелида титана $E_M = 33 \text{ ГПа}$, $E_A = 62 \text{ ГПа}$ [36].

Для вычисления фазовой деформации используется соотношение (6). Температурная составляющая за малостью вклада не учитывается.

Принята следующая аппроксимация зависимости объемной доли мартенсита от температуры и напряжений [37]:

$$\begin{aligned}q &= \begin{cases} 0, & \xi \leq 0, \\ (1 - \cos(\pi\xi))/2, & 0 < \xi < 1, \\ 1, & \xi \geq 1; \end{cases} \\ \xi &= \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^\sigma - M_f^\sigma}, \quad M_f^\sigma \leq T \leq M_s^\sigma, \quad (A \rightarrow M); \\ \xi &= 1 + \frac{A_s^\sigma - T}{A_f^\sigma - A_s^\sigma}, \quad A_s^\sigma \leq T \leq A_f^\sigma, \quad (M \rightarrow A).\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь M_s , M_f , A_s , A_f — температуры начала и окончания прямого (мартенситного) и обратного (аустенитного) превращений. В соответствии с [36] для никелида титана $M_s = 330 \text{ К}$, $M_f = 290 \text{ К}$, $A_s = 340 \text{ К}$, $A_f = 380 \text{ К}$. Приняты линейные зависимости характерных температур превращения от действующих напряжений:

$$\begin{aligned} M_s^\sigma &= M_s + k|\sigma|, & M_f^\sigma &= M_f + k|\sigma|, \\ A_s^\sigma &= A_s + k|\sigma|, & A_f^\sigma &= A_f + k|\sigma|, \end{aligned} \tag{14}$$

где k — материальная константа [37]. При дальнейших расчетах для наилучшего согласования с данными эксперимента она принята равной 0,04 К/МПа.

Отметим, что представление о зависимости характерных температур от напряжения вида (14), хотя и достаточно распространено в литературе, для обратного фазового перехода может быть использовано только в том случае, когда на этапе обратного превращения знаки фазовой деформации и действующего напряжения совпадают. В противном случае (14) приводит к качественным ошибкам. Более общий вариант термодинамически обоснованных выражений для характерных температур превращений предложен в работе [25].

Таблица содержит введенные выше константы материала и параметры модели, участвующие далее в расчетах в разделе 6.

Таблица. Константы материала и параметры модели

Наименование параметров	Обозначение	Значение	Размерность
Параметры разрабатываемой модели	A	0,0034	–
	d	1,5708	–
Параметры разрабатываемой модели при растяжении	K^+	0,0525	–
	c^+	-0,0051	МПа ⁻¹
Параметры разрабатываемой модели при сжатии	K^-	-0,0369	–
	c^-	0,0025	МПа ⁻¹
Модуль упругости мартенситной фазы	E_M	33 000	МПа
Модуль упругости аустенитной фазы	E_A	62 000	МПа
Температура начала прямого превращения	M_s	330	К
Температура окончания прямого превращения	M_f	290	К
Температура начала обратного превращения	A_s	340	К
Температура окончания обратного превращения	A_f	380	К
Коэффициент сдвига характерных температур	k	0,04	К/МПа

6. Примеры численной реализации модели

В настоящем разделе приводятся примеры численной реализации разрабатываемой модели применительно к некоторым явлениям, связанным с мартенситным превращением. При этом вычислительный алгоритм имеет следующие общие для всех рассматриваемых задач особенности.

Поскольку изменение температуры предполагается линейным во времени, то численное интегрирование ведется не по времени, а по температуре с постоянным по величине шагом. Сначала на каждом шаге по температуре, согласно (13), (14), вычисляется приращение доли мартенситной фазы в зависимости от действующего напряжения:

$$\begin{aligned} \Delta q(T, \sigma) &= \frac{\partial q}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial q}{\partial \sigma} \Delta \sigma = \Delta q_T + \Delta q_\sigma, \\ \Delta q_T(T, \sigma) &= -\frac{\pi}{2} \sin(\pi\xi) \frac{\Delta T}{|\Theta_s - \Theta_f|}, \\ \Delta q_\sigma(T, \sigma) &= \frac{\pi}{2} \sin(\pi\xi) \frac{k\Delta\sigma}{|\Theta_s - \Theta_f|}, \end{aligned}$$

где Θ_s, Θ_f — температуры начала и окончания фазовых переходов (M_s, M_f — для прямого и A_s, A_f — для обратного переходов). Далее из соотношений (5) вычисляется текущее значение угла ориентации α^* , которое для этапа прямого фазового перехода вместе с соответствующим значением текущей доли мартенситной фазы q сохраняется в отдельный массив данных. Затем из (6) численно определяется

приращение фазовой деформации (в приведенных ниже примерах приращение интеграла устанавливалось методом прямоугольников). Величина осевой деформации, согласно (11), равняется сумме фазовой и упругой составляющих. Температурная составляющая за малостью вклада в расчете не учитывается. На этапе обратного превращения на каждом температурном шаге находится значение функции $\alpha^*(t)$, отвечающее текущему значению объемной доли мартенсита, но вычисленное на этапе прямого превращения, и с его учетом рассчитывается приращение фазовой деформации.

Вычислительные особенности, связанные со ступенчатым изменением напряжения и сменой знака нагрузки, рассматриваются ниже при решении конкретных задач.

6.1. Эффект памяти формы

Явление мартенситного превращения обуславливает важнейшее свойство сплавов с памятью — способность длительное время сохранять деформированное состояние даже в отсутствие нагрузки

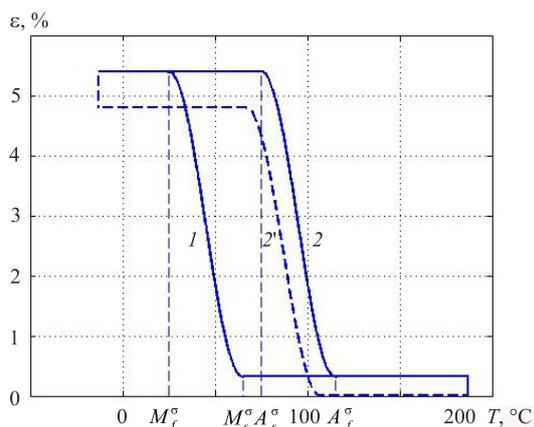


Рис. 3. Эффект памяти формы в случае прямого превращения под нагрузкой (кривая 1) и обратного превращения под той же нагрузкой (кривая 2) и в свободном состоянии (кривая 2')

и под действием той же нагрузки. Как видно из рисунка, свободное восстановление формы (кривая 2') отличается от восстановления формы под нагрузкой (кривая 2) отсутствием упругой составляющей деформации и смещения характеристических температур обратного превращения, вызванных наличием напряжения (14).

6.2. Прямое превращение при ступенчатом изменении напряжения

В работе [25] опубликованы экспериментальные данные по деформации в ходе прямого превращения никелида титана под действием ступенчато меняющегося напряжения. Приложенное в начале эксперимента напряжение $\sigma_1 = 200$ МПа скачком уменьшается до значения σ_2 при температуре $T_1 = 50$ °C, лежащей внутри температурного интервала прямого превращения (приведены результаты четырех испытаний при разных значениях σ_2 : 125, 100, 75, 50 (МПа)). При этом происходит упругая разгрузка образца, а при дальнейшем охлаждении деформация прямого превращения продолжает увеличиваться, однако ее рост имеет несколько иной характер.

В рамках развиваемой модели, согласно соотношениям (13), (14), напряжениям σ_1 и σ_2 (при условии их наличия с самого начала фазового перехода) соответствовали бы две различные функции $q_1(T)$ и $q_2(T)$. Причем $q_2(T) \leq q_1(T)$, поскольку уменьшение напряжения вызывало бы снижение характеристических температур превращения (14). Однако в случае приложения ступенчатого напряжения разгрузка при температуре T_1 не приводит к уменьшению объемной доли мартенсита, так как при этой температуре образовавшийся мартенсит является термически устойчивым. Поэтому выражение для доли мартенситной фазы $q(T)$ в таком случае можно представить следующим образом (Рис. 4):

$$q(T) = \begin{cases} q_1(T), & T > T_1, \\ q_1(T_1), & T \leq T_1 \text{ и } q_2(T) \leq q_1(T_1), \\ q_2(T), & q_2(T) > q_1(T_1), \end{cases}$$

и восстанавливать исходную форму под влиянием внешних параметров, в частности температуры. Цикл памяти формы состоит из двух этапов: создания деформированного состояния (обычно в ходе прямого превращения в условиях постоянного напряжения) и восстановления исходной формы при обратном превращении либо в свободном состоянии, либо при наличии сопротивления. В рамках развиваемой модели в этом случае величина фазовой деформации (6) будет представлять собой произведение доли мартенситной фазы q на постоянную величину $K^{+(-)} \cos(\alpha(\sigma)) + A$, зависящую от напряжения, приложенного на первом этапе.

На рисунке 3 приведены результаты моделирования эффекта памяти формы, инициированного постоянным растягивающим напряжением 200 МПа, для двух случаев восстановления формы: в свободном состоянии

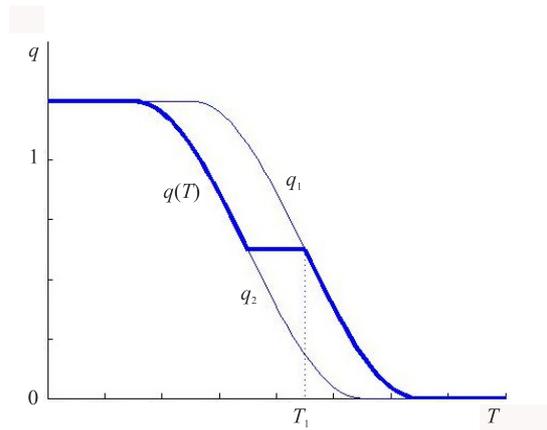


Рис. 4. Температурная зависимость объемной доли мартенсита при прямом превращении под действием ступенчато изменяющегося напряжения

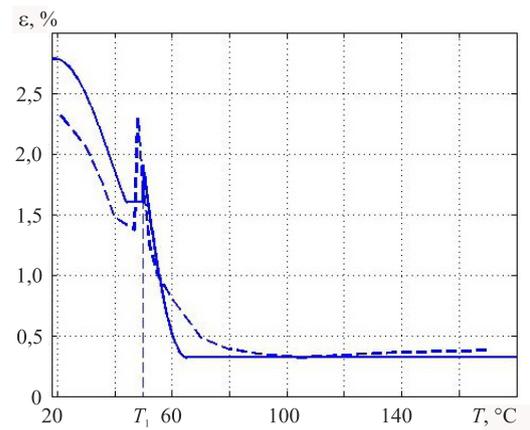


Рис. 5. Температурная зависимость деформации прямого превращения под действием ступенчато изменяющегося напряжения; штриховая линия – эксперимент [25], сплошная линия – модель

то есть после уменьшения напряжения фазовый переход прекращается на некоторое время, пока изображающая процесс точка не достигнет кривой $q_2(T)$. В действительности же образование мартенсита не останавливается, а лишь уменьшается его интенсивность (см. экспериментальную зависимость на Рис. 5). Соотношения, отражающие этот факт, предложены в работах [38, 39].

На рисунке 5 приведены также результаты численного расчета для $\sigma_2 = 50$ МПа.

6.3. Эффект реверсивной памяти формы и учет структурной деформации

Сплавы с памятью формы проявляют замечательное свойство, называемое реверсивной памятью формы [27–29]. Оно заключается в том, что при знакопеременном деформировании материала в интервале температур прямого мартенситного превращения свободное восстановление деформации в процессе обратного превращения также будет знакопеременным.

Рассмотрим реализацию эффекта реверсивной памяти формы в случае одноосного нагружения образца из никелида титана. Образец охлаждается из полностью аустенитного состояния под действием растягивающего напряжения $\sigma_1 = 200$ МПа. В момент времени t_0 при температуре 40°C (внутри интервала прямого перехода) производится смена знака нагрузки, после чего образец продолжает охлаждаться под нагрузкой $\sigma_2 = -200$ МПа до 0°C , а затем нагревается в отсутствие напряжений до первоначальной температуры.

Согласно гипотезе 2, принятой при построении модели, в ходе обратного превращения в первую очередь исчезают ячейки мартенсита, зародившиеся последними и ориентированные как напряжение σ_2 , а затем — ячейки, возникшие первыми и ориентированные как напряжение σ_1 . Этим объясняется знакопеременный характер кривой восстановления деформации. Однако, как было отмечено в предыдущих разделах, в момент смены знака нагрузки возможно изменение направления части мартенситных ячеек, образовавшихся ранее. В связи с этим мартенситных ячеек, ориентированных одинаково с напряжением σ_1 , становится меньше, и пик кривой восстановления деформации в ходе обратного превращения имеет меньшую высоту, чем соответствующий пик на этапе прямого превращения.

В терминах развиваемой модели при смене знака нагрузки претерпевает изменение функция $\alpha^*(t)$, отвечающая за степень ориентированности пластин. Предположим, что конфигурации структурных элементов, сформированной в процессе охлаждения под действием напряжения $\sigma_1^*(t)$ и последующим приложением в момент времени t_0 напряжения противоположного знака $\sigma_2(t_0)$, эквивалентна некоторая конфигурация, сформированная при охлаждении под действием напряжения $\sigma^{**}(t)$ и не претерпевшая изменений. Причем обеим конфигурациям отвечает одна и та же функция $\alpha^*(t)$. Напряжение $\sigma^{**}(t)$ будем вычислять как среднее арифметическое напряжений $\sigma_1^*(t)$ и $\sigma_2(t_0)$ с некоторым весовым коэффициентом k_{re} :

$$\sigma^{**}(t) = \frac{1}{1+k_{re}} (\sigma_1^*(t) + k_{re} \cdot \sigma_2(t_0)). \tag{15}$$

Таким образом, для учета переориентации мартенситных ячеек в момент смены знака напряжения t_0 необходимо с использованием соотношений (5), (6) выполнить пересчет функции $\alpha^*(t)$ и накопленной фазовой деформации $\varepsilon_{ph}(t_0)$ до значений, которые бы они имели при прямом превращении под действием эквивалентного напряжения $\sigma^{**}(t)$.

В работе [40] был предложен иной способ учета эффекта реверсивной памяти формы. Он заключается в том, что зависимость фазовой деформации от доли мартенсита для обратного превращения выбирается аналогично зависимости для прямого превращения, но с масштабным коэффициентом λ_0 . После ряда преобразований выражения для осевой компоненты тензора фазовой деформации были получены в виде [41]:

– для прямого превращения

$$d\varepsilon_{ph} = (c_0\sigma(1-a_0q) + a_0\varepsilon_{ph})dq; \quad (16)$$

– для обратного превращения

$$d\varepsilon_{ph} = \left(\lambda_0 c_0 \tilde{\sigma} (1 - a_0 q) + (1 - \lambda_0) \frac{a_0 \varepsilon_{ph0}}{e^{a_0} - 1} \right) dq. \quad (17)$$

Здесь λ_0 , c_0 , a_0 — константы материала; $\tilde{\sigma}$ — значение осевого напряжения σ с этапа прямого превращения, соответствующее текущему значению q с этапа обратного превращения; ε_{ph0} — значение осевой компоненты тензора фазовых деформаций в момент окончания прямого превращения, близкое к нулю для случая реверсивной памяти формы. К недостаткам этой модели можно отнести отсутствие физического обоснования введения коэффициента λ_0 .

Процесс реверсивной памяти формы, описанный в начале этого подраздела, моделировался с помощью развиваемого в данной работе подхода, а также с использованием соотношений (16), (17) с целью сопоставления результатов. Интегрирование проводилось по температуре с числом шагов 1000, при этом величина шага составляла 0,2°C. На температурном шаге, отвечающем времени t_0 — моменту смены знака нагрузки, производился пересчет функции угла наклона структурных элементов $\alpha^*(t)$ и накопленной фазовой деформации с учетом действия эквивалентных напряжений (15). На этапе обратного превращения на каждом температурном шаге находились значения функции $\alpha^*(t)$ для развиваемой модели (с учетом пересчета, выполненного при смене знака нагрузки) и напряжения $\tilde{\sigma}$ для модели (16), (17), соотносящиеся с текущей величиной объемной доли мартенсита, но вычисленные на этапе прямого превращения. Затем на основании найденных значений определялось приращение фазовой деформации.

При расчете константы моделей выбирались следующим образом. Известно, что в случае реверсивной памяти формы максимальное значение деформации на этапе нагрева для никелида титана примерно в четыре раза меньше максимальной деформации этапа охлаждения [40]. Из этого условия коэффициент k_{re} был выбран равным 0,75. Коэффициент сдвига k характерных температур в зависимости от напряжения принимался равным 0,009 К/МПа для модели (16), (17) и 0,04 К/МПа для развиваемой модели. Константы модели (16), (17) составили $a_0 = 0,01$, $c_0 = 4,8 \cdot 10^{-4}$, $\lambda_0 = 0,25$. Остальные необходимые для расчета величины соответствовали приведенным в таблице. Отметим, что в данной задаче не учитывалась асимметрия кривых деформирования материала при растяжении и сжатии, поэтому константы моделей для случая сжатия выбирались из условия, что $\sigma_m^- = -\sigma_m^+$ и $\varepsilon_{ph}^{\min} = -\varepsilon_{ph}^{\max}$.

Из представленной на рисунке 6 расчетной зависимости осевой деформации от температуры видно, что обе модели в качественном отношении описывают процесс реверсивного формоизменения аналогично. Пик кривой возврата деформации повторяет форму пика кривой накопления деформации, что соответствует явлению реверсивной памяти формы, но его высота значительно меньше, что связано с переориентацией части мартенситных ячеек при нагружении в противоположном направлении.

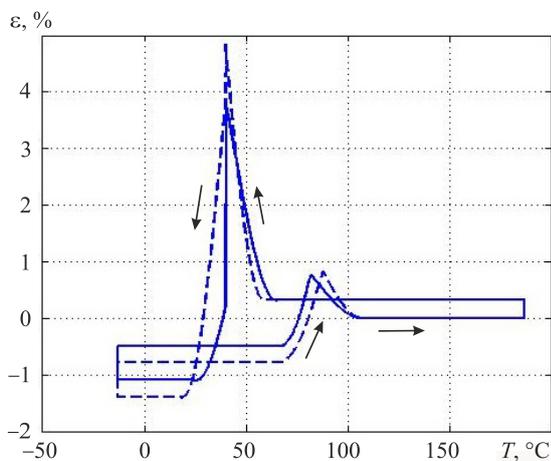


Рис. 6. Результаты численного моделирования: осевая деформация стержня в процессе реверсивного формоизменения; сплошная линия — разрабатываемая модель, и пунктирная линия — модель (16), (17)

7. Заключение

Таким образом, предлагаемый в работе подход к моделированию фазовой и структурной деформации в сплавах с памятью формы позволил учесть полную историю деформирования материала и единообразно описать ряд явлений, связанных с прямым и обратным мартенситными переходами. Предложен способ экспериментального определения констант, входящих в модель.

Возможности модели проиллюстрированы на ряде простейших одномерных задач, таких как монотонная и реверсивная память формы, прямое превращение под действием ступенчато изменяющегося напряжения, возникновение структурной деформации внутри температурного интервала прямого перехода. Для некоторых задач представлено сравнение с имеющимися в литературе экспериментальными данными и с результатами, полученными при использовании другой модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №16-31-00161-мол_а).

Литература

1. Бречко Т. Эффект памяти формы и остаточные напряжения // ЖТФ. – 1996. – Т. 66, № 11. – С. 72-78.
2. Волков А.Е. Микроструктурное моделирование деформации сплавов при повторяющихся мартенситных превращениях // Известия РАН. Серия физическая. – 2002. – Т. 66, № 9. – С. 1290-1297.
3. Волков А.Е., Евард М.Е., Курзенева Л.Н., Лихачев В.А., Сахаров В.Ю., Ушаков В.В. Математическое моделирование мартенситной неупругости и эффектов памяти формы // ЖТФ. – 1996. – Т. 66, № 11. – С. 3-35.
4. Лихачев В.А., Малинин В.Г. Структурно-аналитическая теория прочности. – СПб.: Наука, 1993. – 470 с.
5. Мовчан А.А., Мовчан И.А. Одномерная микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при прямом и обратном термоупругих превращениях // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 3. – С. 297-322.
6. Huang M., Gao X., Brinson L.C. A multivariant micromechanical model for SMAs Part 2. Polycrystal model // Int. J. Plasticity. – 2000. – Vol. 16, no. 10-11. – P. 1371-1390. DOI
7. Manchiraju S., Anderson P.M. Coupling between martensitic phase transformations and plasticity: a microstructure-based finite element model // Int. J. Plasticity. – 2010. – Vol. 26, no. 10. – P. 1508-1526. DOI
8. Patoor E., Lagoudas D.C., Entchev P.B., Brinson L.C., Gao X. Shape memory alloys, Part I: General properties and modeling of single crystals // Mech. mater. – 2006. – Vol. 38, no. 5-6. – P. 391-429. DOI
9. Thamburaja P., Pan H., Chau F.S. The evolution of microstructure during twinning: Constitutive equations, finite-element simulations and experimental verification // Int. J. Plasticity. – 2009. – Vol. 25, no. 11. – P. 2141-2168. DOI
10. Wang X.M., Xu B.X., Yue Z.F. Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys // Int. J. Plasticity. – 2008. – Vol. 24, no. 8. – P. 1307-1332. DOI
11. Yu C., Kang G., Kan Q. Crystal plasticity based constitutive model of NiTi shape memory alloy considering different mechanisms of inelastic deformation // Int. J. Plasticity. – 2014. – Vol. 54. – P. 132-162. DOI
12. Brocca M., Brinson L.C., Bažant Z.P. Three-dimensional constitutive model for shape memory alloys based on microplane model // J. Mech. Phys. Solids. – 2002. – Vol. 50, no. 5. – P. 1051-1077. DOI
13. Peng X., Chen B., Chen X., Wang J., Wang H. A constitutive model for transformation, reorientation and plastic deformation of shape memory alloys // Acta Mech. Solida Sin. – 2012. – Vol. 25, no. 3. – P. 285-298. DOI
14. Zaki W., Zamfir S., Moumni Z. An extension of the ZM model for shape memory alloys accounting for plastic deformation // Mech. mater. – 2010. – Vol. 42, no. 3. – P. 266-274. DOI
15. Zhou B. A macroscopic constitutive model of shape memory alloy considering plasticity // Mech. Mater. – 2012. – Vol. 48. – P. 71-81. DOI
16. Chemisky Y., Duval A., Patoor E., Zineb T.B. Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation // Mech. mater. – 2011. – Vol. 43, no. 7. – P. 361-376. DOI
17. Panico M., Brinson L.C. A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys // J. Mech. Phys. Solids. – 2007. – Vol. 55. – No. 11. – P. 2491-2511.
18. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // МТТ. – 2014. – № 1. – С. 37-53. (English version DOI).
19. Мовчан А.А., Мовчан И.А. Модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы в активных процессах прямого превращения и структурного перехода // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 1. – С. 75-87.
20. Müller C., Bruhns O.T. A thermodynamic finite-strain model for pseudoelastic shape memory alloys // Int. J. Plasticity. – 2006. – Vol. 22, no. 9. – P. 1658-1682. DOI
21. Sedláč P., Frost M., Benešová B., Ben Zineb T., Šittner P. Thermomechanical model for NiTi-based shape memory alloys including R-phase and material anisotropy under multi-axial loadings // Int. J. Plasticity. – 2012. – Vol. 39. – P. 132-151. DOI
22. Shape memory alloys: modeling and engineering applications / Ed. by Lagoudas D.C. – New York: Springer Science & Business Media, 2008. – 429 p. DOI
23. Mehrabi R., Andani M.T., Elahinia M., Kadkhodaei M. Anisotropic behavior of superelastic NiTi shape memory alloys: an experimental investigation and constitutive modeling // Mech. Mater. – 2014. – Vol. 77. – P. 110-124. DOI
24. Мовчан А.А., Шельмагин П.В., Казарина С.А. Определяющие уравнения для двухэтапных термоупругих фазовых превращений // ПИМТФ. – 2001. – Т. 42, № 5. – С. 152-160.

25. Мовчан А.А., Казарина С.А. Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // Физ. мезомех. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 105-116. (English version DOI).
26. Вейман С.М. Деформация, механизм явления и другие характеристики сплавов с эффектом запоминания формы // Эффект памяти формы в сплавах / Под ред. В.А. Займовского. – М.: Металлургия, 1979. – С. 9-35. (English version DOI).
27. Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Тошпулатов Ч.Х. Эффект реверсивной памяти формы при знакопеременном деформировании // Физика металлов и металловедение. – 1986. – Т. 61, № 13. – С. 79-85.
28. Беляев С.П., Ермолаев В.А., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Чунарева Е.Н. Эффект реверсивной обратимой памяти формы в сплавах на основе никелида титана // Физика металлов и металловедение. – 1988. – Т. 66, № 5. – С. 926-934.
29. Беляев С.П., Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Рогачевская М.Ю. Моделирование процессов реверсивного формоизменения в TiNiFe // Физика металлов и металловедение. – 1989. – Т. 68, № 3. – С. 617-619.
30. Elibol C., Wagner M.F.-X. Investigation of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression-shear // Mat. Sci. Eng. A-Struct. – 2015. – Vol. 621. – P. 76-81. DOI
31. Yoo Y.-I., Kim Y.-J., Shin D.-K., Lee J.-J. Development of martensite transformation kinetics of NiTi shape memory alloys under compression // Int. J. Solids Struct. – 2015. – Vol. 64. – P. 51-61. DOI
32. Матвеевко В.П., Сметанников О.Ю., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода. – М.: Физматлит, 2009. – 176 с.
33. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // МТТ. – 2010. – № 3. – С. 118-130. (English version DOI).
34. Роговой А.А., Столбова О.С. Моделирование термомеханических процессов в полимерах с памятью формы при конечных деформациях // ПМТФ. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 143-157. DOI
35. Малыгин Г.А. Размытые мартенситные переходы и пластичность кристаллов с эффектом памяти формы // УФН. – 2001. – Т. 171, № 2. – С. 187-212. DOI
36. Андронов И.Н., Богданов Н.П., Северова Н.А., Тарсин А.В. Метод количественного описания зависимости модуля Юнга никелида титана от температуры // Известия Коми НЦ УрО РАН. – 2013. – № 3(15). – С. 87-90.
37. Мовчан А.А., Чжо Т.Я. Решение начально-краевых задач о прямом и обратном превращении в рамках нелинейной теории деформирования сплавов с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 4. – С. 452-468.
38. Мовчан А.А. Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы // МТТ. – 1996. – № 4. – С. 136-144.
39. Мовчан А.А., Давыдов В.В. Инкрементальные определяющие соотношения для объемной доли мартенситной фазы в сплавах с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т. 16, № 5. – С. 653-661.
40. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. – 1995. – Т. 36, № 2. – С. 173-181.
41. Шуткин А.С. Модели материалов с памятью формы при конечных деформациях / Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – М., МГУ, 2011. – 92 с.

References

1. Brechko T. Effekt pamyati formy i ostatochnye napryazheniya [Shape memory effect and residual stresses]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki – Technical Physics*, 1996, vol. 66, no. 11, pp. 72-78.
2. Volkov A.E. Mikrostrukturnoe modelirovanie deformatsii splavov pri povtoryayushchikhsya martensitnykh prevrashcheniyakh [Microstructural modeling of alloy deformation under repeated martensitic transformations]. *Izvestiya Rossijskoj Akademii Nauk. Seriya fizicheskaya – Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*, 2002, vol. 66, no. 9, pp. 1290-1297.
3. Volkov A.E., Evard M.E., Kurzeneva L.N., Likhachev V.A., Sakharov V.Yu., Ushakov V.V. Mathematical modeling of martensitic inelasticity and shape memory effects. *Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics*, 1996, vol. 41, no. 11, pp. 1084-1101.
4. Likhachev V.A., Malinin V.G. *Struktorno-analiticheskaya teoriya prochnosti* [Structural-analytical theory of strength]. St. Petersburg: Nauka, 1993. 470 p.
5. Movchan A.A., Movchan I.A. Odnomernaya mikromekhanicheskaya model' nelinejnogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri pryamom i obratnom termouprugikh prevrashcheniyakh [One-dimensional micromechanical model for nonlinear deformation of shape memory alloys under direct and inverse thermoelastic transformations]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij – Journal on Composite Mechanics and Design*, 2007, vol. 13, no. 3, pp. 297-322.
6. Huang M., Gao X., Brinson L.C. A multivariant micromechanical model for SMAs Part 2. Polycrystal model. *Int. J. Plasticity*, 2000, vol. 16, no. 10-11, pp. 1371-1390. DOI
7. Manchiraju S., Anderson P. M. Coupling between martensitic phase transformations and plasticity: a microstructure-based finite element model. *Int. J. Plasticity*, 2010, vol. 26, no. 10, pp. 1508-1526. DOI
8. Patoor E., Lagoudas D.C., Entchev P.B., Brinson L.X., Gao X. Shape memory alloys, Part I: General properties and modeling of single crystals. *Mech. mater.*, 2006, vol. 38, no. 5-6, pp. 391-429. DOI
9. Thamburaja P., Pan H., Chau F.S. The evolution of microstructure during twinning: Constitutive equations, finite-element simulations and experimental verification. *Int. J. Plasticity*, 2009, vol. 25, no. 11, pp. 2141-2168. DOI

10. Wang X.M., Xu B.X., Yue Z.F. Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys. *Int. J. Plasticity*, 2008, vol. 24, no. 8, pp. 1307-1332. DOI
11. Yu C., Kang G., Kan Q. Crystal plasticity based constitutive model of NiTi shape memory alloy considering different mechanisms of inelastic deformation. *Int. J. Plasticity*, 2014, vol. 54, pp. 132-162. DOI
12. Brocca M., Brinson L.C., Bažant Z.P. Three-dimensional constitutive model for shape memory alloys based on microplane model. *J. Mech. Phys. Solids*, 2002, vol. 50, no. 5, pp. 1051-1077. DOI
13. Peng X., Chen B., Chen X., Wang J., Wang H. A constitutive model for transformation, reorientation and plastic deformation of shape memory alloys. *Acta Mech. Solida Sin.*, 2012, vol. 25, no. 3, pp. 285-298. DOI
14. Zaki W., Zamfir S., Moumni Z. An extension of the ZM model for shape memory alloys accounting for plastic deformation. *Mech. Mater.*, 2010, vol. 42, no. 3, pp. 266-274. DOI
15. Zhou B. A macroscopic constitutive model of shape memory alloy considering plasticity. *Mech. mater.*, 2012, vol. 48, pp. 71-81. DOI
16. Chemisky Y., Duval A., Patoor E., Zineb T.B. Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation. *Mech. mater.*, 2011, vol. 43, no. 7, pp. 361-376. DOI
17. Panico M., Brinson L.C. A three-dimensional phenomenological model for martensite reorientation in shape memory alloys. *J. Mech. Phys. Solids*, 2007, vol. 55, no. 11, pp. 2491-2511.
18. Mishustin I.V., Movchan A.A. Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses. *Mechanics of Solids*, 2014, vol. 49, no. 1, pp. 27-39. DOI
19. Movchan A.A., Movchan I.A. Model' nelinejnogo deformirovaniya splavov s pamjat'yu formy v aktivnykh protsessakh pryamogo prevrashcheniya i strukturnogo perekhoda [Model of nonlinear deformation of shape memory alloys in the active processes of direct transformation and structural transition]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij – Journal on Composite Mechanics and Design*, 2008, vol. 14, no. 1, pp. 75-87.
20. Müller C., Bruhns O.T. A thermodynamic finite-strain model for pseudoelastic shape memory alloys. *Int. J. Plasticity*, 2006, vol. 22, no. 9, pp. 1658-1682. DOI
21. Sedlák P., Frost M., Benešová B., Ben Zineb T., Šittner P. Thermomechanical model for NiTi-based shape memory alloys including R-phase and material anisotropy under multi-axial loadings. *Int. J. Plasticity*, 2012, vol. 39, pp. 132-151. DOI
22. *Shape memory alloys: modeling and engineering applications*, ed. by Lagoudas D.C. New York: Springer Science & Business Media, 2008. 429 p.
23. Mehrabi R., Andani M.T., Elahinia M., Kadkhodaei M. Anisotropic behavior of superelastic NiTi shape memory alloys; an experimental investigation and constitutive modeling. *Mech. Mater.*, 2014, vol. 77, pp. 110-124. DOI
24. Movchan A.A., Shelymagin P.V., Kazarina S.A. Constitutive equations for two-step thermoelastic phase transformations. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2001, vol. 42, no. 5, pp. 864-871.
25. Movchan A.A., Kazarina S.A. Shape memory materials as an object of solid mechanics: Experimental study, constitutive relations, solution of boundary-value problems. *Physical Mesomechanics*, 2012, vol. 15, no. 3-4, pp. 214-223. DOI
26. Wayman C.M. Deformation, mechanisms and other characteristics of shape memory alloys. *Shape Memory Effects in Alloys*, ed. by J. Perkins. New York: Springer US, 1975. Pp. 1-27. DOI
27. Kuz'min S.L., Likhachev V.A., Toshpulatov Ch.Kh. Effekt reversivnoj pamyati formy pri znakoperemennom deformirovanii [Effect of two-way shape memory under alternating-sign deformation]. *Fizika metallov i metallovedenie – The Physics of Metals and Metallography*, 1986, vol. 61, no. 1, pp. 79-85.
28. Belyaev S.P., Ermolaev V.A., Kuz'min S.L., Likhachev V.A., Chunareva E.N. Effekt reversivnoj obratimoy pamyati formy v splavakh na osnove nikelida titana [Effect of two-way reversible shape memory in NiTi-based alloys]. *Fizika metallov i metallovedenie – The Physics of Metals and Metallography*, 1988, vol. 66, no. 5, pp. 926-934.
29. Belyaev S.P., Kuz'min S.L., Likhachev V.A., Rogachevskaya M.Yu. Modelirovanie protsessov reversivnogo formoizmeneniya v TiNiFe [Modeling of two-way shape-changing processes in TiNiFe]. *Fizika metallov i metallovedenie – The Physics of Metals and Metallography*, 1989, vol. 68, no. 3, pp. 617-619.
30. Elilob C., Wagner M.F.-X. Investigation of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression-shear. *Mat. Sci. Eng. A-Struct.*, 2015, vol. 621, pp. 76-81. DOI
31. Yoo Y.-I., Kim Y.-J., Shin D.-K., Lee J.-J. Development of martensite transformation kinetics of NiTi shape memory alloys under compression. *Int. J. Solids Struct.*, 2015, vol. 64, pp. 51-61. DOI
32. Matveenko V.P., Smetannikov O.Yu., Trufanov N.A., Shardakov I.N. *Termomekhanika polimernykh materialov v usloviyakh relaksatsionnogo perekhoda* [Thermomechanics of polymeric materials under relaxation transition]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 174 p.
33. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions. *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 406-416. DOI
34. Rogovoy A.A., Stolbova O.S. Modeling thermomechanical processes in shape memory polymers under finite deformations. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 143-157.
35. Malygin G.A. Diffuse martensite transitions and the plasticity of crystals with the shape memory effect. *Physics-USpekhi*, 2001, vol. 44, no. 2, pp. 173-197. DOI
36. Andronov I.N., Bogdanov N.P., Severova N.A., Tarsin A.V. Method of quantitative description of temperature dependence of NiTi Young's modulus. *Proceedings of Komi Science Centre UB RAS*, 2013, no. 3, pp. 87-90.
37. Movchan A.A., Chzho T.Ya. Reshenie nachal'no-kraevykh zadach o pryamom i obratnom prevrashchenii v ramkakh nelinejnoj teorii deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy [Solution of boundary problems of direct and inverse transformations in the framework of nonlinear deformation theory of shape memory alloys]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij – Journal on Composite Mechanics and Design*, 2007, vol. 13, no. 4, pp. 452-468.
38. Movchan A.A. Analiticheskoe reshenie zadach o pryamom i obratnom prevrashchenii dlya splavov s pamyat'yu formy [Analytical solution of the problems of direct and reverse transformation in shape memory alloys]. *Izvestiya Rossijskoj Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela – Mechanics of Solids*, 1996, no. 4, pp. 136-144.

39. Movchan A.A., Davydov V.V. Incremental constitutive equation for martensite volume part parameter in shape memory alloys. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij – Journal on Composite Mechanics and Design*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 653-661.
40. Movchan A.A. Vybór approksimatsii diagrammy perekhoda i modeli ischeznoeniya kristallov martensita dlya splavov s pamyat'yu formy [Selecting of phase-diagram approximation and a model of disappearance of martensitic crystals for shape memory alloys]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika – J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1995, vol. 36, no. 2, pp. 173-181.
41. Shutkin A.S. *Modeli materialov s pamyat'yu formy pri konechnykh deformatsiyakh* [Models of shape memory materials under finite deformations]. PhD Dissertation, Moscow State University, Moscow, 2011. 92 p.

Поступила в редакцию 23.03.2015; опубликована в электронном виде 30.06.2016