

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.14

УДК 53.072.23:534.5

МОДИФИЦИРОВАННАЯ КЭМ-КЛЭЙ МОДЕЛЬ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Р.В. Гольдштейн, С.В. Кузнецов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

Анализируются основные уравнения и допущения, принимаемые при конструировании модифицированной Кэм-клэй модели. Отмечается связь модифицированной Кэм-клэй модели с родственными моделями теории пластичности с изотропным упрочнением, описываемыми замкнутыми поверхностями пластичности. Дается оценка уравнений состояния модификаций Кэм-клэй моделей в упругой зоне; выделены работы, в которых упругое состояние представляется уравнениями гиперупругости с экспоненциальным потенциалом. Рассматриваются обобщения модифицированных Кэм-клэй моделей на случай больших деформаций. Подчеркивается, что впервые Кэм-клэй модель с логарифмической поверхностью пластичности в докритической зоне построена в работах Роску, Скофилда и Роса. Позже предложено логарифмическую поверхность пластичности заменить эллипсоидальной. Такая модель также именуется модифицированной Кэм-клэй моделью. Как Кэм-клэй модель с логарифмической поверхностью, так и ее модификация с эллипсоидальной поверхностью относятся к упругопластическим моделям с изотропным упрочнением. Выявлены аналоги модификации Кэм-клэй моделей, в которых учитывается возможность моделирования эффекта Баушингера за счет сдвига поверхности пластичности с помощью комбинации изотропного и кинематического упрочнений. Приводится значительное число работ по применению как Кэм-клэй модели, так и ее модификаций для исследования поведения различных гранулированных материалов с малой когезией в условиях монотонных и циклических воздействий. Большая часть этих работ посвящена либо одноосному, либо трехосному силовому нагружению. Исходя из обзора публикаций делается вывод, что исследования по кинематическим комбинированным нагружениям в шаровой и девиаторной областях на основе Кэм-клэй модели практически отсутствуют. Именно этой проблеме посвящена настоящая работа.

Ключевые слова: Кэм-клэй модель, пластичность, гиперупругость, упрочнение, размягчение, когезия

MODIFIED CAM-CLAY MODEL. THEORETICAL FOUNDATIONS AND NUMERICAL ANALYSIS

R.V. Goldstein and S.V. Kuznetsov

Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

State equations and principle assumptions of a modified cam-clay model are analyzed. It is assumed that the modified cam-clay model is related to the plasticity models described by the isotropic hardening rules and closed yield surfaces. Equations of state in the elastic zone, along with models related to the hyperelastic equations of state with the exponential potential, are considered. Some generalizations of the modified cam-clay model for finite strains are performed. Works associated with the problems regarding calibration of theoretical modified cam-clay models with experimental data are reviewed. The first Clay-clay model with logarithmic surface plasticity in the critical zone was constructed in [1, 2]. Later on, the logarithmic surface plasticity was replaced by ellipsoidal one. This model is also called a modified Cam-clay model. The Cam-clay model and its modified variant belong to a class of the elastic-plastic models with isotropic hardening. It should be noted that there are also some modifications of the Cam-clay models, which take into account the possibility of modeling the Bauschinger effect by shifting surface plasticity using a combination of isotropic and kinematic hardening rules. There are a considerable number of works, in which the Cam-clay model and its modifications are used to study the behavior of various granular materials with low cohesion under monotonic or cyclic force loadings. Most of these works are devoted to uniaxial or triaxial force loading. This paper deals with analyzing the behavior of the modified Cam-Clay model under combined kinematic loadings.

Key words: Cam-clay model, plasticity, hyperelasticity, hardening, softening, cohesion

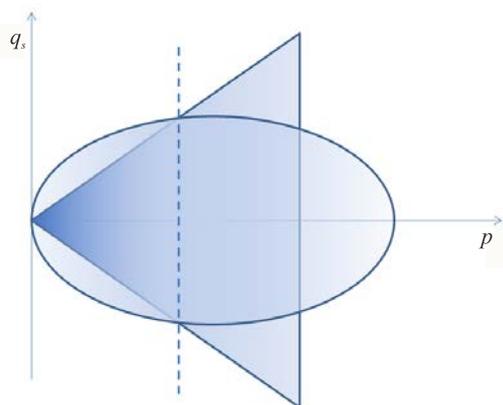


Рис. 1. Поверхность пластичности и критический конус для модифицированной Кэм-клэй модели; штриховая линия отвечает пересечению эллипсоидальной поверхности текучести с критическим конусом

1. Введение

Модель Кэм-клэй и ее модификация применяются при изучении безкогезионных или слабо когезионных грунтов. Впервые она построена в [1, 2] с использованием логарифмической поверхности пластичности в докритической зоне. Позже, в работе [3], предложено заменить логарифмическую поверхность пластичности эллипсоидальной (Рис. 1). Такая модель, именуемая модифицированной, как сама Кэм-клэй модель, относится к классу упругопластических моделей с изотропным упрочнением.

Имеется значительное число публикаций с применением модели Кэм-клэй и ее модификации для исследования поведения различных гранулированных материалов с малой

когезией в условиях монотонных [4–14] и циклических воздействий [15–26]. Большая часть цитируемых работ посвящена либо одноосному [27, 28], либо трехосному силовому нагружению [15–25].

В [15, 19, 25] предложен аналог модифицированной Кэм-клэй модели с кинематическим упрочнением, что позволяет учитывать в расчетах эффект Баушингера. В некоторых моделях вводятся дополнительные параметры, учитывающие частоту циклических воздействий, а также деградацию материала [17, 26–28].

В данной статье рассматривается приложение модифицированной Кэм-клэй модели к исследованию поведения среды в условиях циклического кинематического нагружения при линейной связи между напряжениями и деформациями в упругой области и отсутствии упрочнения при объемном деформировании.

2. Основные уравнения

В этом разделе представляются основные уравнения модифицированной Кэм-клэй модели для малых деформаций.

2.1. Основные обозначения

Приводимые в этом разделе формулы и обозначения даются для облегчения восприятия последующего материала. В дальнейшем потребуется:

– разложение произвольного симметрического тензора второго ранга $\mathbf{A} \in \text{sym}(R^3 \otimes R^3)$ на шаровую и девиаторную части

$$\mathbf{A}_{vol} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} \cdot \mathbf{A})) / 3, \quad \mathbf{A}_{dev} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{vol}, \quad (1)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор;

– инварианты тензора \mathbf{A}

$$I_A \equiv \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}, \quad II_A \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad III_A \equiv \det(\mathbf{A}). \quad (2)$$

Объединение (1) и (2) дает

$$II_{A_{dev}} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - I_A^2 / 3. \quad (3)$$

Декомпозиция (1) для тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензора малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ записывается в несколько ином виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{s}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -(\theta\mathbf{I})/3 + \mathbf{e}, \quad (4)$$

где

$$p = -I_\sigma / 3, \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}_{dev}, \quad \theta = -I_\varepsilon, \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е 1. В теориях упругости и пластичности знак объемной деформации θ обычно принимается таким же, как знак соответствующего первого инварианта I_ε , однако в Кэм-клэй модели (и некоторых других моделях критического состояния) знак θ берется противоположным знаком первого инварианта (по аналогии со знаком давления, см. (5)).

Согласно определениям (2)–(5) удобно ввести следующие нормы для девиаторов напряжений и деформаций:

$$q_s = \sqrt{II_s}, \quad q_e = \sqrt{II_e}. \quad (6)$$

Наряду с нормами (6) далее потребуются параметры, основанные на этих нормах (6) [29]:

$$q_s^\pm = \text{sign}(f(\boldsymbol{\sigma}))\sqrt{II_s}, \quad q_e^\pm = \text{sign}(f(\boldsymbol{\varepsilon}))\sqrt{II_e}, \quad (7)$$

где $f(\bullet)$ — функция соответствующих тензорных инвариантов (в большинстве приложений функция $f(\bullet)$ выбирается совпадающей с первым инвариантом [29]).

Вместо норм (6) в теориях пластичности используются также девиаторные нормы, известные как напряжения и деформации Треска:

$$t_s = \sigma_1 - \sigma_3, \quad t_{\mathbf{e}_{dev}} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3. \quad (8)$$

Здесь σ_k, ε_k — главные компоненты тензоров, ранжированные по убыванию ($k = 1, 3$). По аналогии с (7) вводятся параметры t_s^\pm и t_e^\pm .

2.2. Упругое состояние

Тензор деформаций можно разбить на упругую и пластическую составляющие :

$$\mathbf{\varepsilon} = \mathbf{\varepsilon}^p + \mathbf{\varepsilon}^e. \quad (9)$$

В случае упругих деформаций закон состояния в Кэм-клэй моделях формулируется по-разному: – либо в виде линейной связи между напряжениями и деформациями

$$\boldsymbol{\sigma} = K_e \theta^e \mathbf{I} + 2\mu_e \mathbf{e}^e, \quad (10)$$

где K_e и μ_e — упругие объемный и сдвиговой модули соответственно; – либо как гипоупругие соотношения вида [3, 6]

$$\begin{cases} d \ln \frac{p - p_t}{p_0 - p_t} = K_e d\theta^e, & 1 \\ d\mathbf{s} = 2\mu_e d\mathbf{e}^e, & 2 \end{cases} \quad (11)$$

при этом $p_t \leq 0$ — нижняя граница давлений, параметр, позволяющий избежать сингулярности в уравнении (11₁) при малых p ; p_0 — начальное давление при $\theta^e = 0$; – либо в форме гиперупругого потенциала [8, 9]

$$W = p_0 k \left(1 + \frac{\alpha}{k} II_{e^e} \right) \exp(\theta^e/k), \quad (12)$$

где k и α — безразмерные константы, соответствующие объемному и сдвиговому модулям. Потенциал (12) дает следующие уравнения состояния:

$$\begin{cases} p = p_0 \left(1 + \frac{\alpha}{k} II_{e^e} \right) \exp(\theta^e/k), & 1 \\ \mathbf{s} = 2\alpha p_0 \exp(\theta^e/k) \cdot \mathbf{e}^e, & 2 \end{cases} \quad (13)$$

при этом уравнение (13₂) дает экспоненциальную зависимость сдвигового модуля от объемной деформации θ^e : $2\alpha p_0 \exp(\theta^e/k)$.

З а м е ч а н и е 2.

а) гипоупругие соотношения (11) могут быть записаны в терминах инкрементов $dp, d\theta^e$:

$$dp = K_e^*(p) d\theta^e, \quad (14)$$

где $K_e^*(p) = (p - p_t)K_e$;

б) в гипоупругих соотношениях (11) сдвиговой модуль считается либо постоянным [17], либо определяется из (11) в предположении постоянства значения коэффициента Пуассона [7]:

$$\mu_e = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K_e^*(p). \quad (15)$$

Следует отметить, что случай постоянного коэффициента Пуассона и, значит, формула для модуля сдвига (15) представляются более реалистичными, чем условие неизменности модуля сдвига [7],

которое противоречит имеющимся экспериментальным данным, показывающим, что в процессе циклического деформирования именно коэффициент Пуассона сохраняет свое значение [9];
в) гипотеза об изотропии, заложенная в модель Кэм-клэй, соответствует общепринятым моделям механики гранулированных сред.

2.3. Поверхность пластичности

В модифицированных Кэм-клэй моделях поверхность пластичности описывается следующим уравнением [3, 6]:

$$f(p, q_s, p_c) \equiv \frac{1}{\beta} \left(\frac{p}{a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{q_s}{M a} \right)^2 - 1 = 0, \quad (16)$$

где β — безразмерный параметр, определяющий форму эллипсоида: так, в докритической зоне (в левой части эллипсоида) $\beta = 1$, в закритической зоне (в правой части) $\beta \leq 1$; M — безразмерный параметр, зависящий от угла раствора критического конуса, задающий размер эллипсоида по оси q_s ; a — параметр, обуславливающий размер эллипсоида по оси p :

$$a = p_c / (1 + \beta), \quad (17)$$

где p_c — текущее значение пластического давления.

2.4. Объемное упрочнение

В соответствии с [8, 11] объемное упрочнение может быть представлено в виде кусочно-линейного продолжения: соотношений (10); соотношений гипотезы (11); гиперупругого потенциала (12). Важно, что в моделях Кэм-клэй учитывается только объемное упрочнение, причем предполагается, что оно полностью определяет упрочнение гранулированной среды в девиаторной плоскости.

Объемное упрочнение в терминах кусочно-линейного продолжения уравнений (10) записывается в виде:

$$dp = K(p)d\theta, \quad K(p) = \begin{cases} K_e, & 0 < p < p_{c0}, \\ K_p, & p > p_{c0}, \end{cases} \quad (18)$$

где K_p — модуль упрочнения ($K_p < K_e$), а p_{c0} — значение давления, отвечающее началу пластического течения. Интегрирование уравнений (18) дает

$$p = \begin{cases} K_e \theta, & 0 < p < p_{c0}, \\ p_{c0} + K_p \theta_p, & p > p_{c0}, \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad (19)$$

где $\theta_p = \theta - \theta_{c0}$ и $\theta_{c0} = p_{c0} / K_e$. При разгрузке модуль $K(p)$ совпадает с модулем K_e .

Продолжение уравнений (11) для учета пластичности производится фактически теми же уравнениями: уравнение (11)₁, подобно (18), переписывается в терминах двух модулей [30, 31]:

$$d \ln \frac{p - p_t}{p_0 - p_t} = \begin{cases} K_e d\theta_e, & 0 < p < p_{c0}, \\ K_p d\theta_p, & p > p_{c0}. \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad (20)$$

З а м е ч а н и е 3. Аналогично уравнению (14), уравнение в (20)₂ можно записать в терминах касательного модуля:

$$dp = K_p^*(p) d\theta_p, \quad (21)$$

где $K_p^*(p) = (p - p_t) K_p$.

Кусочно-линейное продолжение гиперупругого потенциала (12) в зону пластичности осуществляется с помощью введения для параметров α и k зависимостей от давления при $p > p_{c0}$:

$$W = p_0 k(p) \left(1 + \frac{\alpha(p)}{k(p)} \Pi_e \right) \exp(\theta/k). \quad (22)$$

Наиболее простые выражения для $\alpha(p)$, $k(p)$ получаются в случае применения кусочно-постоянных функций:

$$k(p) = \begin{cases} k_e & 0 < p < p_{c0}, \\ k_p, & p > p_{c0}, \end{cases} \quad \alpha(p) = \begin{cases} \alpha_e & 0 < p < p_{c0}, \\ \alpha_p, & p > p_{c0}. \end{cases} \quad (23)$$

2.5. Закон пластического течения

Для описания пластического течения уравнение (16) должно быть дополнено соответствующим уравнением. В большинстве работ по Кэм-клэй пластичности [1–3, 7] принимается ассоциированный закон пластического течения. Это означает совпадение потенциала течения и уравнения для поверхности пластичности (16) в каждой точке поверхности $f(p, q_s, p_c) = 0$:

$$d\mathbf{\epsilon}_p = d\gamma \nabla_{\mathbf{\sigma}} f, \quad (24)$$

где $d\gamma$ — инкрементальный параметр пластического течения. Уравнение (24) можно представить в виде двух уравнений в терминах шаровых и девиаторных тензоров:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_p &\equiv d\gamma \nabla_s f(p, q_s, p_c), \\ d\theta_p &= 3d\gamma \partial_p f(p, q_s, p_c). \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $\nabla_s f$ — градиент по векторным компонентам, $\partial_p f$ — производная по давлению.

Из (25) после дифференцирования получается

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_p = d\gamma \frac{2\mathbf{s}}{M a^2}, & 1 \\ d\theta_p = d\gamma \frac{6}{\beta a} \left(\frac{p}{a} - 1 \right). & 2 \end{cases} \quad (26)$$

С учетом (17) уравнение (26)₂ принимает вид:

$$d\theta_p = d\gamma \frac{6(1+\beta)}{\beta p_c} \left(\frac{p(1+\beta)}{p_c} - 1 \right). \quad (27)$$

В предположении $p = p_c$ и, следовательно, $\mathbf{s} = 0$ из уравнения (27) следует:

$$d\theta_p = d\gamma \frac{6(1+\beta)}{p_c}. \quad (28)$$

Поскольку в точке $(p_c, 0)$ выполняется одно из условий упрочнения (18)–(23), уравнение (28) может быть записано в терминах пластического инкремента dp_c :

$$dp_c = d\gamma \frac{6(1+\beta)}{p_c} g(p_c), \quad (29)$$

где функция $g(p_c)$ определяется соответствующим уравнением упрочнения. Например, для уравнения (19)₂

$$g(p_c) = K_p. \quad (30)$$

Ввиду (29) инкремент $d\gamma$ находится из условия совместности Прагера:

$$\nabla_{\sigma} f \cdot d\sigma + \partial_{p_c} f dp_c = 0, \quad (31)$$

где $\nabla_{\sigma} f$ — градиент по всем компонентам напряжений.

Подстановка в (31) представления для dp_c (29) дает искомого уравнение для инкремента $d\gamma$:

$$d\gamma = -\frac{\nabla_{\sigma} f \cdot d\sigma}{\partial_{p_c} f} \cdot \frac{p_c}{6(1+\beta)g(p_c)}. \quad (32)$$

Итак, (32) — это уравнение, дополняющее уравнение пластического течения (26).

2.6. Дальнейшее развитие модифицированных Кэм-клэй моделей

Одна из модификаций, в которой эллипсоидальная поверхность пластичности заменена на более общую поверхность второго порядка, предложена в [32].

Следующее развитие Кэм-клэй моделей связано с концепцией ограничивающей поверхности (BS) [33]. Введение BS-поверхности позволяет охватить все допустимые в процессе нагружения поверхности пластичности. При этом модуль объемного упрочнения задается как функция расстояния между текущей поверхностью пластичности и BS-поверхностью. Дальнейшее обобщение этой теории известно как теория общей пластичности (General Plasticity, GP) Она усовершенствована в работах [34, 35] и позволяет рассматривать несколько BS-поверхностей. Как BS, так и GP модели обеспечивают гладкий переход от упругого к пластическому состоянию.

Модификация Кэм-клэй моделей для учета больших деформаций предложена в [9, 36, 37]. В [37] в рамках теории больших деформаций зависимость $\nu - \ln p$ бралась линейной, и принималось предположение о постоянстве модуля сдвига, а в [9, 36] построена аналогичная модель для постоянного коэффициента Пуассона ν .

Кэм-клэй модели можно считать частным случаем моделей с изотропным упрочнением и замкнутой поверхностью пластичности [38–42]. В этой связи они наследуют свойства таких моделей и им присущи те же ограничения, что и другим моделям кэп-пластичности: это, прежде всего, выраженная область упругих деформаций, ограниченная поверхностью текучести и принимаемый в большинстве исследований ассоциированный закон пластического течения. Надо отметить, что в работах [43–48] применяются модели с распределенной поверхностью пластичности (по терминологии [49] — модели с микропластичностью). В [50] приведен анализ Кэм-клэй и родственных моделей кэп-пластичности с точки зрения их соответствия поведению грунтов в реальных условиях. Вопросы численной реализации Кэм-клэй моделей обсуждаются в [51–53].

3. Результаты численного моделирования

Рассматривается модифицированная Кэм-клэй модель с поверхностью пластичности, описываемой уравнением (16), при отсутствии упрочнения и законе состояния в упругой зоне (10). В качестве модели среды выбран куб с кинематическими граничными условиями вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega_i} &= f_i(t), \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{n} \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, 6), \end{aligned} \quad (33)$$

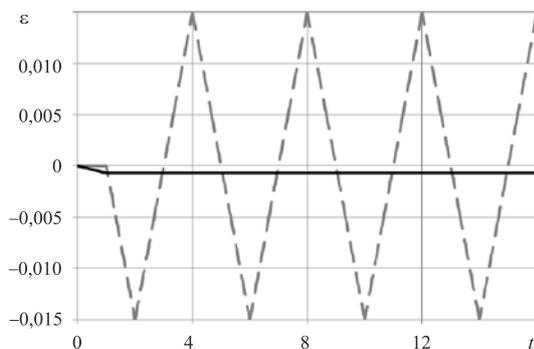


Рис. 2. Диаграммы кинематических нагружений: шаровая (ε – сплошная линия) и девиаторная (θ – штриховая линия) компоненты деформаций

где \mathbf{u} — перемещения, \mathbf{x} — векторная координата, t — параметр нагружения (безразмерное время), \mathbf{n} — вектор единичной внешней нормали к соответствующей грани куба $\partial\Omega_i$, $f_i(t)$ — идентификаторы программы нагружения (определяют величину смещений на каждой из граней куба).

Куб разбивался на конечные 8-узловые элементы с сокращенным интегрированием. Расчеты проводились для квазистатической постановки и при показанных на рисунке 2 временных диаграммах кинематических нагружений (изображены в терминах деформационных инвариантов (5)).

Считалось, что модельный материал куба характеризуется в упругой зоне объемным K_e и

сдвиговым μ_e модулями (в МПа):

$$K_e = 0,67; \quad \mu_e = 0,4. \quad (34)$$

Параметры эллипсоида, определяющие поверхность текучести (16), имели значения

$$\beta = 1, \quad M = 1, \quad p_{c0} = \text{var}. \quad (35)$$

Ввиду (35) параметр a , задающий положение центра эллипсоида, вычислялся по формуле: $a = p_{c0}/2$. Варьируемая величина p_{c0} позволила размещать достигнутое в программе нагружения давление (упругое) $p = K_e \theta(1)$ либо в докритической (сухой) зоне — при $p < a$, либо в сверхкритической (влажной) зоне — при $a < p \leq p_{c0}$. В качестве девиаторной меры для напряжений (деформаций) ниже используются (8) — напряжения Треска.

З а м е ч а н и е 4. Докритической (сухой) зоной называется зона, лежащая левее показанной на рисунке 1 вертикальной пунктирной линии, по которой сопрягаются эллипсоидальные поверхности, а сверхкритическая (влажная) зона располагается правее этой линии. Если в докритической зоне при постоянной шаровой части деформаций и достижении девиаторными компонентами поверхности течения происходит увеличение гидростатического давления, то в сверхкритической зоне при тех же условиях имеет место уменьшение гидростатического давления. Такая модель отражает наблюдаемое в экспериментах поведение гранулированных материалов [2–3].

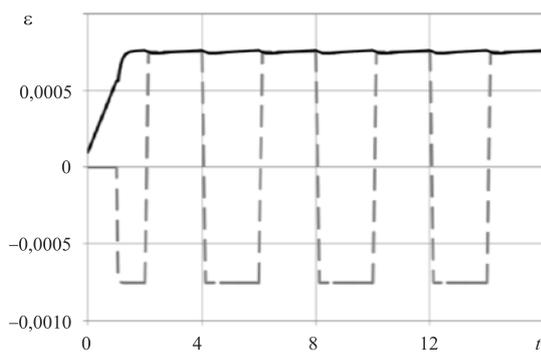


Рис. 3. Субкритическая зона: изменение девиаторных компонент напряжений и давления (в МПа) от времени: штриховая линия – напряжения Треска; сплошная линия – гидростатическое давление

3.1. Девиаторное нагружение в субкритической зоне ($p < a$)

При $p_{c0} = 0,00075$ и значении K_e (34) объемная составляющая деформации, равная $\theta(1) = 0,0003$, отвечает давлению $p = 0,0002 < a$. Графики изменения девиаторных компонент напряжений и давления от времени показаны на рисунке 3.

На рисунке 3 обращает на себя внимание: а) постоянство значений предела текучести для девиаторных компонент напряжений; б) появление зоны упрочнения на этапе давления, отвечающей первому этапу девиаторного нагружения.

3.2. Девиаторное нагружение в сверхкритической зоне ($a < p \leq p_{c0}$)

При $p_{c0} = 0,01$ и K_e из (34) объемная составляющая деформации, равная $\theta(1) = 0,008$, отвечает давлению $p = 0,008 > a$, так что материал оказывается в сверхкритической зоне. Графики изменения девиаторных компонент напряжений и давления от времени показаны на рисунке 4.

В сверхкритической зоне при девиаторном нагружении и фиксированной объемной деформации наблюдается: а) падение давления до значения $a = 0,005$ (происходит объемное разупрочнение); б) дальнейшие циклические кинематические нагружения в девиаторной плоскости не приводят к изменениям объемного давления, остающегося постоянным и равным a .

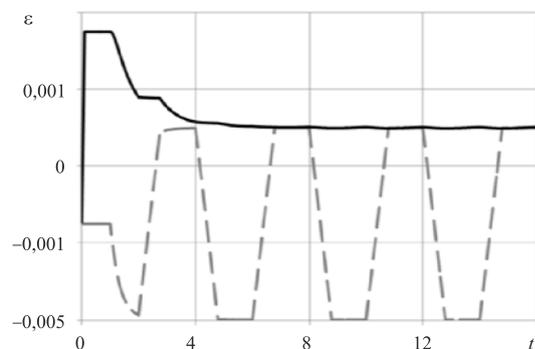


Рис. 4. Сверхкритическая зона: изменение девиаторных компонент напряжений и давления (в МПа) от времени: штриховая линия – напряжения Треска; сплошная линия – гидростатическое давление

4. Заключение

Рассмотрены теоретические и вычислительные аспекты, сопряженные с применением модифицированных Кэм-клэй моделей для описания квазистатических процессов деформирования гранулированных сред. Проведено численное моделирование комбинированных кинематических нагружений объемной и девиаторной составляющими.

По-видимому, впервые обнаружено, что в рамках квазистатических циклических воздействий при нагружении объемной кинематической составляющей до значений, отвечающих субкритическому давлению ($p < a$), с последующим нагружением в девиаторной плоскости, происходит объемное упрочнение. В то же время нагружение объемной кинематической составляющей до значений, отвечающих сверхкритическому давлению ($a < p \leq p_{c0}$), с последующим нагружением в девиаторной плоскости, совершается объемное разупрочнение.

В дальнейшем планируется проведение исследований с целью выявления аналогичных эффектов в динамических задачах распространения плоских и сферических гармонических волн в средах, описываемых модифицированными Кэм-клэй моделями.

Литература

1. Roscoe K.H., Schofield A.N., Wroth C.P. On the yielding of soils // *Géotechnique*. – 1958. – Vol. 8, no. 1. – P. 22-53. DOI
2. Roscoe K.H., Schofield A.N. Mechanical behavior of an idealized 'wet' clay // *Proc. 2nd European Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Wiesbaden, 1963. – Vol. I. – P. 47-54.
3. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress-strain behavior of wet clay // *Engineering Plasticity* / Eds. J. Heyman, F.A. Leckie. – Cambridge University Press, 1968. – P. 535-609.
4. Alawaji H., Runesson K., Sture S., Axelsson K. Implicit integration in soil plasticity under mixed control for drained and undrained response // *Int. J. Numer. Anal. Met.* – 1992. – Vol. 16, no. 10. – P. 737-756. DOI
5. Armero F., Pérez-Foguet A. On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity – part I: The variational structure // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 2002. – Vol. 53, no. 2. – P. 297-329. DOI
6. Bigoni D., Hueckel T. Uniqueness and localization – I. Associative and non-associative elastoplasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1991. – Vol. 28, no. 2. – P. 197-213. DOI
7. Borja R.I., Lee S.R. Cam-Clay plasticity. Part I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations // *Comput. Method. Appl. M.* – 1990. – Vol. 78, no. 1. – P. 49-72. DOI
8. Borja R.I., Sama K.M., Sanz P.F. On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models // *Comput. Method. Appl. M.* – 2003. – Vol. 192, no. 9-10. – P. 1227-1258. DOI
9. Borja R., Tamagnini C. Cam-Clay plasticity, Part III: Extension of the infinitesimal model to include finite strains // *Comput. Method. Appl. M.* – 1998. – Vol. 155, no. 1-2. – P. 73-95. DOI
10. Buscarnera G., Dattola G., di Prisco C. Controllability, uniqueness and existence of the incremental response: A mathematical criterion for elastoplastic constitutive laws // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – Vol. 48, no. 13. – P. 1867-1878. DOI
11. Conti R., Tamagnini C., DeSimone A. Critical softening in Cam-Clay plasticity: Adaptive viscous regularization, dilated time and numerical integration across stress-strain jump discontinuities // *Comput. Method. Appl. M.* – 2013. – Vol. 258. – P. 118-133. DOI
12. Dal Maso G., DeSimone A. Quasistatic evolution for Cam-Clay plasticity: Examples of spatially homogeneous solutions // *Math. Models Methods Appl. Sci.* – 2009. – Vol. 19. – P. 1643-1711. DOI
13. Dal Maso G., DeSimone A., Solombrino F. Quasistatic evolution for Cam-Clay plasticity: a weak formulation via viscoplastic regularization and time rescaling // *Calc. Var. Partial. Dif.* – 2011. – Vol. 40, no. 1. – P. 125-181. DOI
14. Dal Maso G., Solombrino F. Quasistatic evolution for Cam-Clay plasticity: The spatially homogeneous case // *Networks and Heterogeneous Media*. – 2010. – Vol. 5, no. 1. – P. 97-132. DOI
15. Al-Tabbaa A., Wood D.M. An experimentally based bubble model for clay // *Proc. 3rd Int. Symp. Num. Models Geomech. (NUMOG III)*, 8-11 May, 1989, Niagara Falls, Canada. – 1989. – P. 90-99.
16. Andersen K.H. Bearing capacity under cyclic loading – offshore, along the coast, and on land // *Can. Geotech. J.* – 2009. – Vol. 46, no. 5. – P. 513-535. DOI
17. Carter J.P., Booker J.R., Wroth C.P. A critical state soil model for cyclic loading // *Soil mechanics – transient and cyclic loads* / Eds. G.N. Pande, O.L. Zienkiewicz. – London: Wiley, 1982. – P. 219-252.
18. Liu J., Xia J. Experimental study on the stability of railroad silt subgrade with increasing train speed // *J. Geotech. Geoenviron. Eng.* – 2010. – Vol. 10.1061. – P. 833-841. DOI
19. Mróz Z. On the description of anisotropic workhardening // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1967. – Vol. 15, no. 3. – P. 163-175. DOI
20. Puppala A.J., Mohammad L., Allen A. Permanent deformation characterization of subgrade soils from RLT test // *J. Mater. Civ. Eng.* – 1999. – Vol. 11, no. 4. – P. 274-282. DOI
21. Sangrey D.A., Castro G., Poulos S.J., France J.W. Cyclic loading of sands, silts and clays // *Earthquake engineering and soil dynamics. Proc. ASCE Geotechnical Engineering Division Specialty Conference*, June 19-21, 1978, Pasadena, California. – P. 836-851.
22. Selig E.T., Chang C.S. Soil failure modes in undrained cyclic loading // *J. Geotech. Eng.-ASCE*. – 1981. – Vol. 107, no. GT5. – P. 539-551.
23. Takahashi M., Hight D.W., Vaughan P.R. Effective stress changes observed during undrained cyclic triaxial tests on clay // *Proc. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading* / Eds. G.N. Pande, O.C. Zienkiewicz. – Balkema, Rotterdam,

- Netherlands, 1980. – P. 201-209.
24. *Uzan J.* Characterization of granular material // *Transportation Research Record*. – 1985. – Vol. 1022. – P. 52-59.
 25. *Wood D.M.* Soil behaviour and critical state soil mechanics. – Cambridge University Press, 1990. – 462 p.
 26. *Zhou J., Gong X.* Strain degradation of saturated clay under cyclic loading // *Can. Geotech. J.* – 2001. – Vol. 38, no. 1. – P. 208-212. [DOI](#)
 27. *Ni J., Indraratna B., Geng X., Carter J., Chen Y.* Model of soft soils under cyclic loading // *Int. J. Geomech.* – 2014. – Vol. 15, no. 4. – P. 1-10. [DOI](#)
 28. *Shahin M.A., Loh R.B.H., Nikraz H.R.* Some observations on the behaviour of soft clay under undrained cyclic loading // *J. GeoEngineering*. – 2011. – Vol. 6, no. 2. – P. 109-112.
 29. *Papuga J.* A survey on evaluating the fatigue limit under multiaxial loading // *Int. J. Fatigue*. – 2011. – Vol. 33, no. 2. – P. 153-165. [DOI](#)
 30. *Hashiguchi K.* On the linear relations of $V - \ln p$ and $\ln v - \ln p$ for isotropic consolidation of soils // *Int. J. Numer. Anal. Met.* – 1995. – Vol. 19, no. 5. – P. 367-376. [DOI](#)
 31. *Schofield A.N., Wroth C.P.* Critical state soil mechanics. – London: McGraw-Hill, 1968.
 32. *Van Eekelen S.J.M., van den Berg P.* The delft egg model, a constitutive model for clay // *DIANA Computational Mechanics'94*. – 1994. – P. 103-116. [DOI](#)
 33. *Dafalias Y.F., Herrmann L.R.* A bounding surface soil plasticity model // *Proc. Int. Symp. Soils Cyclic Trans. Load.* – University of Swansea, U.K., January, 1980. – P. 335-345.
 34. *Auricchio F., Taylor R.L.* A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes // *Int. J. Plasticity*. – 1999. – Vol. 15, no. 12. – P. 1359-1378. [DOI](#)
 35. *Auricchio F., Taylor R.L., Lubliner J.* Application of a return map algorithm to plasticity models // *Computational Plasticity / Eds. D.R.J. Owen et al.* – CIMNE, Barcelona, 1992. – P. 2229-2248.
 36. *Callari C., Auricchio F., Sacco E.* A finite-strain cam-clay model in the framework of multiplicative elasto-plasticity // *Int. J. Plasticity*. – 1998. – Vol. 14, no. 12. – P. 1155-1187. [DOI](#)
 37. *Simo J.C., Meschke G.* A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials // *Comput. Mech.* – 1993. – Vol. 11, no. 4. – P. 253-278. [DOI](#)
 38. *Drucker D.C., Gibson R.E., Henkel D.J.* Soil mechanics and work hardening theories of plasticity // *Trans. ASCE*. – 1957. – Vol. 122. – P. 338-346.
 39. *Brace W.F., Paulding B.W., Scholz C.H.* Dilatancy in the fracture of crystalline rocks // *J. Geophys. Res.* – 1966. – Vol. 71, no. 16. – P. 3939-3953. [DOI](#)
 40. *DiMaggio F.L., Sandier I.S.* Material model for granular soils // *J. Eng. Mech. Div-ASCE*. – 1971. – Vol. 97. – P. 935-950.
 41. *Simo J.C., Hughes T.J.R.* Computational inelasticity. – New York: Prentice-Hall, 1998.
 42. *Fossum A.F., Fredrich J.T.* Estimation of constitutive parameters for the Belridge Diatomite, South Belridge Diatomite field // SAND98-1407, Sandia National Laboratories. – Albuquerque, New Mexico, 1998. – 32 p.
 43. *Jefferies M.G., Shuttle D.A.* Norsand: calibration and use. Prediction, analysis and design in geomechanical applications // *Proc. of 11th Int. Conf. of IACMAG, Torino, Italy, June 19-24, 2005*. – Vol. 1. – P. 345-352.
 44. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in anisotropic plates (review) // *Acoust. Phys.* – 2014. – Vol. 60, no. 1. – P. 95-103. [DOI](#)
 45. *Corapcioglu Y., Uz T.* Constitutive equations for plastic deformation of porous materials // *Powder Technol.* – 1978. – Vol. 21, no. 2. – P. 269-274. [DOI](#)
 46. *Jenike A.W., Sield R.T.* On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure // *J. Appl. Mech.* – 1959. – Vol. 26, no. 4. – P. 599-602.
 47. *Perzyna P.* The constitutive equations for rate sensitive plastic materials // *Quart. Appl. Math.* – 1963. – Vol. 20, no. 4. – P. 321-332.
 48. *Sloan S.W.* Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1989. – Vol. 24, no. 3. – P. 893-911. [DOI](#)
 49. *Potts D.M., Zdravkovic L.* Finite element analysis in geotechnical engineering: theory. – London: Thomas Telford, 1999. – 440 p.
 50. *Wood D.M.* Geotechnical modelling. – London: Spon Press, 2004.
 51. *Aboim C., Roth W.* Bounding surface plasticity theory applied to cyclic loading of sand // *Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics*, 1982. – P. 65-72.
 52. *Hirai H.* An elastoplastic constitutive model for cyclic behaviour of sands // *Int. J. Numer. Anal. Met.* – 1987. – Vol. 11, no. 5. – P. 503-520. [DOI](#)
 53. *Zienkiewicz O., Mróz Z.* Generalized plasticity formulation and application to geomechanics // *Mechanics of Engineering Materials / Eds. C.S. Desai, R.H. Gallaher*. – New York: Wiley, 1984. – P. 655-679.

References

1. Roscoe K.H., Schofield A.N., Wroth C.P. On the yielding of soils. *Géotechnique*, 1958, vol. 8, no. 1, pp. 22-53. [DOI](#)
2. Roscoe K.H., Schofield A.N. Mechanical behavior of an idealized 'wet' clay. *Proc. 2nd European Conf. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Wiesbaden, 1963, vol. 1, pp. 47-54*.
3. Roscoe K.H., Burland J.B. On the generalized stress-strain behavior of wet clay. *Engineering Plasticity*, eds. J. Heyman, F.A. Leckie. Cambridge University Press, 1968. Pp. 535-609.
4. Alawaji H., Runesson K., Sture S., Axelsson K. Implicit integration in soil plasticity under mixed control for drained and undrained response. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 1992, vol. 16, no. 10, pp. 737-756. [DOI](#)
5. Armero F., Pérez-Foguet A. On the formulation of closest-point projection algorithms in elastoplasticity – Part I: The variational structure. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 2002, vol. 53, no. 2, pp. 297-329. [DOI](#)
6. Bigoni D., Hueckel T. Uniqueness and localization – I. Associative and non-associative elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 1991, vol. 28, no. 2, pp. 197-213. [DOI](#)

7. Borja R.I., Lee S.R. Cam-Clay plasticity. Part I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations. *Comput. Method. Appl. M.*, 1990, vol. 78, no. 1, pp. 49-72. DOI
8. Borja R.I., Sama K.M., Sanz P.F. On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models. *Comput. Method. Appl. M.*, 2003, vol. 192, no. 9-10, pp. 1227-1258. DOI
9. Borja R., & Tamagnini C. Cam-Clay plasticity, Part III: Extension of the infinitesimal model to include finite strains. *Comput. Method. Appl. M.*, 1998, vol. 155, no. 1-2, pp. 73-95. DOI
10. Buscarnera G., Dattola G., di Prisco C. Controllability, uniqueness and existence of the incremental response: A mathematical criterion for elastoplastic constitutive laws. *Int. J. Solids Struct.*, 2011, vol. 48, , no. 13, pp. 1867-1878. DOI
11. Conti R., Tamagnini C., DeSimone A. Critical softening in Cam-Clay plasticity: Adaptive viscous regularization, dilated time and numerical integration across stress-strain jump discontinuities. *Comput. Method. Appl. M.*, 2013, vol. 258, pp. 118-133. DOI
12. Dal Maso G., DeSimone A. Quasistatic evolution for Cam-Clay plasticity: Examples of spatially homogeneous solutions. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2009, vol. 19, pp. 1643-1711. DOI
13. Dal Maso G., DeSimone A., Solombrino F. Quasistatic evolution for cam-clay plasticity: A weak formulation via viscoplastic regularization and time rescaling. *Calc. Var. Partial. Dif.*, 2011, vol. 40, no. 1, pp. 125-181. DOI
14. Dal Maso G., Solombrino F. Quasistatic evolution for Cam-Clay plasticity: The spatially homogeneous case. *Networks and Heterogeneous Media*, 2010, vol. 5, no. 1, pp. 97-132. DOI
15. Al-Tabbaa A., Wood D.M. An experimentally based bubble model for clay. *Proc. 3rd Int. Symp. Num. Models Geomech. (NUMOG III), 8-11 May, 1989, Niagara Falls, Canada. Pp. 90-99.*
16. Andersen K.H. Bearing capacity under cyclic loading – offshore, along the coast, and on land. *Can. Geotech. J.*, 2009, vol. 46, no. 5, pp. 513-535. DOI
17. Carter J.P., Booker J.R., Wroth C.P. A critical state soil model for cyclic loading. *Soil mechanics – transient and cyclic loads*, ed. by G.N. Pande, O.L. Zienkiewicz. London: Wiley, 1982. Pp. 219-252.
18. Liu J., Xia J. Experimental study on the stability of railroad silt subgrade with increasing train speed. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, 2010, vol. 10.1061, pp. 833-841. DOI
19. Mróz Z. On the description of anisotropic work hardening. *J. Mech. Phys. Solids.*, 1967, vol. 15, no. 3, pp. 163-175. DOI
20. Puppala A., Mohammad L., Allen A. Permanent deformation characterization of subgrade soils from RLT test. *J. Mater. Civ. Eng.*, 1999, vol. 11, no. 4, pp. 274-282. DOI
21. Sangrey D.A., Castro G., Poulos S.J., France J.W. Cyclic loading of sands, silts and clays. *Earthquake engineering and soil dynamics. Proc. ASCE Geotechnical Engineering Division Specialty Conference, June 19-21, 1978, Pasadena, California. Pp. 836-851.*
22. Selig E.T., Chang C.S. Soil failure modes in undrained cyclic loading. *J. Geotech. Eng.-ASCE*, 1981, vol. 107, no. GT5, pp. 539-551.
23. Takahashi M., Hight D.W., Vaughan P.R. Effective stress changes observed during undrained cyclic triaxial tests on clay. *Proc. Int. Symp. on Soils under Cyclic and Transient Loading, ed. by G.N. Pande, O.C. Zienkiewicz. Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1980. Pp. 201-209.*
24. Uzan J. Characterization of granular material. *Transportation Research Record*, 1985, vol. 1022, pp. 52-59.
25. Wood D.M. *Soil behaviour and critical state soil mechanics*, Cambridge University Press, 1990. 462 p.
26. Zhou J., Gong J. Strain degradation of saturated clay under cyclic loading. *Can. Geotech. J.*, 2001, vol. 38, no. 1, pp. 208-212. DOI
27. Ni J., Indraratna B., Geng X., Carter J., Chen Y. Model of soft soils under cyclic loading. *Int. J. Geomech.*, 2014, vol. 15, no. 4, pp. 1-10. DOI
28. Shahin M.A., Loh R.B.H., Nikraz H.R. Some observations on the behaviour of soft clay under undrained cyclic loading. *J. GeoEngineering*, 2011, vol. 6, no. 2, pp. 109-112.
29. Papuga J. A survey on evaluating the fatigue limit under multiaxial loading. *Int. J. Fatigue*, 2011, vol. 33, no. 2, pp. 153-165. DOI
30. Hashiguchi K. On the linear relations of $V-\ln p$ and $\ln v-\ln p$ for isotropic consolidation of soils. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 1995, vol. 19, no. 5, pp. 367-376. DOI
31. Schofield A.N., Wroth C.P. *Critical state soil mechanics*. London: McGraw-Hill, 1968.
32. Van Eekelen S.J.M., van den Berg P. The delft egg model, a constitutive model for clay. *DIANA Computational Mechanics'94*, 1994, pp. 103-116. DOI
33. Dafalias Y.F., Herrmann L.R. A bounding surface soil plasticity model. *Proc. Int. Symp. Soils Cyclic Trans. Load., University of Swansea, U.K., January, 1980, pp. 335-345.*
34. Auricchio F., Taylor R.L. A return-map algorithm for general associative isotropic elasto-plastic materials in large deformation regimes. *Int. J. Plasticity*, 1999, vol. 15, no. 12, pp. 1359-1378. DOI
35. Auricchio F., Taylor R.L., Lubliner J. Application of a return map algorithm to plasticity models. *Computational Plasticity*, eds by D.R.J. Owen et al., CIMNE, Barcelona, 1992. Pp. 2229-2248.
36. Callari C., Auricchio F., Sacco E. A finite-strain cam-clay model in the framework of multiplicative elasto-plasticity. *Int. J. Plasticity*, 1998, vol. 14, no. 12, pp. 1155-1187. DOI
37. Simo J.C., Meschke G. A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials. *Comput. Mech.*, 1993, vol. 11, no. 4, pp. 253-278. DOI
38. Drucker D.C, Gibson R.E., Henkel D.J. Soil mechanics and work hardening theories of plasticity. *Trans. ASCE*, 1957, vol. 122, pp. 338-346.
39. Brace W.F., Paulding B.W., Scholz C.H. Dilatancy in the fracture of crystalline rocks. *J. Geophys. Res.*, 1966, vol. 71, no. 16, pp. 3939-3953. DOI
40. DiMaggio F.L., Sandier I.S. Material model for granular soils. *J. Eng. Mech. Div-ASCE*, 1971, vol. 97, pp. 935-950.
41. Simo J.C., Hughes T.J.R. *Computational inelasticity*. New York: Prentice-Hall, 1998.

42. Fossum A.F. and Fredrich J.T. *Estimation of constitutive parameters for the Belridge Diatomite, South Belridge Diatomite field*. SAND98-1407. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories, 1998. 32 p.
43. Jefferies M.G., Shuttle D.A. Norsand: calibration and use. Prediction, analysis and design in geomechanical applications. *Proc. of 11th Int. Conf. of IACMAG, Torino, Italy, June 19-24, 2005, vol. 1*, pp. 345-352.
44. Kuznetsov S.V. Lamb waves in anisotropic plates (review). *Acoust. Phys.*, 2014, vol. 60, no. 1, pp. 95-103. [DOI](#)
45. Corapcioglu Y., Uz T. Constitutive equations for plastic deformation of porous materials. *Powder Technol.*, 1978, vol. 21, no. 2, pp. 269-274. [DOI](#)
46. Jenike A.W., Sield R.T. On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure. *J. Appl. Mech.*, 1959, vol. 26, no. 4, pp. 599-602.
47. Perzyna P. The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. *Quart. Appl. Math.*, 1963, vol. 20, no. 4, pp. 321-332.
48. Sloan S.W. Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1989, vol. 24, no. 3, pp. 893-911. [DOI](#)
49. Potts D.M., Zdravkovic L. *Finite element analysis in geotechnical engineering: theory*. London: Thomas Telford, 1999. 440 p.
50. Wood D.M. *Geotechnical modelling*. London: Spon Press, 2004.
51. Aboim C., Roth W. Bounding surface plasticity theory applied to cyclic loading of sand. *Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics, 1982*, pp. 65-72.
52. Hirai H. An elastoplastic constitutive model for cyclic behaviour of sands. *Int. J. Numer. Anal. Met.*, 1987, vol. 11, no. 5, pp. 503-520. [DOI](#)
53. Zienkiewicz O., Mróz Z. Generalized plasticity formulation and application to geomechanics. *Mechanics of Engineering Materials*, ed. by C.S. Desai, R.H. Gallaher. New York: Wiley, 1984. Pp. 655-679.

Поступила в редакцию 22.01.2016; опубликована в электронном виде 30.06.2016

Сведения об авторах

Гольдштейн Роберт Вениаминович, член-корр. РАН, проф., дфмн, зав. лаб., Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН), 119526, Москва, просп. Вернадского, д. 101, корп. 1; e-mail: goldst@ipmnet.ru
Кузнецов Сергей Владимирович, проф., дфмн, ИПМех РАН; e-mail: kuzn-sergey@yandex.ru