DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.16
УДК 534.1:517.957

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ СРЕД С МИКРОСТРУКТУРОЙ

А.И. Землянухин, А.В. Бочкарев

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация

В статье показано, что точные солитоноподобные решения нелинейных эволюционных уравнений можно находить прямым методом возмущений на основе решения линеаризованного уравнения. Сами решения представляют собой суммы рядов метода возмущений, найденные в предположении об их геометричности. Критерием геометричности ряда является равенство последовательных диагональных аппроксимант Паде, минимальный порядок которых определяется порядком полюса искомого решения, полученного на основе анализа ведущих членов уравнения. Вычислительные аспекты метода иллюстрирует пример решения уравнения Кортевега-де Вриза. Приведена система уравнений искомых функций ряда метода возмущений, осуществлено его преобразование в степенной ряд, продемонстрировано наличие последовательности совпадающих аппроксимант, младший порядок которых одинаков с порядком полюса искомого решения. С использованием предложенного вычислительного метода построены классы точных уединенно-волновых решений неинтегрируемого уравнения четвертого порядка с произвольной степенью нелинейности, моделирующего распространение нелинейных волн в зернистых средах. Выделены классы точных решений обобщенного неинтегрируемого уравнения шестого порядка с кубической нелинейностью, выявлены соотношения между коэффициентами уравнения, необходимые для существования точных уединенно-волновых решений. Обнаружено, что в среде с мягкой нелинейностью точное решение имеет форму кинка, а в случае жесткой нелинейности – классического солитона. Для эффективного применения разработанной методики необходимо, чтобы ряд метода возмущений содержал все натуральные степени переменной и характеризовал функцию с полюсом целого порядка. Для уравнений, решения которых обладают полюсами дробных порядков, введены процедуры, преобразующие степенные ряды к требуемой форме.

Ключевые слова: метод возмущений, аппроксиманты Паде, точные уединенно-волновые решения, нелинейная динамика сплошных сред

THE PERTURBATION METHOD AND EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR DYNAMICS EQUATIONS FOR MEDIA WITH MICROSTRUCTURE

A.I. Zemlyanukhin and A.V. Bochkarev

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation

It is shown that exact soliton-like solutions of nonlinear evolution equations can be obtained by the direct perturbation method on the basis of the solution of the linearized equation. The solutions are the sums of the perturbation series calculated under the assumption that the series is geometric. The criterion for geometricity of the perturbation series is the equality of the sequential diagonal Pade approximants, the minimum order of which is determined by the order of the sought solution’s pole, obtained by analyzing the leading terms of the equation. Computational features of the method are demonstrated on the example of solving the Korteweg-de Vries equation. The system of equations for the sought functions of the perturbation series is given, the transformation of the perturbation series into a power series is demonstrated. It is shown that there exists a sequence of coinciding Pade approximants, the minimum order of which matches the order of the pole of the sought solution. Using the proposed computational method, classes of exact soliton-like solutions to a non-integrable fourth-order equation with an arbitrary degree of nonlinearity, simulating the propagation of nonlinear waves in granular media, are constructed. Classes of exact solutions to a generalized non-integrable equation of the sixth order with cubic nonlinearity are presented. The relationship between the coefficients of the sixth-order equation that is necessary for the existence of the exact soliton-like solutions is revealed. It is shown that in media with soft nonlinearity the exact solution has the form of the kink. In the case of hard nonlinearity of the media, a solitary wave has the form of a classical soliton. For effective use of the method it is necessary that the perturbation series contains all natural degrees of the series variable and the series characterizes the function with integer order of pole. For equations which have a pole of fractional orders, procedures for converting the power series to the required form are proposed.

Key words: perturbation method, Pade approximants, exact soliton-like solutions, nonlinear dynamics of continuous media

1. Введение

В задачах волновой динамики деформируемых сред с микроструктурой [1] часто приходится иметь дело с нелинейными уравнениями градиентного типа, содержащими слагаемые с пространственными производными высокого порядка, характеризующими нелинейность, дисперсию и диссипацию. В настоящее время существует класс эффективных методов построения точных солитоноподобных решений таких уравнений на основе их аналитической структуры [2]. При этом практически все процедуры реализуются вне методов возмущений [3]. Это понятно, так как солитоны, являясь существенно нелинейными образованиями, не могут быть получены ни в каком конечном порядке метода возмущений на основе линеаризованного решения [4, 5].

Цель данной статьи состоит в том, чтобы расширить представления о возможностях метода возмущений при решении нелинейных уравнений в частных производных и предложить эффективную методику построения их точных уединенно-волновых решений.

Рассмотрим уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ), используемое как базовое при изложении новых методов наиболее часто:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0.$$

Перейдя к «бегущей» переменной $z = kx - \omega t$, после интегрирования по z получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $u(z)$

$$u'' - \frac{\omega}{k^3}u + \frac{1}{2k^2}u^2 = 0, \tag{1}$$

решение которого построим в форме функционального ряда с формальным параметром ε:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k(z). \tag{2}$$

Подставив (2) в (1) и сгруппировав члены по степеням ε, придем к системе уравнений для функций u_k:

$$\begin{aligned}
&u_1'' - \frac{\omega}{k^3}u_1 = 0, && 1\\
&u_2'' - \frac{\omega}{k^3}u_2 = -\frac{1}{k^2}\frac{u_1^2}{2}, && 2\\
&u_3'' - \frac{\omega}{k^3}u_3 = -\frac{1}{k^2}u_1u_2, && 3\\
&u_4'' - \frac{\omega}{k^3}u_4 = -\frac{1}{k^2}\left(u_1u_3 + \frac{u_2^2}{2}\right), \quad \ldots . && 4
\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение $(3)_1$ системы является однородным и имеет частное решение $u_1 = \exp(z)$ при условии $\omega = k^3$, представляющем собой дисперсионное соотношение линеаризованной задачи (1). Структура правых частей остальных уравнений позволяет отыскать их решения в форме $u_n = K_n u_1^n$, где n — номер уравнения, K_n — постоянный множитель. Последовательно проанализировав уравнения, начиная с $(3)_2$, определим множители K_n и придадим выражению (2) форму степенного ряда

$$u = y - \frac{y^2}{6k^2} + \frac{y^3}{48k^4} - \frac{y^4}{432k^6} + \frac{5y^5}{20736k^8} - \frac{y^6}{41472k^{10}} + \ldots, \tag{4}$$

где $y = \varepsilon u_1$.

Заметим, что на этом этапе проделанные выше очевидные действия дублируют результаты Хироты, приведенные во введении его основной статьи [6], содержащей изложение знаменитого билинейного метода построения N-солитонных решений и преобразований Бэклунда. Хирота отмечает, что ряды вида (4) «…не сходятся быстро и даже расходятся. …Хотя мы можем построить Паде-аппроксиманту прямо из степенного ряда (4), значительно интереснее преобразовать первоначальное уравнение к специальному виду, удобному для использования Паде-аппроксиманты» [6]. Объектом дальнейшего рассмотрения будет ряд (4), непосредственно возникший при решении уравнения КдВ методом возмущений.

Как известно, диагональные аппроксиманты Паде являются наилучшими приближениями суммы степенного ряда [7]. Диагональную аппроксиманту [N/N] для ряда (4) представим в виде рациональной дроби, числитель и знаменатель которой есть полные многочлены порядка N с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{a_0 + a_1 y + \ldots + a_N y^N}{1 + b_1 y + \ldots + b_N y^N}. \tag{5}$$

Для отыскания этих коэффициентов приведем к общему знаменателю разность выражений (4) и (5) и сгруппируем слагаемые в числителе по степеням y. Приравняв нулю первые $2N+1$ таких слагаемых, получим систему линейных уравнений для установления коэффициентов (5). По найденным таким образом выражениям для нескольких первых диагональных аппроксимант ряда (4)

$$[1/1]=\frac{6k^2y}{6k^2+y},\quad [2/2]=\frac{144k^4y}{\left(12k^2+y\right)^2},\quad [3/3]=\frac{144k^4y}{\left(12k^2+y\right)^2},\quad [4/4]=\frac{144k^4y}{\left(12k^2+y\right)^2},\quad \ldots$$

видно, что начиная с порядка [2/2], они перестают изменяться. Это означает, что ряд (4) является геометрическим, и аппроксиманта [2/2] дает его точную сумму. Действительно, представив [2/2] в форме суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$[2/2]=\frac{144k^4y}{\left(12k^2+y\right)^2}=\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+aq^3+\ldots, \tag{6}$$

где $a=y$, $q=-\frac{y}{6k^2}-\frac{y^2}{144k^4}$, легко проверить, что ряды (4) и (6) совпадают.

После обратной замены $y=\varepsilon\exp\left(kx-\omega t\right)$ из аппроксиманты [2/2] вытекает известное односолитонное решение уравнения КдВ:

$$u=\frac{144k^4\varepsilon\exp\left(kx-k^3t\right)}{\left(12k^2+\varepsilon\exp\left(kx-k^3t\right)\right)^2}=3k^2\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\left(kx-k^3t+\ln\left(\frac{\varepsilon}{12k^2}\right)\right)\right). \tag{7}$$

Напомним, что к ведущим членам [2] эволюционных уравнений относятся слагаемые со старшей производной и старшей нелинейностью, то есть u'' и $u^2/\left(2k^2\right)$ в случае уравнения (1). Подставив в них вместо u степенную функцию αy^{β}, найдем, что равенство ведущих членов достигается при $\beta=-2$, следовательно, решение уравнения (1) обладает полюсом второго порядка. Физический смысл приравнивания ведущих членов состоит в том, что для существования солитоноподобного решения необходимо, чтобы дисперсия и нелинейность, характеризуемые ими, компенсировали друг друга. Решение (7), последовавшее из аппроксиманты [2/2], также имеет полюс второго порядка. Таким образом, анализ ведущих членов уравнения позволил установить младшую аппроксиманту [N/N], начиная с которой следует искать последовательность совпадающих аппроксимант.

Другими словами, применение диагональных аппроксимант Паде перестраивает ряд метода возмущений для уравнения КдВ в геометрический таким образом, что сумма ряда совпадает с соответствующей аппроксимантой и дает точное решение исходного уравнения. Основной результат здесь состоит в том, что точное солитонное решение возникает не в каком-то конечном порядке, а в предельном случае — в виде суммы геометрического ряда метода возмущений. Этот результат носит принципиальный характер: он не опровергает тезис о невозможности получения солитона в конечном порядке метода возмущений, но определяет точное солитонное решение как сумму ряда при условии его геометричности.

С вычислительной точки зрения метод возмущений при отыскании точных решений уравнений нелинейной волновой динамики состоит из двух последовательных этапов: построения степенного ряда и требования его геометричности. Критерием геометричности ряда служит постоянство значений последовательных диагональных аппроксимант Паде, минимальный порядок которых обуславливается порядком полюса искомого решения, и сумма ряда представляет собой точное решение исходного уравнения. Заметим, что для эффективного использования данного критерия нужно, чтобы соответствующий степенной ряд содержал все натуральные степени переменной.

Как правило, метод возмущений для неинтегрируемых уравнений с постоянными коэффициентами приводит к слишком громоздким степенным рядам, что затрудняет вычисления с ними в ручном режиме. Зачастую выражениями для аппроксимант Паде порядков выше [3/3] непросто оперировать даже с использованием современных компьютерных систем символьной математики типа Maple или Mathematica. Кроме того, для применения метода возмущений с аппроксимантами Паде необходимо, чтобы степенной ряд соответствовал функции с полюсом целого порядка. Поэтому, если ряд характеризует функцию с полюсом нулевого, дробного или целого порядка выше второго, следует преобразовать ряд таким образом, чтобы он соответствовал функции с полюсом первого или второго порядка. Для этого ряд метода возмущений можно почленно продифференцировать, возвести в рациональную степень, обратить.

2. Решения уравнения нелинейной волновой динамики зернистых сред

Рассмотрим уравнение с кубической нелинейностью для компоненты поперечного смещения $w(\tau,\xi)$ в континуальной модели цепочки круглых частиц, выведенное в [8] при моделировании распространения волн в зернистых средах:

$$w_{\tau\tau} - Aw_{\xi\xi} - Bw_{\tau\tau\xi\xi} + Cw_{\xi\xi\xi\xi} \pm Dw_{\xi}^{2}w_{\xi\xi} = 0. \tag{8}$$

Уравнения типа (8) часто возникают при асимптотическом упрощении систем уравнений движения стержней, пластин и оболочек. Такие уравнения, иногда называемые уравнениями с «двумя дисперсиями» [9], описывают широкий спектр динамических процессов: от изгибных волн в упругих системах до продольных волн в нелинейно-упругих средах. В последнем случае степень нелинейности соответствует конкретной форме нелинейного закона Гука.

Пусть уравнение характеризуется произвольным параметром нелинейности n:

$$w_{\tau\tau} - Aw_{\xi\xi} - Bw_{\tau\tau\xi\xi} + Cw_{\xi\xi\xi\xi} + Dw_{\xi}^{n}w_{\xi\xi} = 0, \tag{9}$$

так что (8) представляет собой его частный случай при $n = 2$. С использованием прямого метода возмущений, обоснованного выше, построим классы точных решений уравнения (9) при различных n и сравним их с точным решением, приведенным в [8]. Посчитав коэффициенты в (9) положительными, в результате масштабирования зависимой и независимых переменных

$$v = \frac{1}{\sqrt{B}}\sqrt[n]{\frac{D}{A}}\,w, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{B}}\xi, \qquad t = \sqrt{\frac{A}{B}}\tau$$

приведем это уравнение к виду:

$$v_{tt} - v_{xx} - v_{ttxx} + \alpha v_{xxxx} + v_{x}^{n}v_{xx} = 0, \tag{10}$$

где $\alpha = C/(AB)$.

Перейдя в (10) к бегущей переменной $z = kx - \omega t$, произведем замену зависимой переменной $v(z) = \int u(z)dz$ и проинтегрируем полученное уравнение по z. Придем к уравнению для функции $u(z)$, пропорциональной компоненте деформации среды:

$$u'' + \delta u + \lambda u^{n+1} + C_0 = 0, \tag{11}$$

где C_0 — постоянная интегрирования, а коэффициенты δ и λ равны

$$\delta = \frac{\omega^2 - k^2}{k^2\left(\alpha k^2 - \omega^2\right)}, \qquad \lambda = \frac{k^n}{(n+1)\left(\alpha k^2 - \omega^2\right)}. \tag{12}$$

Заметим, что полученное из КдВ уравнение (1) есть частный случай (11).

Рассмотрим далее уравнение (9) при разных значениях параметра n.

2.1. Параметр нелинейности $n = 1$

В стандартном методе возмущений величина ε в (2) есть малый параметр, поэтому к разложению (2) можно относиться как к решению в окрестности нуля. Отыщем более общее решение в окрестности произвольной константы E, которому соответствует выражение

$$u = E + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k u_k(z). \tag{13}$$

Подставив (13) в (11), при нулевом порядке по ε получим $E^2\lambda + E\delta + C_0 = 0$, откуда $C_0 = -E^2\lambda - E\delta$, при следующих порядках, соответственно,

$$
\begin{aligned}
&u_1'' + (2\lambda E + \delta)u_1 = 0, && 1\\
&u_2'' + (2\lambda E + \delta)u_2 = -\lambda u_1^2, && 2\\
&u_3'' + (2\lambda E + \delta)u_3 = -2\lambda u_1 u_2, \quad \ldots . && 3
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Из уравнения $(14)_1$ найдем $u_1 = \exp(z)$ при условии $E = -(1+\delta)/(2\lambda)$. Последовательно определив $u_2, u_3, \ldots$ из системы (14) и обозначив $y = \varepsilon u_1$, придем к уравнению

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k = y - \frac{\lambda y^2}{3} + \frac{\lambda^2 y^3}{12} - \frac{\lambda^3 y^4}{54} + \frac{5\lambda^4 y^5}{1296} - \frac{\lambda^5 y^6}{1296} + \ldots \qquad (15)
$$

Решение уравнения (11) при $n = 1$ обладает полюсом второго порядка. Диагональные аппроксиманты Паде в разложении (15) равняются

$$
[1/1] = \frac{3y}{\lambda y + 3}, \quad [2/2] = \frac{36y}{(\lambda y + 6)^2}, \quad [3/3] = \frac{36y}{(\lambda y + 6)^2}, \quad \ldots,
$$

откуда видно, что они сохраняют постоянство, начиная с порядка [2/2]. Следовательно, ряд (15) — геометрический, его сумма совпадает с аппроксимантой [2/2]. Точное решение уравнения (11) выглядит как

$$
u = -\frac{1+\delta}{2\lambda} + \frac{36\varepsilon\, e^z}{(\lambda\varepsilon\, e^z + 6)^2},
$$

является ограниченным при $\lambda\varepsilon > 0$ и по форме представляет из себя солитон со сдвигом. Соответствующее решение уравнения в частных производных (10) дает компоненту смещения v

$$
v = -\frac{1+\delta}{2\lambda}(kx - \omega t) - \frac{36}{\lambda(\lambda\varepsilon\, e^{kx-\omega t} + 6)} + C,
$$

где δ и λ выражаются через коэффициент α и произвольные параметры k, ω посредством (12), C — постоянная интегрирования. Данное решение при $\delta = -1$ имеет форму обычного кинка.

2.2. Параметр нелинейности $n = 2$

По аналогии с предыдущим случаем при нулевом порядке по ε постоянная интегрирования записывается как $C_0 = -E^3\lambda - E\delta$. При следующих порядках

$$
\begin{aligned}
&u_1'' + (3\lambda E^2 + \delta)u_1 = 0, && 1\\
&u_2'' + (3\lambda E^2 + \delta)u_2 = -3E\lambda u_1^2, && 2\\
&u_3'' + (3\lambda E^2 + \delta)u_3 = -6E\lambda u_1 u_2 - \lambda u_1^3, \quad \ldots . && 3
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Из уравнения $(16)_1$ найдем $u_1 = \exp(z)$ при

$$
\delta = -3\lambda E^2 - 1. \qquad (17)
$$

Разрешив последующие уравнения системы (16), получим

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k = {} & y - \lambda E y^2 + \frac{\lambda}{8}(6\lambda E^2 - 1)y^3 - \frac{\lambda^2 E}{4}(2\lambda E^2 - 1)y^4 + \\
& + \frac{\lambda^2}{64}(20\lambda^2 E^4 - 20\lambda E^2 + 1)y^5 - \frac{\lambda^3 E}{64}(6\lambda E^2 - 1)(2\lambda E^2 - 3)y^6 + \ldots .
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

При $n = 2$ решение уравнения (11) имеет полюс первого порядка. Проверка показывает, что начиная с [2/2], все диагональные аппроксиманты Паде для (18) остаются неизменными, равными

$$\frac{8y}{\lambda\left(2\lambda E^2+1\right)y^2+8\lambda Ey+8},$$

и дают точное решение уравнения (11):

$$u=E+\frac{8\varepsilon\,\mathrm{e}^z}{\lambda\left(2\lambda E^2+1\right)\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{2z}+8\lambda E\varepsilon\,\mathrm{e}^z+8}. \qquad (19)$$

Выразив постоянную E из (17), решение (19) можно представить в форме, содержащей только коэффициенты уравнения (11):

$$u=\pm\frac{\sqrt{-\lambda\left(\delta+1\right)}}{\sqrt{3}\lambda}+\frac{8\varepsilon\,\mathrm{e}^z}{\frac{\lambda}{3}\left(1-2\delta\right)\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{2z}\pm\frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{-\lambda\left(\delta+1\right)}\varepsilon\,\mathrm{e}^z+8}. \qquad (20)$$

Проинтегрировав (19) по z и вернувшись к переменным x и t, получим решение уравнения (10)

$$v=\left(kx-\omega t\right)E+\sqrt{\frac{8}{\lambda}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{4}\left(\left(2\lambda E^2+1\right)\varepsilon\,\mathrm{e}^{kx-\omega t}+4E\right)\right),$$

где λ определяется из (12). Решение (20) содержит четыре свободных параметра: ε, E, k, ω, и при $E=0$ сводится к решению, приведенному в [8].

2.3. Список точных решений при различных значениях параметра нелинейности

Точные решения уравнения (11), найденные предложенным методом при различных значениях *n*, сведены в таблицу, где p обозначает порядок полюса решения.

Таблица. Точные решения уравнения (11)

Параметр нелинейности n	Порядок полюса p	Соотношения между постоянными	Вид точных решений
1	2	$C_0=\frac{\delta^2-1}{4\lambda}$	$u=-\frac{1+\delta}{2\lambda}+\frac{6^2\varepsilon\,\mathrm{e}^z}{\left(\lambda\varepsilon\,\mathrm{e}^z+6\right)^2}$
2	1	$C_0=\pm\frac{\left(1-2\delta\right)\sqrt{-\lambda\left(\delta+1\right)}}{3\sqrt{3}\lambda}$	$u=\pm\frac{\sqrt{-\lambda\left(\delta+1\right)}}{\sqrt{3}\lambda}+\frac{8\varepsilon\,\mathrm{e}^z}{\frac{\lambda}{3}\left(1-2\delta\right)\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{2z}\pm\frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{-\lambda\left(\delta+1\right)}\varepsilon\,\mathrm{e}^z+8}$
3	$\frac{2}{3}$	$C_0=0$, $\delta=-1$	$u=\frac{10^{2/3}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^z}{\left(\lambda\,\varepsilon^3\,\mathrm{e}^{3z}+10\right)^{2/3}}$
4	$\frac{1}{2}$	$C_0=0$, $\delta=-1$	$u=\frac{\sqrt{12}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^z}{\sqrt{\lambda\varepsilon^4\,\mathrm{e}^{4z}+12}}$
$\frac{1}{2}$	4	$C_0=0$, $\delta=-4$	$u=\frac{20^4\,\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{2z}}{\left(\lambda\varepsilon\,\mathrm{e}^z+20\right)^4}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$C_0=0$, $\delta=-4$	$u=\frac{28^{4/3}\,\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{2z}}{\left(\lambda\varepsilon^3\,\mathrm{e}^{3z}+28\right)^{4/3}}$

Заметим, что в случаях дробного порядка полюса $p=a/b$ перед вычислением аппроксимант Паде ряд метода возмущений следует возвести в степень b; при $n=1/2$ и $n=3/2$ для избавления от радикалов в уравнении (11) необходимо перейти к новой зависимой переменной $U\left(z\right)=\sqrt{u\left(z\right)}$. Таким образом, в отличие от большинства методов нелинейной математической физики [2], предложенный метод в случае дробного порядка полюса решения не требует предварительного преобразования исходного уравнения для получения полюса целого порядка — вместо этого достаточно возвести ряд метода возмущений в соответствующую степень.

3. Решения обобщенного неинтегрируемого уравнения 6-го порядка

Рассмотрим обобщение уравнения (8), содержащее дополнительный член с шестой производной, характеризующий высокочастотную дисперсию

$$u_{tt} - au_{xx} - bu_{ttxx} - cu_{xxxx} \pm f^2 u_x^2 u_{xx} - u_{xxxxxx} = 0. \tag{21}$$

Подобные уравнения возникают в задачах для сплошных сред с микроструктурой и деформируемых систем с конструктивной неоднородностью. Например, в [10] уравнение типа (21) выведено при исследовании продольных волн для компоненты продольного перемещения нелинейно-упругой ребристой цилиндрической оболочки.

Сначала исследуем (21) со знаком «–» перед нелинейным слагаемым. В соответствии с [8], такой выбор соответствует случаю «жесткой» нелинейности среды. Применим метод возмущений непосредственно к уравнению (21) и будем строить его решение в форме

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k\left(x,t\right). \tag{22}$$

Подставив (22) в (21) и сгруппировав по степеням ε, получим систему для функций $u_k\left(x,t\right)$:

$$\begin{array}{rr} u_{1tt} - au_{1xx} - bu_{1ttxx} - cu_{1xxxx} - u_{1xxxxxx} = 0, & 1 \\ u_{2tt} - au_{2xx} - bu_{2ttxx} - cu_{2xxxx} - u_{2xxxxxx} = 0, & 2 \\ u_{3tt} - au_{3xx} - bu_{3ttxx} - cu_{3xxxx} - u_{3xxxxxx} = f^2 u_{1x}^2 u_{1xx}, & 3 \\ u_{4tt} - au_{4xx} - bu_{4ttxx} - cu_{4xxxx} - u_{4xxxxxx} = f^2\left(u_{1x}^2 u_{2xx} + 2u_{1x}u_{2x}u_{1xx}\right), & 4 \\ u_{5tt} - au_{5xx} - bu_{5ttxx} - cu_{5xxxx} - u_{5xxxxxx} = f^2\left(u_{1x}^2 u_{3xx} + 2u_{1x}u_{2x}u_{2xx} + \left(2u_{1x}u_{3x} + u_{2x}^2\right)u_{1xx}\right),\ldots & 5 \end{array} \tag{23}$$

из уравнения $(23)_1$ которой найдем $u_1 = \exp\left(kx - \omega t\right)$, при условии, что связь между ω и k задается дисперсионным соотношением

$$\omega = \pm k\sqrt{\frac{k^4 + ck^2 + a}{1 - bk^2}}. \tag{24}$$

Для того, чтобы установить решения оставшихся уравнений системы (23) с номерами $n = 2, 3, \ldots$ в форме $u_n = K_n u_1^n$, необходимо положить равными нулю коэффициенты K_n с четными индексами n. Разрешив уравнения с нечетными номерами, для ряда (22), с учетом $y = \varepsilon u_1$, придем к выражению:

$$\begin{gathered} u = y - \frac{f^2\left(1 - bk^2\right)y^3}{72\left(-9bk^4 + ab + 10k^2 + c\right)} + \frac{f^4\left(1 - bk^2\right)^2 y^5}{2880\left(-9bk^4 + ab + 10k^2 + c\right)\left(-25bk^4 + ab + 26k^2 + c\right)} - \\ - \frac{f^6\left(1 - bk^2\right)^3\left(-17bk^4 + ab + 18k^2 + c\right)y^7}{96768\left(-9bk^4 + ab + 10k^2 + c\right)^2\left(-25bk^4 + ab + 26k^2 + c\right)\left(-49bk^4 + ab + 50k^2 + c\right)} + \ldots \end{gathered} \tag{25}$$

Преобразуем ряд (25) таким образом, чтобы он стал содержать все натуральные степени переменной y. Для этого умножим его почленно на y и введем обозначение $\gamma = y^2$. Аппроксиманта [1/1] полученного ряда запишется как

$$[1/1] = \frac{\gamma}{1 + \dfrac{f^2\left(1 - bk^2\right)\gamma}{72\left(-9bk^4 + ab + 10k^2 + c\right)}}.$$

Выражения для следующих аппроксимант [2/2], [3/3], … не приводим ввиду их громоздкости.

Анализ ведущих членов уравнения (21) позволяет заключить, что его решение имеет полюс 1-го порядка. Требование равенства последовательных диагональных аппроксимант, начиная с [1/1], приводит к условию

$$c = -11bk^4 - ab + 10k^2. \tag{26}$$

При выполнении (26) все аппроксиманты равны $1440k^2\gamma \big/ \left(f^2\gamma + 1440k^2 \right)$ и предоставляют выражение для точного решения уравнения (21):

$$u = \frac{1440\varepsilon k^2 e^{kx-\omega t}}{f^2\varepsilon^2 e^{2kx-2\omega t} + 1440k^2} = \frac{6k\sqrt{10}}{f}\operatorname{sech}\left(kx - \omega t + \ln\left(\frac{\varepsilon f}{12k\sqrt{10}} \right) \right), \tag{27}$$

где ω определяется равенством (24).

Заметим, что решение (28), имеющее форму классического солитона (бегущего импульса), не может быть получено с использованием методов укороченных разложений, гиперболического тангенса, простейших уравнений [2], логистической функции [11]. Аналогичная ситуация наблюдается для модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза (мКдВ), при поиске уединенно-волновых решений которого перечисленные методы выявляют одну из двух ветвей, соответствующую гиперболическому тангенсу. Решение в виде гиперболического секанса определяется методами Хироты [6], методом проективных уравнений Риккати [12], sech-методом [13], однако анализ эффективности их применения для неинтегрируемых уравнений типа (21) является проблемой, исследование которой выходит за рамки настоящей статьи. В предлагаемом методе возмущений с аппроксимантами Паде решение (27) возникает естественно в результате его поиска в окрестности нуля.

Теперь рассмотрим случай «мягкой» нелинейности, когда в (21) перед соответствующим слагаемым стоит знак «$+$». Отыскание решения по методу возмущений в окрестности линейной функции Ex, тождественно удовлетворяющей уравнению (21), в форме

$$u = Ex + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k\left(x,t \right), \tag{28}$$

для функций $u_k\left(x,t \right)$ дает систему уравнений

$$\begin{gathered}
u_{1tt} + \left(f^2E^2 - a \right)u_{1xx} - bu_{1ttxx} - cu_{1xxxx} - u_{1xxxxxx} = 0, \qquad 1\\
u_{2tt} + \left(f^2E^2 - a \right)u_{2xx} - bu_{2ttxx} - cu_{2xxxx} - u_{2xxxxxx} = -2f^2Eu_{1x}u_{1xx}, \qquad 2\\
u_{3tt} + \left(f^2E^2 - a \right)u_{3xx} - bu_{3ttxx} - cu_{3xxxx} - u_{3xxxxxx} = -f^2\left(2Eu_{1x}u_{2xx} + \left(u_{1x}^2 + 2Eu_{2x} \right)u_{1xx} \right), \qquad 3\\
u_{4tt} + \left(f^2E^2 - a \right)u_{4xx} - bu_{4ttxx} - cu_{4xxxx} - u_{4xxxxxx} = -f^2\left(2Eu_{1x}u_{3xx} + 2\left(u_{1x}u_{2x} + 2Eu_{3x} \right)u_{1xx} + \left(u_{1x}^2 + 2Eu_{2x} \right)u_{2xx} \right),\ldots \qquad 4
\end{gathered} \tag{29}$$

Уравнение $(29)_1$ системы имеет решение $u_1 = \exp\left(kx - \omega t \right)$ при условии

$$\omega = \pm k\sqrt{\frac{E^2f^2 - k^4 - ck^2 - a}{bk^2 - 1}}. \tag{30}$$

Решив оставшиеся уравнения системы (29) относительно функций $u_k\left(x,t \right)$, для ряда из (28) получим

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k\left(x,t \right) = y + \frac{f^2E\left(bk^2 - 1 \right)y^2}{6k\left(E^2bf^2 + 4bk^4 - ab - 5k^2 - c \right)} + \\
+ \frac{f^2\left(bk^2 - 1 \right)\left(3E^2bf^2k^2 + 4bk^6 - 2E^2f^2 - abk^2 - 5k^4 - ck^2 \right)y^3}{72k^2\left(E^2bf^2 + 4bk^4 - ab - 5k^2 - c \right)\left(E^2bf^2 + 9bk^4 - ab - 10k^2 - c \right)} + \ldots
\end{gathered} \tag{31}$$

Вычислив диагональные аппроксиманты Паде для ряда (31)

$$[1/1]=\frac{y}{1-\dfrac{f^2E\left(bk^2-1\right)y}{6k\left(E^2bf^2+4bk^4-ab-5k^2-c\right)}}, \dots,$$

потребуем их равенства, начиная с [1/1], как и в предыдущем случае. При выполнении условия

$$c=\sqrt{10}Ef\left(bk^2-1\right)+E^2bf^2+4bk^4-ab-5k^2,$$

все аппроксиманты равны $6\sqrt{10}k\,y\big/\left(f\,y+6\sqrt{10}k\right)$ и дают точное решение уравнения (21):

$$u=Ex+\frac{6\sqrt{10}k\varepsilon\,e^{kx-\omega t}}{6\sqrt{10}k+f\varepsilon\,e^{kx-\omega t}}, \tag{32}$$

где ω определяется из (30). При $E=0$ решение (32) имеет форму бегущего фронта (кинка).

Данные результаты установлены при верхних знаках для ω в формулах (24) и (30).

4. Заключение

В статье предложен вычислительный метод получения точных решений эволюционных уравнений нелинейной волновой динамики сплошных сред, состоящий в построении степенного ряда метода возмущений и удовлетворении требования его геометричности. Показано, что солитоноподобные решения интегрируемых и неинтегрируемых уравнений представляют собой суммы геометрических рядов метода возмущений. Для уравнения, описывающего распространение нелинейных волн в зернистых средах, найдены точные солитоноподобные решения при различных значениях параметра нелинейности. При суммировании рядов метода возмущений используются их диагональные аппроксиманты Паде, порядки которых обуславливаются порядками полюсов решений уравнения. Для обобщенного неинтегрируемого уравнения 6-го порядка определены точные решения в виде бегущего фронта и бегущего импульса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00176-а).

Литература

1. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 328 с.
2. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. – Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010. – 368 с.
3. *Конт Р., Мюзетт М.* Уединенные волны нелинейных неинтегрируемых уравнений // Диссипативные солитоны / под. ред. Н. Ахмедиева, А. Анкевича. – М.: Физматлит, 2008. – С. 422-457. (English version DOI).
4. *Маневич Л.И.* Линейная и нелинейная математическая физика: от гармонических волн к солитонам // Соросовский образовательный журнал. – 1996. – № 1. – С. 86-93.
5. *Журавлев В.М.* Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией. Точно решаемые модели. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001. – 200 с.
6. *Hirota R.* Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons // Phys. Rev. Lett. – 1971. – vol. 27, no. 18. – P. 1192-1194. DOI
7. *Andrianov I.V., Awrejcewicz J.* New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods // Appl. Mech. Rev. – 2001. – Vol. 54, no. 1. – P. 69-92. DOI
8. *Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Павлов И.С.* Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 140-150. DOI
9. *Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В.* Отражение солитона продольной деформации от торца нелинейно-упругого стержня // ЖТФ. – 2001. – Т. 71, № 5. – С. 1-8. (English version DOI).
10. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // Акустический журнал. – 2001. – Т. 47, № 3. – С. 359-363. (English version DOI).
11. *Кудряшов Н.А.* Метод логистической функции для нахождения аналитических решений нелинейных дифференциальных уравнений // МАИС. – 2015. – Т. 22, № 1. – С. 23-37.
12. *Conte R., Musette M.* Link between solitary waves and projective Riccati equations // J. Phys. A-Math. Gen. – 1992. – vol. 25, no. 21. – P. 5609-5623. DOI
13. *Baldwin D., Goktas U., Hereman W., Hong L., Martino R.S., Miller J.C.* Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear PDEs // J. Symb. Comput. – 2004. – vol. 37, no. 6. – P. 669-705. DOI

References

1. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoj* [Wave processes in solids with microstructure]. Moscow: Moscow State University, 1999. 328 p.
2. Kudryashov N.A. *Metody nelinejnoj matematicheskoj fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny: Izd. dom “Intellekt”, 2010. 368 p.
3. Conte R., Musette M. Solitary waves of nonlinear nonintegrable equations. *Lecture Notes in Physics*, 2005, vol. 661, pp. 373-406. DOI
4. Manevich L.I. Linejnaya i nelinejnaya matematicheskaya fizika: ot garmonicheskikh voln k solitonam [Linear and nonlinear mathematical physics: from harmonic waves to solitons]. *Sorosovsky obrazovatel'ny zhurnal – Soros educational journal*, 1996, no. 1, pp. 86-93.
5. Zhuravlev V.M. Nelinejnye volny v mnogokomponentnykh sistemakh s dispersiej i diffuziej. Tochno reshaemye modeli [Nonlinear waves in multi-component systems with dispersion and diffusion. Exactly solvable models]. Ulyanovsk: Ulyanovsk State Univercity, 2001. 200 c.
6. Hirota R. Exact solution of the Korteweg–de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Phys. Rev. Lett*., 1971, vol. 27, no. 18, pp. 1192-1194. DOI
7. Andrianov I.V., Awrejcewicz J. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods. *Appl. Mech. Rev*., 2001, vol. 54, no. 1, pp. 69-92. DOI
8. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a granular medium. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 140-150. DOI
9. Dreiden G.V., Porubov A.V., Samsonov A.M., Semenova I.V. Reflection of a longitudinal strain soliton from the end face of a nonlinearly elastic rod. *Tech. Phys*., 2001, vol. 46, no. 5, pp. 505-511. DOI
10. Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Nonlinear waves in inhomogeneous cylindrical shells: a new evolution equation. *Acoust. Phys*., 2001, vol. 47, no. 3, pp 303-307. DOI
11. Kudryashov N.A. Method of the logistic function for finding analytical solutions of nonlinear differential equations. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, 2015, vol. 22, no. 1, pp. 23-37.
12. Conte R., Musette M. Link between solitary waves and projective Riccati equations. *J. Phys. A-Math. Gen*., 1992, vol. 25, no. 21, pp. 5609-5623. DOI
13. Baldwin D., Goktas U., Hereman W., Hong L., Martino R.S., Miller J.C. Symbolic computation of exact solutions expressible in hyperbolic and elliptic functions for nonlinear PDEs. *J. Symb. Comput*., 2004, vol. 37, no. 6, pp. 669-705. DOI

Поступила в редакцию 24.03.2016; опубликована в электронном виде 30.06.2016

Сведения об авторах

Землянухин Александр Исаевич, дфмн, проф., зав. каф., Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А. (СГТУ), 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77; e-mail: zemlyanukhinai@sstu.ru

Бочкарев Андрей Владимирович, ктн, доц., СГТУ; e-mail: ab2009sar@list.ru