

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.11
УДК 532.517.4: 536.25

О МЕХАНИЗМАХ КАСКАДНОГО ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ В КОНВЕКТИВНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А.В. Шестаков, Р.А. Степанов, П.Г. Фрик

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

В работе изучаются особенности каскадных процессов в развитой турбулентности, существующей на фоне градиента плотности (температуры), либо сонаправленного с вектором силы тяжести (турбулентность в устойчиво стратифицированной среде – далее УС), либо противонаправленного ему (конвективная турбулентность – КТ). Основное внимание уделено режиму Обухова–Болджиано (ОБ), подразумевающего баланс сил Архимеда и нелинейных сил в достаточно протяженной части инерционного интервала. Уверенного подтверждения того, что режим ОБ возможен, не получено до сих пор, хотя фрагменты спектров с наклонами, близкими к «–11/5» и «–7/5», были зарегистрированы в некоторых работах по численному моделированию конвективной турбулентности. Проводится критическое сравнение этих данных с результатами расчетов, выполненных авторами настоящей статьи с помощью каскадной модели конвективной турбулентности, позволившей рассмотреть широкий диапазон значений управляющих параметров. Каскадная модель является новой и получена путем обобщения класса спиральных каскадных моделей на случай турбулентной конвекции. Показано, что в режимах развитой турбулентности, признаком которой является интервал с постоянным спектральным потоком кинетической энергии, силы Архимеда не могут конкурировать с нелинейными взаимодействиями и не оказывают существенного влияния на динамику инерционного интервала. В случае КТ именно они обеспечивают каскадный процесс энергией, но только на максимальных масштабах турбулентности. При УС силы плавучести снижают энергию турбулентных пульсаций. Но ни в том, ни в другом случае режим ОБ не возникает, а на масштабах, попадающих в инерционный интервал, устанавливается колмогоровская турбулентность с законом «–5/3», в которой температура ведет себя как пассивная примесь. Наблюдаемые отклонения от спектра «–5/3», ошибочно интерпретируемые как режим ОБ, появляются при недостаточном разделении макромасштаба турбулентности и диссипативного масштаба.

Ключевые слова: конвективная турбулентность, каскад энергии, каскадные модели

ON SPECTRAL ENERGY TRANSFER IN CONVECTIVE TURBULENCE

A.V. Shestakov, R.A. Stepanov and P.G. Frick

Institute of Continuous Media Mechanics, Perm, Russian Federation

The specific features of cascade processes in fully developed turbulence that exists against the background of a density (temperature) gradient are investigated. The gradient is either parallel (turbulence in a stably stratified medium) or anti-parallel (convective turbulence) to the gravitational force. We mainly address the question of realizability of the Obukhov–Boldgiano regime (OB), which implies a balance between buoyancy forces and nonlinear interactions in an extended part of the inertial range. There are no foolproof evidences that prove the existence of OB, although the fragments of spectra with slopes, similar to “–11/5” and “–7/5”, have been observed in some numerical simulations of convective turbulence. This paper presents a critical comparison of these results with the results obtained using a shell model, which allows us to perform simulations in a wide range of governing parameters. The shell model is introduced by generalizing a class of helical shell models to the case of buoyancy driven turbulence. It is shown that, in fully developed turbulence that is characterized by a range of scales with a constant spectral energy flux, the buoyancy forces cannot compete with nonlinear interactions and, therefore, have no impact on the inertial range dynamics. In convective turbulence, exactly these forces provide turbulence with energy, but only at the largest scales. Under conditions of stable stratification, the buoyancy forces reduce the energy of turbulent pulsations. In both cases the OB regime does not appear in the inertial range, where the Kolmogorov’s “–5/3” law is established, and the temperature behaves like a passive scalar. Our simulations indicate that the previous interpretations of the observed deviations from the “–5/3” spectrum as the OB regime are wrong because they appear in the case of an insufficient separation between the buoyancy and dissipation scales.

Key words: convective turbulence, energy cascade, shell models

1. Введение

Вопрос о том, могут ли силы Архимеда влиять на статистические свойства развитой турбулентности в среде с вариациями плотности, был одновременно поставлен А.М. Обуховым [1] и Р. Болджиано [2] еще в 1959 году, но не нашел однозначного ответа до сегодняшнего дня. Напомним, что основная гипотеза А.Н. Колмогорова [3] постулирует, что в инерционном интервале (то есть на масштабах, существенно меньших масштаба возбуждения турбулентности L , но существенно больших вязкого масштаба l_v) статистические свойства турбулентности определяются только скоростью диссипации кинетической энергии ε и самим масштабом l . Эта гипотеза непосредственно приводит к выводу, что пульсации скорости (u_l) на любом масштабе в пределах инерционного интервала $u_l \sim (\varepsilon l)^{1/3}$, а спектральная плотность энергии следует закону «–5/3»:

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}. \quad (1)$$

Если же учитывать возможное влияние сил Архимеда на динамику инерционного интервала и иметь в виду вариации плотности, обусловленные температурой, то в рассмотрение нужно принимать пульсации температуры θ_l , а в число определяющих параметров наряду со скоростью диссипации кинетической энергии включать «параметр плавучести» $g\beta$ (g — ускорение свободного падения, β — коэффициент теплового расширения среды) и скорость диссипации энергии температурных пульсаций ε_0 (скорость возрастания энтропии среды за счет процессов теплопроводности). Анализируя размерности этих величин, Обухов пришел к выводу [1], что появляется характерный масштаб

$$l_B = \varepsilon^{5/4} \varepsilon_0^{-3/4} (g\beta)^{-3/2} \quad (2)$$

(в литературе утвердился термин «масштаб Болджиано»), и если выполняется условие $L > l_B > l_v$, то в крупномасштабной части инерционного интервала ($L > l > l_B$) силы Архимеда будут сказываться на статистических свойствах турбулентности. Болджиано получил для этого интервала законы распределения спектральной плотности энергий пульсаций скорости и температуры [2]:

$$E(k) = C_1 \varepsilon_0^{2/5} (g\beta)^{4/5} k^{-11/5}, \quad E_0(k) = C_2 \varepsilon_0^{4/5} (g\beta)^{-2/5} k^{-7/5}. \quad (3)$$

С момента выхода работ [1, 2] прошло более полувека, а уверенного подтверждения существования режима Обухова–Болджиано (ОБ) в форме (3) так и не появилось, хотя фрагменты спектров с наклонами, похожими на «11/5» и «7/5», регистрировались и в лабораторных [4, 5], и в численных экспериментах [6, 7]. Проблемы идентификации режима ОБ и возможность его проявления в отдельных областях реальных течений подробно обсуждались в обзоре [8]. Протяженный интервал ОБ наблюдался при моделировании двумерной турбулентной конвекции [9, 10], но двумерная турбулентность представляет собой совершенно особый случай, поскольку в ней блокируется прямой каскад энергии и фактически отсутствует отток энергии с масштабов l_B на меньшие масштабы.

Совсем недавно появилась публикация [11], в которой авторы попытались разобраться с этой давней проблемой, для чего использовали каскадную модель, дающую возможность относительно легко исследовать турбулентность в развитых режимах, не доступных ни прямому численному, ни лабораторному эксперименту. Авторы этой работы пришли к заключению, что в устойчиво стратифицированной жидкости (при подогреве сверху) и неустойчиво стратифицированной жидкости (при подогреве снизу) ситуации принципиально отличаются, и режим Обухова–Болджиано может реализоваться только на фоне устойчивой стратификации (УС), в то время как в условиях чистой КТ возможен только колмогоровский режим (1), в котором температура в инерционном интервале ведет себя как пассивная примесь. Однако эти выводы сделаны на основе сравнения результатов расчета при существенно разных значениях управляющих параметров (число Релея для УС составляло 10^5 , а для КТ — 10^{12}), что заставляет относиться к ним с осторожностью.

В данной работе приводятся некоторые качественные аргументы, позволяющие ограничить область параметров, в которой возможен режим ОБ, и подтверждающие это результаты численного моделирования развитой неизотермической турбулентности, в которой действует сила Архимеда. Расчеты выполнены с помощью каскадной модели турбулентности.

2. Постановка задачи и некоторая феноменология

Рассмотрим течения неоднородно нагретой жидкости, описываемые уравнениями свободной конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + g\beta T \boldsymbol{\gamma}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{V} — скорость, T — температура, P — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор в направлении силы тяжести.

В контексте поставленной задачи интерес представляют только развитые турбулентные режимы, для которых обязательны большие значения числа Рейнольдса Re , характеризующего отношение нелинейного слагаемого в уравнении (4) к вязкому слагаемому. Существенная роль сил Архимеда

подразумевает большие значения числа Грасгофа Gr , характеризующего отношение сил Архимеда к вязким силам. Не менее важно в рассматриваемом случае и число Ричардсона Ri , которое характеризует отношение сил Архимеда к инерционным силам, то есть последнего слагаемого в (4) к нелинейному слагаемому. Запишем эти безразмерные параметры, считая, что наложенный градиент температуры обусловлен разностью температур Θ на масштабе L :

$$Re = \frac{U_{rms} L}{\nu}, \quad Gr = \frac{g\beta L^3 \Theta}{\nu^2}, \quad Ri = \frac{g\beta L \Theta}{U_{rms}^2}. \quad (7)$$

В конвективных задачах широко используются также числа Прандтля $Pr = \nu/\chi$ и Релея $Ra = Gr \cdot Pr$. Отметим, что в развитой турбулентности число Прандтля задает отношение вязкого и теплопроводного масштабов, и если оба масштаба существенно меньше масштаба Болджиано, то число Прандтля прямого влияния на динамику крупномасштабной части инерционного интервала не оказывает.

Некоторое внутреннее противоречие в постановке задачи Обухова–Болджиано возникает из-за того, что «архимедова турбулентность» подразумевает большие значения всех трех управляющих параметров (7), а они не являются независимыми. Действительно, $Ri = Gr/Re^2$, но для турбулентности, вызванной неоднородностями температуры, число Рейнольдса определяется числом Грасгофа, а именно $Re \sim \sqrt{Gr}$. Таким образом,

$$Ri = Gr/Re^2 \sim 1, \quad (8)$$

то есть, чем значимее силы Архимеда, тем интенсивнее турбулентность, но число Ричардсона остается порядка единицы. Это означает, что баланс нелинейных взаимодействий и сил плавучести устанавливается на максимальном масштабе, но режим ОБ подразумевает их баланс в некотором интервале масштабов. Результат состоит в том, что силы Архимеда могут быть причиной турбулентного течения, что повсеместно имеет место в природе, но не могут конкурировать с инерционными силами, и инерционный интервал формируется по сценарию Колмогорова.

Заметим, что Болджиано рассматривал устойчиво стратифицированную среду, в которой силы Архимеда не могут генерировать турбулентность. Для ее поддержания нужен независимый источник энергии. Аргументация Болджиано состояла в том, что часть кинетической энергии переходит в потенциальную при перемещении более тяжелой жидкости вверх, а легкой — вниз, что ведет к ослаблению спектрального потока энергии. Именно это обстоятельство поставлено во главу угла в работе [11] при обосновании того, что турбулентность в УС, в отличие от КТ, может следовать сценарию ОБ. Формально в случае УС числа Грасгофа и Рейнольдса не связаны, но только до тех пор, пока $Gr < Re^2$, то есть пока $Ri < 1$.

Разница, таким образом, существенна только с точки зрения источника энергии турбулентности. С позиций же динамики инерционного интервала важно то, что при обоих типах турбулентности динамика интервала ОБ обуславливается балансом архимедовых и нелинейных сил, а также постоянным потоком энергии пульсаций температуры, равным скорости ее диссипации ϵ_0 , которая и есть ключевой параметр в (3). В случае УС источником энергии пульсации температуры служат возбуждаемые внешней силой крупномасштабные вихри, а на меньших масштабах все происходит как при КТ.

Итак, режим Обухова–Болджиано возможен только либо в слабо турбулизованных потоках, где проблематично само существование инерционного интервала (см. фиг.1 в работе [11], на которой видно, что вязкая диссипация становится заметной на масштабах, интерпретируемых как крупномасштабная граница интервала ОБ), либо в нестационарных течениях на стадии формирования конвективной турбулентности (на ранних этапах ее развития режим отмечался в [9]). Проблематичность реализации режима ОБ следует из определения (2) масштаба Болджиано, которое указывает на то, что для обеспечения необходимого условия $l_b \ll L$ требуется совместить большой спектральный поток энергии температурных пульсаций при существенном параметре плавучести со слабым спектральным потоком кинетической энергии. Такое сочетание означает большую роль силы Архимеда на фоне слабой турбулентности.

3. Каскадная модель конвективной турбулентности

Первые попытки приложения каскадных моделей к описанию турбулентной конвекции были сделаны в 80-х годах прошлого века и основывались на иерархических моделях турбулентности [12, 13]. По мере развития каскадные модели с учетом сил Архимеда применялись в различных задачах: модель конвективной турбулентности в проводящей жидкости представлена в [14], особенности двумерной

и трехмерной конвективной турбулентности рассмотрены в [9], каскадная модель конвективной турбулентности в жидком ядре Земли предложена в [15]. В работе [16] была предпринята попытка оценить с помощью каскадной модели зависимость эффективного конвективного теплопереноса (числа Нуссельта) от числа Релея.

Все модели конвективной турбулентности строились на основе той или иной модели изотермической турбулентности. Так, в [12] обобщена иерархическая модель турбулентности [17], в [14] взята за основу известная модель Новикова–Деснянского [18], в других работах развивались популярные в 90-х годах модели: в [9, 15] — GOY [19, 20], в [16] — SABRA [21].

Используемая в данной работе каскадная модель конвективной турбулентности базируется на модели трехмерной спиральной турбулентности, описанной в работе [22]. В общем виде нелинейные слагаемые представляются с помощью квадратичной формы $W_n(X, Y)$ [23], которая описывает слагаемые типа $X \cdot \nabla Y$ в уравнениях (4)–(6). Каскадные уравнения в таком случае имеют компактный вид

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} &= W_n(U, U) - \frac{k_n^2 U_n}{\text{Re}} + \text{Ri} T_n + f_n, & 1 \\ \frac{dT_n}{dt} &= W_n(U, T) - \frac{k_n^2 T_n}{\text{Re Pr}} + G_n U_n, & 2 \end{aligned} \quad (9)$$

где U_n и T_n — комплексные переменные, характеризующие пульсации скорости и температуры соответственно, $k_n = \lambda^n$ — волновое число, λ — ширина зоны разбиения волнового пространства, n — номер масштаба (оболочки). Квадратичная форма $W_n(X, Y)$ описывает нелинейные взаимодействия:

$$\begin{aligned} W_n(X, Y) &= ik_n \left[2(X_{n-1} Y_{n-1})^r + 2\lambda X_n^* Y_{n+1}^i - \lambda^2 (X_n Y_{n+1}^r + X_{n+1}^r Y_n) - \lambda (X_{n-1}^* Y_{n-1})^i \right] - \\ &- i\lambda^{-5/2} k_n \left[(X_n Y_{n-1}^r + X_{n-1}^r Y_n) - 2\lambda X_n^* Y_{n-1}^i - 2\lambda^2 (X_{n+1} Y_{n+1})^r - \lambda (X_{n+1}^* Y_{n+1})^i \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Вторые слагаемые в правых частях уравнений (9) описывают вязкость и диффузию, слагаемое $\text{Ri} T_n$ — силу Архимеда, а слагаемое $G_n U_n$ соответствует источнику пульсаций температуры, возникающих из-за пульсаций скорости в поле градиента средней температуры.

В изотермическом и невязком случае уравнение (9)₁ имеет два квадратичных интеграла движения. Первый соответствует кинетической энергии пульсаций скорости — $E = \frac{1}{2} \sum_n U_n U_n^*$, второй — гидродинамической спиральности $H = \frac{1}{4i} \sum_n k_n [U_n^2 - (U_n^*)^2]$. Уравнение (9)₂ в условиях однородного среднего нагрева и нулевой диффузии обладает ещё одним интегралом движения, который представляет энергию пульсаций температуры $E_\Theta = \frac{1}{2} \sum_n T_n T_n^*$. При устойчивой стратификации в бездиссипативном пределе система (9) сохраняет полную энергию $E + E_\Theta$.

Параметр G_n определяет действие наложенного градиента температуры. Устойчивая стратификация (аналог подогрева сверху) характеризуется линейным градиентом средней температуры, при котором $G_n = -1$. При этом для возбуждения турбулентности используется дополнительная сила вида $f_0 = A \exp\{-i\varphi\}$, где параметр A задает поток вносимой энергии, параметр φ — фазу внешней силы. При $G_n > 0$ в системе (9) возможно возбуждение турбулентной конвекции без дополнительных внешних сил. В развитой конвекции перепад температуры на границах компенсируется течением так, что в его ядре среднее поле температуры остается однородным. Перепад температуры концентрируется вблизи границ, и при переходе в спектральное пространство и свертке с полем скорости сила Архимеда дает вклад только в крупномасштабную моду. Поэтому для КТ в предлагаемой модели считалось, что $G_n = 1$ при $n = 0$ и $G_n = 0$ при $n > 0$. Отметим, что в работе [7] для КТ принималось $G_n = 1$ для всех n .

Система уравнений (9) интегрировалась численно методом Рунге–Кутты 4-го порядка с постоянным шагом по времени, который выбирался исходя из условия $\Delta t < 1/\text{Re}$. Как показали предварительные расчеты в этой, а также в других работах [22, 24], такое условие обеспечивает устойчивость решения. Параметр силы A в случае УС задавался таким образом, чтобы спектральный поток энергии пульсаций скорости был порядка единицы. Ширина зоны разбиения волнового пространства $\lambda = 1,618$. Количество оболочек (масштабов), необходимых для описания инерционного интервала, оценивалось

по колмогоровской формуле для диссипативного масштаба: $k_d = \lambda^{N_D} \sim Re^{3/4}$. Здесь N_D есть минимальное число оболочек, к которому добавляется 10 оболочек, что позволит описать весь диссипативный интервал. Таким образом, полное число рассматриваемых оболочек для различных значений чисел Рейнольдса рассчитывалось по формуле $N_D \sim \log_\lambda Re^{3/4} + 10$.

4. Результаты

Расчеты выполнены для набора режимов, представленных в таблице. Во всех случаях $Pr = 50$, $Ri = 1$, и единственным изменяемым параметром в уравнениях (9) являлось число Рейнольдса, принимавшее значения от 50 до 10^7 . Заметим, что число Рейнольдса определено по среднеквадратичным пульсациям, поэтому оно может принимать столь низкие значения. Выбор величины числа Прандтля обусловлен желанием подавить влияние тепловой диффузии при слабой турбулентности (небольших Re), когда инерционный интервал плохо выражен. При больших Re формируется инерционный интервал, и число Прандтля не сказывается на крупномасштабной части спектра, поэтому его вариация интереса не представляет. Что касается чисел Рейнольдса, Грасгофа и Ричардсона, то важны не задаваемые в уравнениях (9) значения этих параметров, а их эффективные значения

$$Re_{eff} = Re \sqrt{\langle |U_0|^2 \rangle}, \quad Ri_{eff} = Ri \frac{\langle U_0 T_0 \rangle}{k_0 \langle |U_0|^3 \rangle}. \quad (11)$$

Именно они приведены в таблице. Видно, что эффективные числа Рейнольдса мало отличаются от задаваемых значений, а числа Ричардсона в случае УС систематически примерно вдвое ниже по сравнению со значениями в КТ и всегда заметно ниже единицы. Это свидетельствует, что не выполняется даже необходимое условие существования режима ОБ (8).

Таблица. Параметры расчетных режимов турбулентности

Тип	Re	Re _{eff}	Ri _{eff}	k _B
УС	50	54	0,28	0,23
КТ	50	52	0,56	0,75
УС	200	232	0,25	0,22
КТ	200	215	0,48	0,77
УС	800	918	0,24	0,22
КТ	800	813	0,47	0,74
УС	100000	114205	0,23	0,25
КТ	100000	101629	0,45	0,81

Результаты расчетов при $Re = 50, 200, 10^5$ представлены на рисунках 1–5. Приводятся распределения по масштабам энергий пульсаций скорости и температуры (см. Рис. 1, 2, 4), а также спектральных потоков энергии и скорости диссипации энергии (отдельно для пульсаций скорости и температуры), работы сил Архимеда и энергии пульсаций температуры, вносимой в данный масштаб пульсациями скорости на фоне

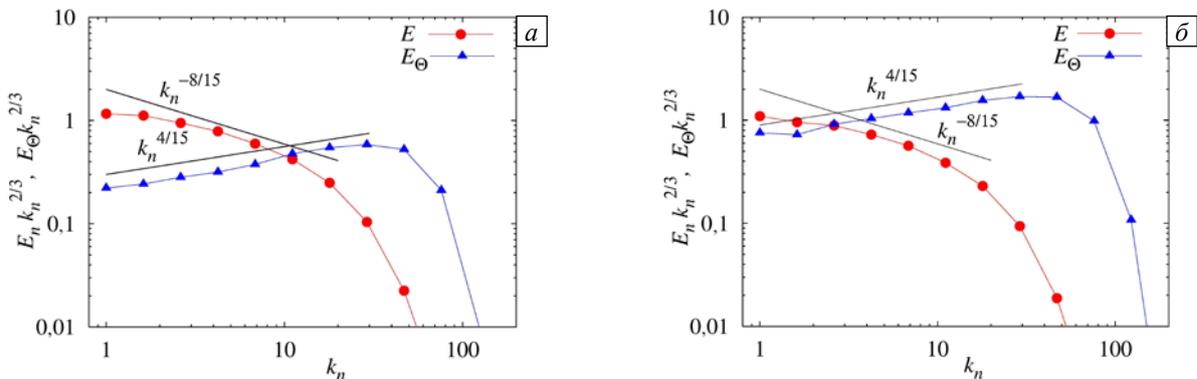


Рис. 1. Спектральные распределения энергий пульсаций скорости и температуры для $Re = 50$: УС (а), КТ(б)

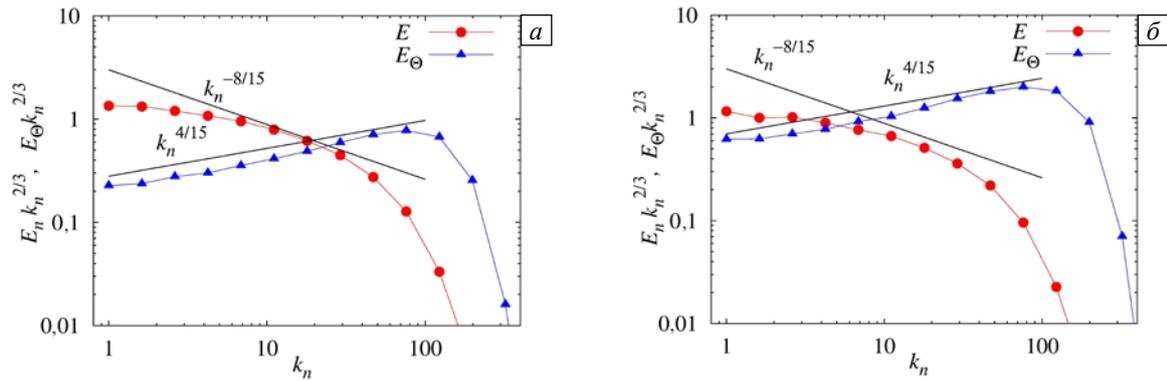


Рис. 2. Спектральные распределения энергий пульсаций скорости и температуры для $Re = 200$: UC (a), KT (б)

устойчивого градиента температуры (см. Рис. 3, 5). Отметим, что на рисунках 1, 2, 4 показаны компенсированные спектры, то есть значения энергии пульсаций скорости и температуры каждой оболочки умножены на $k_n^{2/3}$ и представлены в двойных логарифмических координатах. При таком представлении колмогоровскому закону « $-5/3$ » (1) соответствует горизонтальная линия, а законам « $-11/5$ » и « $-7/5$ » (3) соответствуют наклоны « $-8/15$ » и « $4/15$ », показанные прямыми линиями.

При малых числах Рейнольдса в спектральных распределениях, действительно, появляются фрагменты, тяготеющие к наклонам, отвечающим режиму ОБ. При этом они лучше выражены в распределениях пульсаций температуры. Участок $\langle |T_n|^2 \rangle \sim k_n^{4/15}$ занимает на шкале масштабов более декады при $Re = 50$ (Рис. 1), а при $Re = 200$ растягивается почти на две декады (Рис. 2). Для пульсаций скорости намек на ожидаемый закон $\langle |U_n|^2 \rangle \sim k_n^{-8/15}$ можно обнаружить только при $Re = 50$, но он выглядит скорее как переходный участок от неразвившегося инерционного интервала к диссипативному. При $Re = 200$ эта тенденция становится еще заметнее.

Графики спектральных потоков энергий пульсаций скорости и температуры приведены на рисунке 3. Используются следующие обозначения: Π_V — спектральный поток энергии пульсаций скорости; A_V — работа силы Архимеда; D_E — диссипация энергии пульсаций скорости; E_A — общая работа силы Архимеда на всех масштабах $k \leq k_n$; Π_T — спектральный поток энергии пульсаций температуры; G_T — энергия пульсаций температуры, генерируемая полем скорости на фоне крупномасштабного градиента

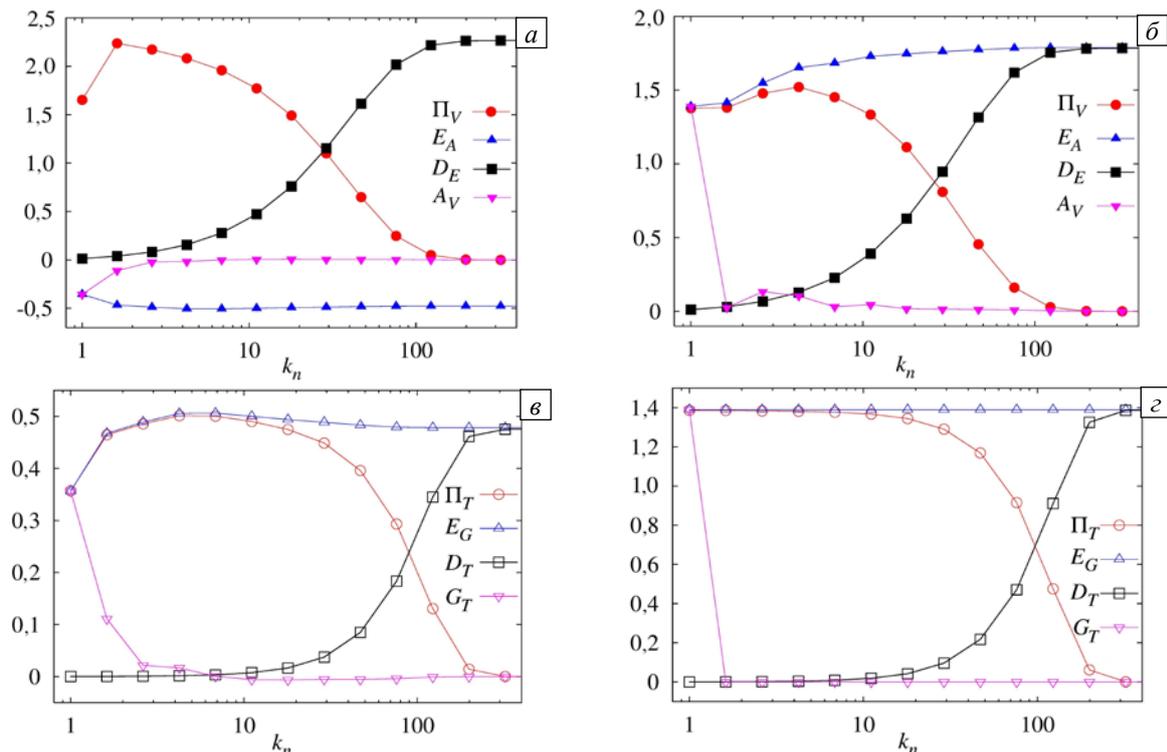


Рис. 3. Спектральные потоки энергий пульсаций скорости и температуры при $Re = 200$ и $Pr = 50$: UC (a), KT (б)

температуры; D_T — диссипация энергии пульсаций температуры; E_G — общая энергия пульсаций температуры, внесенная в систему на всех масштабах $k \leq k_n$.

Критерием наличия колмогоровского инерционного интервала является интервал масштабов с постоянным спектральным потоком кинетической энергии Π_V , а критерием появления режима ОБ — интервал с уравновешенными силами Архимеда и потоком энергии. Подробный анализ спектральных потоков, приведенных на рисунке 3, показывает, что в случае КТ сила Архимеда работает только в максимальном масштабе. Ее вклад в энергию остальных масштабов не превышает 10% от энергии, переносимой по спектру нелинейными взаимодействиями. В условиях УС силы Архимеда снижают поток энергии на наибольших масштабах (работа сил Архимеда A_V отрицательна) и практически не влияют на поток на всех остальных. Отметим, что участок спектра кинетической энергии, на котором его наклон похож на ожидаемый при режиме ОБ, приходится на масштаб, где диссипация энергии становится равной по величине спектральному потоку. Таким образом, условие баланса работы силы Архимеда A_V с нелинейным переносом энергии по спектру Π_V , как одного из условий реализации режима ОБ, практически не выполняется.

Режим развитой турбулентности с хорошо выраженным инерционным интервалом представлен на рисунках 4 и 5. Инерционный интервал демонстрирует все признаки классического колмогоровского

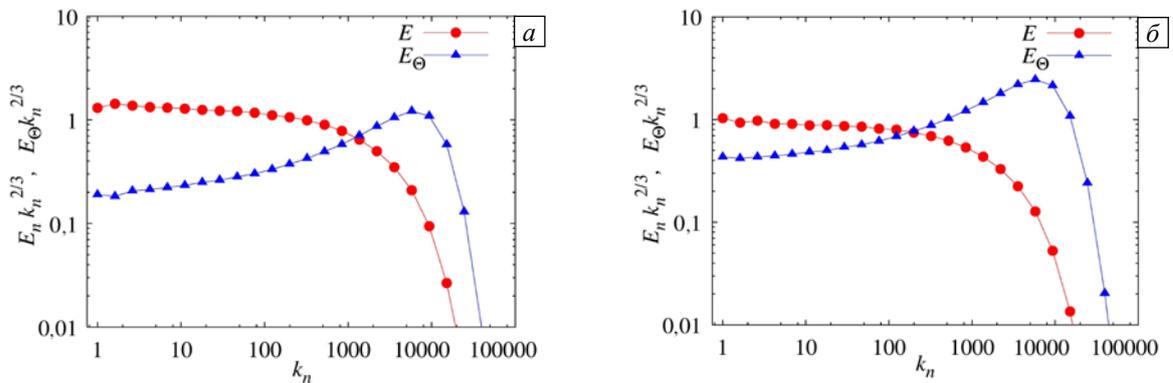


Рис. 4. Спектральные распределения энергий пульсаций скорости и температуры при $Re = 10^5$: УС (а), КТ (б)

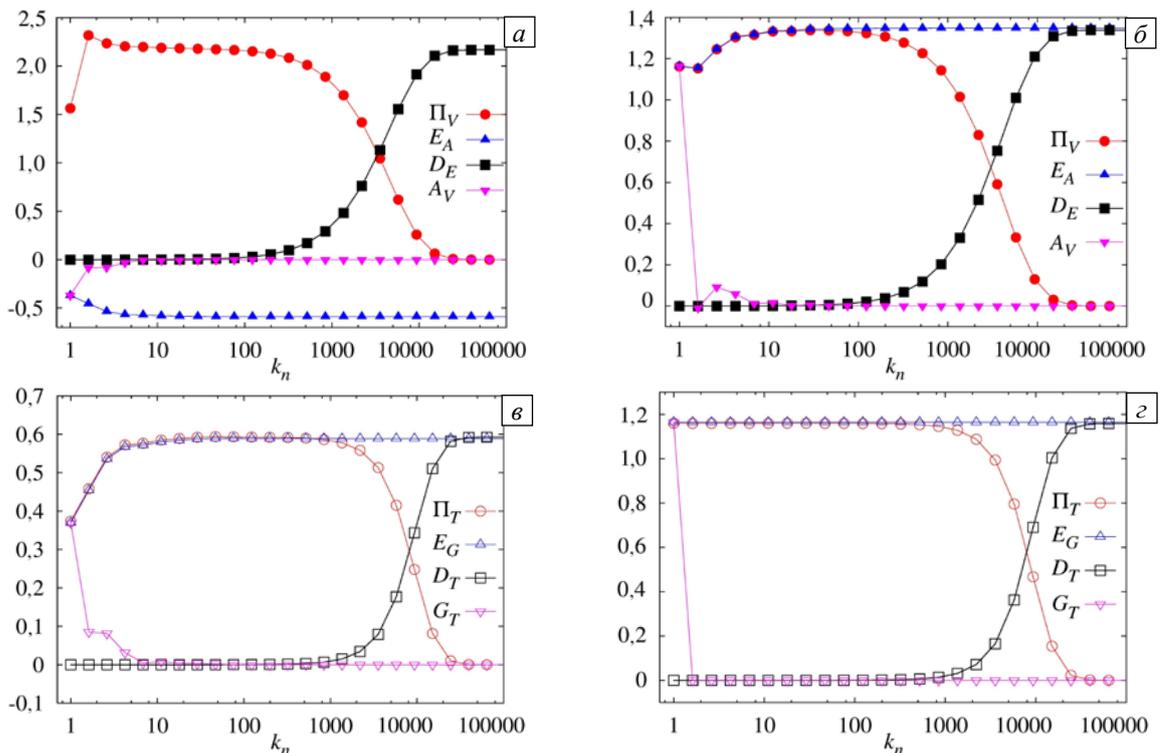


Рис. 5. Спектральные потоки энергий пульсаций скорости и температуры при $Re = 10^5$: УС (а), КТ (б)

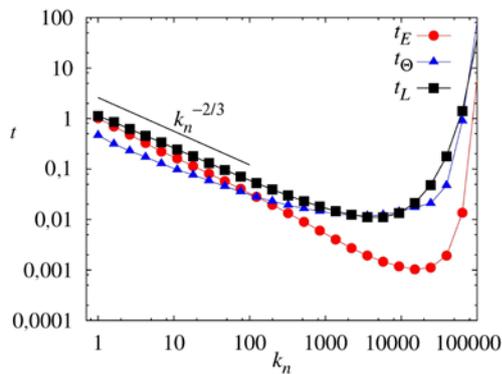


Рис. 6. Характерное время обмена энергиями пульсаций скорости t_E и температуры t_θ при $Re = 10^5$ в сравнении с характерным временем оборота вихря t_L

на преддиссипативных масштабах иллюстрирует также и рисунок 6. Здесь показаны характерные времена оборота вихря и переноса энергии на каждом масштабе (для $Re = 10^5$). В инерционном интервале все три времени изменяются по одному закону. При $k_n > 100$ начинает сказываться вязкость, и время оборота вихря $t_L = U_n k_n$ растет, хотя и почти незаметно. Однако эффект хорошо виден при сравнении поведения времен переноса кинетической энергии ($t_E = U_n^2 / \Pi_n^n$) и энергии пульсаций температуры ($t_\theta = T_n^2 / \Pi_T^n$) — график первого слегка отклоняется вниз, а график второго достаточно резко устремляется вверх, что свидетельствует о существенном ослаблении спектрального потока энергии пульсаций температуры. Эффект пропадает при $Pg \leq 1$.

Проведенные вычисления подтверждают сделанный выше (см. раздел 2) вывод о том, что проблема реализации режима ОБ, по сути, означает, что в турбулентном потоке не удастся выполнить условие $l_b \ll L$. В последней колонке таблицы приведены оценки масштаба Болджиано k_b для всех рассмотренных режимов. Можно видеть, что во всех случаях масштаб Болджиано превышает макромасштаб турбулентности.

5. Заключение

Результаты моделирования мелкомасштабной турбулентности в среде с наложенным вертикальным градиентом температуры показали, что условие баланса работы силы Архимеда и нелинейного переноса энергии по спектру в некотором диапазоне масштабов, являющееся необходимым условием существования режима ОБ, не выполняется ни в КТ, ни в УС турбулентности. Эффективное число Ричардсона остается ниже единицы даже в самом крупном масштабе, в котором сила Архимеда работает наиболее эффективно. Для возникновения режима ОБ необходимо, чтобы порядка единицы было эффективное число Ричардсона, определенное отдельно для каждого масштаба как

$$Ri_n = g\beta \frac{\langle U_n T_n \rangle}{k_n (\langle |U_n|^3 \rangle)}. \quad (12)$$

При этом данное условие должно соблюдаться в достаточно протяженной части инерционного интервала.

Появление в спектре пульсаций скорости участка с наклоном, близким к « $-11/5$ », наблюдается при умеренных числах Рейнольдса и не имеет отношения к режиму ОБ, так как обусловлено переходом от неразвившегося инерционного интервала к диссипативному.

В жидкостях с $Pg \geq 1$ в мелкомасштабной части спектров пульсаций температуры возможны участки с наклоном, близким к « $-7/5$ », как при малых, так и при больших значениях числа Рейнольдса. Это незначительное уплощение колмогоровского спектра объясняется снижением эффективности спектрального переноса энергии пульсаций температуры в диссипативном интервале кинетической энергии.

В режимах развитой турбулентности, признаком которой является интервал с постоянным спектральным потоком кинетической энергии, силы Архимеда не оказывают существенного воздействия на динамику инерционного интервала. В КТ именно они обеспечивают энергией турбулентность, но только на максимальных масштабах. В УС силы плавучести снижают энергию турбулентных

интервала с постоянным спектральным потоком кинетической энергии и законом « $-5/3$ » более чем в двух декадах волновых чисел. Температура ведет себя как пассивная примесь. При этом КТ отличается от УС только существенно более высоким уровнем энергии пульсаций температуры на всех масштабах. В обоих случаях можно увидеть, что наклон спектра энергии пульсаций температуры с приближением к масштабам диссипации кинетической энергии начинает падать (на рисунке это соответствует росту компенсированных энергий), но это накопление энергии пульсаций температуры обусловлено ослаблением пульсаций скорости (за счет падения эффективности перемешивания) и к режиму ОБ отношения не имеет.

Представленную интерпретацию механизма накопления энергии пульсаций температуры

пульсаций. Ни в том, ни в другом случае режим Обухова–Болджиано не возникает, а на масштабах, попадающих под определение инерционного интервала, устанавливается колмогоровская турбулентность с законом « $-5/3$ », в которой температура ведет себя как пассивная примесь.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00459-а).

Литература

1. *Обухов А.М.* О влиянии архимедовых сил на структуру температурного поля в турбулентном потоке // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, № 6. – С. 1246-1248.
2. *Bolgiano R., Jr.* Turbulent spectra in a stably stratified atmosphere // *J. Geophys. Res.* – 1959. – Vol. 64, no. 12. – P. 2226-2229. DOI
3. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Доклады АН СССР. – 1941. – Т. 30, № 4. – С. 9-13.
4. *Wu X.-Z., Kadanoff L., Libchaber A., Sano M.* Frequency power spectrum of temperature fluctuation in free convection // *Phys. Rev. Lett.* – 1990. – Vol. 64. – P. 2140-2143. DOI
5. *Chillá F., Ciliberto S., Innocenti C., Pampaloni E.* Boundary layer and scaling properties in turbulent thermal convection // *Nuovo Cimento D.* – 1993. – Vol. 15, no. 9. – P. 1229-1249. DOI
6. *Calzavarini E., Toschi F., Tripiccione R.* Evidences of Bolgiano–Obukhov scaling in three-dimensional Rayleigh–Bénard convection // *Phys. Rev. E.* – 2002. – Vol. 66. – 016304. DOI
7. *Kumar A., Chatterjee A.G., Verma M.K.* Energy spectrum of buoyancy-driven turbulence // *Phys. Rev. E.* – 2014. – Vol. 90. – 023016. DOI
8. *Lohse D., Xia K.-Q.* Small-scale properties of turbulent Rayleigh–Bénard convection // *Annual Rev. Fluid Mech.* – 2010. – Vol. 42. – P. 335-364. DOI
9. *Ложкин С.А., Фрик П.Г.* Инерционный интервал Обухова–Болджиано в каскадных моделях конвективной турбулентности // МЖГ. – 1998. – № 6. – С. 37-46. (English version DOI).
10. *Boffetta G., de Lillo F., Mazzino A., Musacchio S.* Bolgiano scale in confined Rayleigh–Taylor turbulence // *J. Fluid Mech.* – 2012. – Vol. 690. – P. 426-440. DOI
11. *Kumar A., Verma M.K.* Shell model for buoyancy-driven turbulence // *Phys. Rev. E.* – 2015. – Vol. 91. – 043014. DOI
12. *Фрик П.Г.* Моделирование каскадных процессов в двумерной турбулентной конвекции // ПМТФ. – 1986. – № 2. – С. 71-79. (English version DOI).
13. *Зимин В.Д., Фрик П.Г.* Турбулентная конвекция. – М.: Наука, 1988. – 178 с.
14. *Brandenburg A.* Energy spectra in a model for convective turbulence // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – Vol. 69, no. 4. – P. 605-608. DOI
15. *Фрик П.Г., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д.* Каскадная модель турбулентности для жидкого ядра Земли // Доклады РАН. – 2002. – Т. 387, № 2. – С. 253-257.
16. *Ching E.S.C., Ko T.C.* Ultimate-state scaling in a shell model for homogeneous turbulent convection // *Phys. Rev. E.* – 2008. – Vol. 78. – 036309. DOI
17. *Фрик П.Г.* Иерархическая модель двумерной турбулентности // Магнитная гидродинамика. – 1983. – № 1. – С. 60-66.
18. *Деснянский В.Н., Новиков Е.А.* Моделирование каскадных процессов в турбулентных течениях // ПИММ. – 1974. – Т. 38, № 3. – С. 507-513.
19. *Biferale L., Lambert A., Lima R., Paladin G.* Transition to chaos in a shell model of turbulence // *Physica D.* – 1995. – Vol. 80, no. 1-2. – P. 105-119. DOI
20. *Frick P., Dubrulle B., Babiano A.* Scaling properties of a class of shell models // *Phys. Rev. E.* – 1995. – Vol. 51. – P. 5582-5593. DOI
21. *L'vov V., Podivilov E., Potyralov A., Procaccia I., Vandembroucq D.* Improved shell model of turbulence // *Phys. Rev. E.* – 1998. – Vol. 58. – P. 1811-1822. DOI
22. *Степанов Р.А., Фрик П.Г., Шестаков А.В.* О спектральных свойствах спиральной турбулентности // МЖГ. – 2009. – Т. 44, № 5. – С. 33-44. (English version DOI).
23. *Plunian F., Stepanov R., Frick P.* Shell models of magnetohydrodynamic turbulence // *Phys. Rep.* – 2013. – Vol. 523, no. 1. – P. 1-60. DOI
24. *Шестаков А.В., Степанов Р.А., Фрик П.Г.* Влияние вращения на каскадные процессы в спиральной турбулентности // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 193-198. DOI

References

1. *Obukhov A.M.* On the influence of Archimedean force on the structure of temperature field in turbulent flow. *Doklady Akad. Sci. USSR*, 1959, vol. 125, no. 6, pp. 1246-1248.
2. *Bolgiano R., Jr.* Turbulent spectra in a stably stratified atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1959, vol. 64, no. 12, pp. 2226-2229. DOI
3. *Kolmogorov A.N.* The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Doklady Akad. Sci. USSR*, 1941, vol. 30, no. 4, pp. 299-303.
4. *Wu X.-Z., Kadanoff L., Libchaber A., Sano M.* Frequency power spectrum of temperature fluctuation in free convection. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, pp. 2140-2143. DOI
5. *Chillá F., Ciliberto S., Innocenti C., Pampaloni E.* Boundary layer and scaling properties in turbulent thermal convection. *Nuovo Cimento D*, 1993, vol. 15, no. 9, pp. 1229-1249. DOI
6. *Calzavarini E., Toschi F., Tripiccione R.* Evidences of Bolgiano–Obukhov scaling in three-dimensional Rayleigh–Bénard convection. *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 66, 016304. DOI

7. Kumar A., Chatterjee A.G., Verma M.K. Energy spectrum of buoyancy-driven turbulence. *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 90, 023016. DOI
8. Lohse D., Xia K-Q. Small-scale properties of turbulent Rayleigh–Bénard convection. *Annual Rev. Fluid Mech.*, 2010, vol. 42, pp. 335-364. DOI
9. Lozhkin S.A., Frick P.G. Inertial Obukhov–Bolgiano interval in shell models of convective turbulence. *Fluid Dynamics*, 1998, vol. 33, no. 6, pp. 842-849. DOI
10. Boffetta G., de Lillo F., Mazzino A., Musacchio S. Bolgiano scale in confined Rayleigh-Taylor turbulence. *J. Fluid Mech.*, 2012, vol. 690, pp. 426-440. DOI
11. Kumar A., Verma M.K. Shell model for buoyancy-driven turbulence. *Phys. Rev. E.*, 2015, vol. 91, 043014. DOI
12. Frick P.G. Modeling cascade processes in two-dimensional turbulent convection. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, vol. 27, no. 2, pp. 221-228. DOI
13. Zimin V.D., Frick P.G. *Turbulent convection*. Moscow: Nauka, 1988. 178 p.
14. Brandenburg A. Energy spectra in a model for convective turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 1992, vol. 69, no. 4, pp. 605-608. DOI
15. Frick P.G., Reshetnyak M.Yu., Sokoloff D.D. Cascade models of turbulence for the Earth's liquid core. *Doklady Earth Sciences*, 2002, vol. 387, pp. 988-991.
16. Ching E.S.C., Ko T.C. Ultimate-state scaling in a shell model for homogeneous turbulent convection. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, 036309. DOI
17. Frick P.G. Hierarchical model of two-dimensional turbulence. *Magnetohydrodynamics*, 1983, vol. 19, no. 1, pp.48-53.
18. Desnianskii V.N., Novikov E.A. Simulation of cascade processes in turbulent flows. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika – J. Appl. Math. Mech.*, 1974, vol. 38, no. 3, pp. 507-513.
19. Biferale L., Lambert A., Lima R., Paladin G. Transition to chaos in a shell model of turbulence. *Physica D*, 1995, vol. 80, no. 1-2, pp. 105-119. DOI
20. Frick P., Babiano A., Dubrulle B. Scaling properties of a class of shell models. *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 51, pp. 5582-5593. DOI
21. L'vov V., Podivilov E., Pomyalov A., Procaccia I., Vandembroucq D. Improved shell model of turbulence. *Phys. Rev. E*, 1998, vol. 58, pp. 1811-1822. DOI
22. Stepanov R.A., Frick P.G., Shestakov A.V. Spectral properties of helical turbulence. *Fluid Dynamics*, 2009, vol. 44, no. 5, pp. 658-666. DOI
23. Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. Rep.*, 2013, vol. 523, pp. 1-10. DOI
24. Shestakov A.V., Stepanov R.A., Frick P.G. Influence of rotation on cascade processes in helical turbulence. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 193-198. DOI

Поступила в редакцию 02.03.2016; опубликована в электронном виде 30.06.2016

Сведения об авторах

Шестаков Александр Владимирович, кфмн, нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д.1; e-mail: shestakov@icmm.ru

Степанов Родион Александрович, дфмн, внс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: rodion@icmm.ru

Фрик Петр Готлобович, дфмн, зав. лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: frick@icmm.ru