

DOI: [10.7242/1999-6691/2016.9.1.7](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.1.7)

УДК 539.374

**РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНО-КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ  
СИЛЬНОВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД  
ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ  
К МОДЕЛИРОВАНИЮ ГЕОДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТЕКТОНОСФЕРЫ ЗЕМЛИ**

Ю.В. Пятаков, В.Ю. Косыгин

*Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Российская Федерация*

Выполнена математическая постановка гранично-контактной задачи динамики для неограниченной неоднородной области. Моделируемая сильновязкая несжимаемая неоднородная среда представляет собой совокупность разнородных непересекающихся подобластей, каждая из которых имеет свое постоянное значение вязкости. На контактах смежных подобластей значения компонент векторов мгновенной скорости смещения среды и напряжений положены непрерывными. Так как рассматривается неограниченная среда, то граница моделируемой области отсутствует. При этом предполагается, что вектор мгновенной скорости смещения среды и давление удовлетворяют условиям убывания на бесконечности. Показано, что записи вектора скорости и давления в виде сумм интегральных выражений для гидродинамических потенциалов (объёмного, простого и двойного слоёв) позволяют свести решение гранично-контактной задачи для неограниченной области к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В силу того, что стоящие в системе перед несобственными интегралами множители по модулю меньше единицы, для численного решения этой системы уравнений применяется обычный метод последовательных приближений. Полученное решение гранично-контактной задачи апробируется на модельном примере, имитирующем ситуацию, при которой в литосфере Земли начинает формироваться конвергентный разлом. Приводятся результаты вычислений.

*Ключевые слова:* гранично-контактная задача, интегральное уравнение, слабая особенность, система уравнений динамики, потенциал двойного слоя, сильновязкая среда, тектоносфера, поверхности контактов

**SOLUTION OF THE BOUNDARY-CONTACT DYNAMIC PROBLEM  
FOR STRONGLY VISCOUS INCOMPRESSIBLE INHOMOGENEOUS MEDIA  
IN THE UNBOUNDED REGION AND ITS APPLICATION TO MODELING  
THE GEODYNAMIC CONDITIONS OF THE EARTH'S TECTONOSPHERE**

Yu.V. Pyatakov and V.Yu. Kosygin

*Computing Center FEB RAS, Khabarovsk, Russian Federation*

A mathematical formulation of the boundary-contact dynamic problem for the unbounded inhomogeneous region is presented. A highly viscous incompressible inhomogeneous medium is modeled as a set of disparate disjoint subregions, each having constant viscosity. The values of instantaneous velocity vector components and stresses are set to be continuous at the contact areas between the adjacent interconnecting subdomains. Since the boundary of the modeled region representing the unbounded medium is absent, it is assumed that the instantaneous velocity vector and pressure satisfy the diminishing condition at infinity. It is shown that a representation of the velocity component and pressure in the form of a sum of integral expressions for hydrodynamic potentials (volume, simple and double layers) allows one to reduce the solution of the contact problem in the unbounded region to the solution of the system of Fredholm integral equations of the second kind. Because the factors that stand in the system in front of the improper integrals are, in the absolute value, less than unity, then to find the numerical solution of the equations, we can apply a standard method of successive approximations. The solution of the boundary-contact problem is tested on a model example of a situation at which a convergent break begins to form in the Earth's lithosphere.

*Key words:* boundary-contact problem, integrated equation, weak feature, system of dynamic equations, double layer potential, strongly viscous medium, tectonosphere, contact area

## 1. Введение

Исходя из анализа данных о вертикальных движениях земной поверхности, возникавших во время последнего ледникового периода в результате сначала образования, а затем таяния ледяных покровов в Фенноскандии, Канаде и Сибири, учёными было сделано предположение о том, что тектоносферу Земли можно считать сильновязкой несжимаемой средой с динамической вязкостью, варьирующейся в пределах от  $10^{18}$  до  $10^{25}$  (Па·с) [1, 2]. В дальнейшем этот вывод подтвердился другими геолого-геофизическими, а также лабораторными исследованиями [3, 4] и был положен в основу доминирующей в настоящее время в геологических науках глобальной концепции литосферных плит [5]. Согласно этой концепции движущей силой всего ансамбля литосферных плит Земли являются конвективные течения мантийного вещества в тектоносфере, что в свою очередь предполагает его жидкое состояние.

В связи с этими обстоятельствами для теории динамики сильновязких несжимаемых сред открылась новая обширная область приложений, заключающаяся в исследованиях геодинамики земных недр.

В геофизической литературе стали появляться публикации, связанные с решением прикладных задач динамики сильновязкого вещества тектоносферы Земли [6–11]. В подавляющем большинстве работ задачи имели двухмерную постановку и решались конечно-разностными методами. Из точных аналитических решений следует отметить решения плоских задач конвекции в мантии, найденные в [12, 13].

Наибольшее распространение получил способ теоретического исследования геодинамических процессов в тектоносфере, основанный на численном решении задач термической конвекции [6–8]. При этом разыскивается совместное решение уравнений Навье–Стокса и теплового баланса.

Другой подход базируется на анализе внешнего гравитационного поля Земли [9–11, 14]. Предполагается, что движения и деформации среды вызываются распределёнными в ней плотностными неоднородностями, на которые действуют силы притяжения со стороны сферически симметричной Земли и архимедовы силы. В качестве исходных данных для решения задач геодинамики используются сведения о плотностном строении Земли, установленные путём решения обратных задач гравиметрии. В работах [9–11] система уравнений Навье–Стокса реализована при условии постоянной вязкости среды. Задача с переменной вязкостью среды в двухмерной постановке рассмотрена в [14, 15]. В этих работах система уравнений движения вязкой среды посредством введения функции тока записывалась в виде обобщённого бигармонического уравнения с правой частью, зависящей от распределения плотности в изучаемой модели. Уравнение решалось методом конечно-разностной аппроксимации в прямоугольной области с заданными граничными условиями.

В данной работе, в отличие от перечисленных выше, отыскивается решение системы уравнений Навье–Стокса и неразрывности для сильновязкой неоднородной несжимаемой среды в трёхмерной постановке. Решение строится для неограниченной области  $V$ , представленной совокупностью из  $N$  непересекающихся подобластей  $V_n$ , имеющих постоянные значения вязкости. На поверхностях контактов смежных областей  $V_n$  и  $V_k$  считаются заданными условия непрерывности значений компонент векторов мгновенной скорости смещения среды и напряжений. Для решения задачи в работе используется математический аппарат, опирающийся на методы теории потенциала и теории интегральных уравнений, позволяющий свести решение исходной системы дифференциальных уравнений к решению системы интегральных уравнений для точек на поверхностях контакта смежных подобластей, что приводит к понижению размерности исходной задачи.

Отметим, что в теоретических работах, посвящённых математическим вопросам динамики вязкой несжимаемой жидкости, задачи имели как двух-, так и трёхмерную постановку. Так, в монографии О.А. Ладженской [16] на основе идей функционального анализа и обобщённых решениях дифференциальных уравнений в частных производных исследовались вопросы разрешимости стационарных и нестационарных краевых задач для уравнений Навье–Стокса. В частности, получено обобщённое решение стационарной линеаризованной задачи Стокса. В этой же работе приведены решения классических задач, построенные с помощью методов теории потенциала и теории интегральных уравнений. Однако, в отличие от задачи, обсуждаемой в настоящей статье, в монографии [16] краевые задачи формулировались для однородных сред с постоянным значением вязкости.

Решение задачи в трёхмерной постановке, осуществлённое здесь, делилось на этапы: математическую постановку, построение решения, его численную реализацию, анализ результатов вычислений. Последовательность построения решения была следующей: сначала, исходя из известных соотношений теории потенциала и условий непрерывности напряжений на поверхностях контактов смежных областей, находились выражения для вычисления значений вектора скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  и давления  $p(\mathbf{x})$  во внутренних точках подобластей  $V_n$  через значения вектора скорости в точках поверхностей контактов. Затем из условия непрерывности  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  получалась система интегральных уравнений для нахождения значения вектора скорости на поверхностях контактов. Показано, что на систему уравнений распространяется теория интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В качестве метода её решения может быть использован метод простой итерации.

Этап численной реализации построенного решения показан на конкретном примере: исследовании влияния аномально разуплотнённой мантии на границе астеносферы и литосферы на напряжённно-деформированное состояние Земли. Завершают статью подведение итогов и выводы.

## 2. Постановка гранично-контактной задачи для неограниченных сред

Пусть неограниченная область  $V$ , в которой происходит движение среды, состоит из  $N$  непересекающихся подобластей  $V_n$ :

$$V = \bigcup_{n=1}^N V_n \quad \text{и} \quad V_n \cap V_k = \emptyset \quad \text{при} \quad n \neq k.$$

Положим вязкость среды в каждой из подобластей  $V_n$  постоянной и равной  $\eta_n$ , границы  $\partial V_n$  подобластей  $V_n$  кусочно-гладкими, удовлетворяющими условиям Ляпунова [17]. Тогда установившееся движение несжимаемой сильновязкой среды может быть описано следующей системой уравнений:

$$-\nabla p(\mathbf{x}) + \eta_n \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V_n, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  — вектор мгновенной скорости смещения среды в точке  $\mathbf{x}$ ,  $p(\mathbf{x})$  — давление в точке  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  — вектор массовой силы, отнесённый к единице объёма.

Будем считать, что на контактах смежных подобластей  $V_n$  и  $V_k$  заданы условия непрерывности для компонент векторов скорости и напряжений:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}-\mathbf{0}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{0}), \quad \mathbf{x} \in S_{nk}, \quad S_{nk} = \partial V_n \cap \partial V_k, \quad (2)$$

$$\mathbf{T}(\eta_n, \mathbf{u}(\mathbf{x}-\mathbf{0}), p(\mathbf{x}-\mathbf{0}), \mathbf{n}(\mathbf{x})) = \mathbf{T}(\eta_k, \mathbf{u}(\mathbf{x}+\mathbf{0}), p(\mathbf{x}+\mathbf{0}), \mathbf{n}(\mathbf{x})). \quad (3)$$

Учитывая, что  $V$  представляет собой неограниченную область, где граница  $\partial V$  отсутствует, примем в качестве граничных условий условия убывания функций  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  и  $p(\mathbf{x})$  на бесконечности:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad p(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-2}) \quad \text{при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Используя терминологию В.Д. Купрадзе [18], задачу (1)–(4) будем называть гранично-контактной задачей для неоднородной неограниченной среды.

В (3) символом  $\mathbf{T}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}))$  обозначен вектор поверхностных сил (напряжений), действующих в точке  $\mathbf{x}$  поверхности  $dS$ , имеющей нормаль  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  и принадлежащей бесконечно малому элементу поверхности  $\partial V$ :

$$\mathbf{T}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})) = \left\| \tau_{ij}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) \right\|_{3 \times 3} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где  $\left\| \tau_{ij}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) \right\|_{3 \times 3}$  — матрица, элементами  $\tau_{ij}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$  которой являются компоненты напряжений

$$\tau_{ij}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})) = \eta \left( \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \cdot p(\mathbf{x}), \quad (6)$$

$\delta_{ij}$  — символ Кронекера. В дальнейшем вектор  $\mathbf{T}(\eta, \mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}))$ , определённый соотношениями (5), (6), будем обозначать символом  $\mathbf{T}_x(\eta, \mathbf{u}, p, \mathbf{n})$ .

### 3. Решение гранично-контактной задачи для неограниченных сред

Введём дифференциальный оператор вида

$$\mathbf{A}_x(\eta, \mathbf{u}, p) \equiv -\nabla p(\mathbf{x}) + \eta \cdot \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (7)$$

и несколько соотношений, необходимых для дальнейшего изложения.

Пусть поверхность  $\partial V$  области  $V$  является поверхностью Ляпунова:  $V \subset E^3$ , а функции  $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x})$ ,  $p^{(1)}(\mathbf{x})$ ,  $p^{(2)}(\mathbf{x})$ , удовлетворяют условиям:

$$\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) \in C^l(\bar{V}) \cap C^2(V), \quad p^{(k)}(\mathbf{x}) \in C(\bar{V}) \cap C^1(V), \quad \nabla \mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{V} \quad (k=1, 2), \quad (8)$$

где  $\bar{V} = V \cup \partial V$ ,  $C^n(V)$  и  $C^n(\bar{V})$  — классы функций, имеющих, соответственно, в неограниченной  $(V)$  и замкнутой  $(\bar{V})$  областях непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно, а  $C(\bar{V})$  —

класс функций, непрерывных в  $\bar{V}$ . Тогда на основании формулы Гаусса–Остроградского можно установить, что справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_V \left( \mathbf{A}_x(\eta, \mathbf{u}^{(2)}, p^{(2)}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_x(\eta, \mathbf{u}^{(1)}, p^{(1)}) \cdot \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) \right) dV_x = \\ & = \int_{\partial V} \left( \mathbf{T}_x(\eta, \mathbf{u}^{(2)}, p^{(2)}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}_x(\eta, \mathbf{u}^{(1)}, p^{(1)}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) \right) dS_x. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})$  удовлетворяют системе уравнений (1)–(4), а функции  $\mathbf{u}^i(\mathbf{x}, \xi) = \eta_n^{-1} \cdot \mathbf{g}^i(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $p^i(\mathbf{x}, \xi)$  представляют собой решение фундаментальной системы уравнений:

$$\begin{aligned} -\nabla p^i(\mathbf{x}, \xi) + \eta_n \cdot \nabla^2 \mathbf{u}^i(\mathbf{x}, \xi) + \delta(\mathbf{x} - \xi) \cdot \mathbf{i} &= 0, \\ \nabla \mathbf{u}^i(\mathbf{x}, \xi) &= 0, \end{aligned}$$

где  $\delta$  — функция Дирака,  $\mathbf{i}$  —  $i$ -й орт декартовой системы координат ( $i=1,2,3$ ). Выражения для функций  $\mathbf{g}^i(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $p^i(\mathbf{x}, \xi)$  приведены в работах [16, 19].

Положим в формуле (9) в качестве функций  $\mathbf{u}^{(1)}$ ,  $p^{(1)}$  функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $p(\mathbf{x})$ , а в качестве функций  $\mathbf{u}^{(2)}$ ,  $p^{(2)}$  — функции  $\mathbf{u}^i(\mathbf{x}, \xi) = \eta_n^{-1} \cdot \mathbf{g}^i(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $p^i(\mathbf{x}, \xi)$ . Тогда выражение для  $i$ -й компоненты решения  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в подобласти  $V_n$  примет вид:

$$\begin{aligned} k_n(\mathbf{x}) \cdot u_i(\mathbf{x}) &= \int_{V_n} \mathbf{g}^i(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V - \eta_n \int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(1, \mathbf{g}^i(\xi, \mathbf{x}), p^i(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \mathbf{u}(\xi) d_\xi S + \\ &+ \int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(\eta_n, \mathbf{u}(\xi), p(\xi), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \mathbf{g}^i(\xi, \mathbf{x}) d_\xi S, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{T}_\xi(1, \mathbf{g}^i(\xi, \mathbf{x}), p^i(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) = \mathbf{T}_\xi(\eta, \mathbf{g}^i(\xi, \mathbf{x}), p^i(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi))$  при  $\eta=1$ ;  $k_n(\mathbf{x}) = \begin{cases} \eta_n & \text{для } \mathbf{x} \in V_n, \\ 0 & \text{для } \mathbf{x} \notin V_n. \end{cases}$

В дальнейшем, для удобства записи, оператор  $\mathbf{T}_\xi(1, \mathbf{g}^i(\xi, \mathbf{x}), p^i(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi))$  будем обозначать символом  $\mathbf{T}_\xi(\mathbf{g}^i(\xi, \mathbf{x}), p^i(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi))$ . Тогда для вектора  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  будет иметь место соотношение:

$$\begin{aligned} k_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \int_{V_n} \mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V - \eta_n \cdot \int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \mathbf{u}(\xi) d_\xi S + \\ &+ \int_{\partial V_n} \mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}_\xi(\eta_n, \mathbf{u}(\xi), p(\xi), \mathbf{n}(\xi)) d_\xi S. \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) = \|t_{ij}\|_{3 \times 3}$  — матрица, элемент  $t_{ij}$  которой представляет собой проекцию вектора  $\mathbf{T}_\xi(\mathbf{g}^i(\xi, \mathbf{x}), p^i(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi))$  на  $j$ -ю ось системы координат;  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, \xi)$  — симметричная квадратная матрица третьего порядка [19], элементами которой являются величины  $g_j^i(\mathbf{x}, \xi)$ ;  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \xi) = (p^1(\mathbf{x}, \xi), p^2(\mathbf{x}, \xi), p^3(\mathbf{x}, \xi))$ . При этом

$$g_j^i(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2 R(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_j \partial x_i} + \delta_{ji} \frac{1}{4\pi R(\mathbf{x}, \xi)}, \quad p^i(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{R(\mathbf{x}, \xi)}, \quad R(\mathbf{x}, \xi) = |\mathbf{x} - \xi|. \quad (11)$$

Просуммируем равенства (10) по  $n=1, 2, \dots, N$ . По условию (3) компоненты напряжений должны быть непрерывными, в то время как векторы внешней нормали на поверхностях контактов смежных областей имеют противоположную направленность, поэтому, сумма последних интегралов в правой части (10) обратится в нуль. В связи с этим решение  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в области  $V$  преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= -\sum_{n=1}^N \eta_n \cdot \int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \mathbf{u}(\xi) d_\xi S + \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V; \\ \eta(\mathbf{x}) &= \eta_n, \quad \mathbf{x} \in V_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Соответственно выражение для функции  $p(\mathbf{x})$  будет следующим:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \eta_n \cdot \int_{\partial V_n} \nabla(\mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\xi)) \cdot \mathbf{u}(\xi) d_\xi S + \sum_{n=1}^N \int_{\partial V_n} \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V. \quad (13)$$

В результате непосредственной проверки можно убедиться в том, что  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $p(\mathbf{x})$ , определяемые соотношениями (12), (13), удовлетворяют уравнениям (1) для внутренних точек подобластей  $V_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ).

Поверхностные интегралы по  $\partial V_n$  в правой части соотношения (12) — это потенциалы двойного слоя, поэтому их первые производные непрерывны. Интегралы по  $V_n$  представляют собой объёмные потенциалы и, следовательно, также имеют непрерывные первые производные. Поскольку интегралы в правой части (13) являются непрерывными функциями аргумента  $\mathbf{x}$ , функции  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $p(\mathbf{x})$  удовлетворяют условию (3). Выполнение условий (4) для  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $p(\mathbf{x})$  обусловлено свойствами потенциалов (12), (13) в окрестности бесконечно удалённой точки [16].

Подынтегральные выражения в правых частях (12), (13) содержат функцию  $\mathbf{u}(\xi)$ , определённую в точках  $\xi \in \partial V_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) или, учитывая, что границы  $\partial V_n$  одновременно являются границами контакта разнородных сред,  $\xi \in S_{\text{конт}}$ , где  $S_{\text{конт}} = \bigcup_{n=1, k=n+1}^N S_{nk}$ ,  $S_{nk} = \partial V_n \cap \partial V_k$ . Значение функции  $\mathbf{u}(\xi)$  найдём из условия непрерывности вектора скорости в точках, принадлежащих контактной поверхности  $S_{\text{конт}}$ .

Пусть теперь  $V_m, V_p$  — две смежных подобласти, имеющие общую поверхность контакта  $S_{mp}$ . Введём следующее обозначение:  $\mathbf{x}_\alpha = \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{0}, & \alpha = m, \\ \mathbf{x} + \mathbf{0}, & \alpha = p, \end{cases}$   $\alpha = m, p$ . Так как по определению  $\mathbf{x}_\alpha = \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{x}'$ , где  $\mathbf{x}' \in V_\alpha$ ,  $\mathbf{x} \in S_{mp}$ , то  $\mathbf{x} - \mathbf{0}$  — это точки той стороны поверхности  $S_{mp}$ , которая примыкает к подобласти  $V_m$ , а  $\mathbf{x} + \mathbf{0}$  — точки стороны поверхности, примыкающей к подобласти  $V_p$ .

Тогда на основании (12) можно записать:

$$\eta_\alpha \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}_\alpha) = - \sum_{n=1}^N \eta_n \cdot \int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}_\alpha), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}_\alpha), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \mathbf{u}(\xi) d_\xi S + \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V, \quad \mathbf{x}_\alpha \in S_{mp} \subseteq S_{\text{конт}} \quad (\alpha = m, p). \quad (14)$$

Просуммируем обе части равенства (14) по индексу  $\alpha = m, p$  и, принимая во внимание условие непрерывности (2), получим выражение для искомой функции в точках контактной поверхности:

$$(\eta_m + \eta_p) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N \eta_n \cdot 2 \int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \mathbf{u}(\xi) d_\xi S = 2 \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V, \quad \mathbf{x} \in S_{mp} \subseteq S_{\text{конт}}. \quad (15)$$

В левой части (15) интегралы в точках  $\mathbf{x} \in S_{mp} \subseteq S_{\text{конт}}$  понимаются в смысле их главных значений:

$$\int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) \mathbf{u}(\xi) d_\xi S = \frac{1}{2} \left[ \int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}_m), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}_m), \mathbf{n}(\xi)) \mathbf{u}(\xi) d_\xi S + \int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}_p), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}_p), \mathbf{n}(\xi)) \mathbf{u}(\xi) d_\xi S \right].$$

Введём в рассмотрение функцию  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in S_{mp}$  и обозначим вектор внешней нормали к границе подобласти  $V_n$  через  $\mathbf{n}_n$ . Тогда соотношение (15) преобразуется к интегральному уравнению

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1, k=n+1}^N \frac{\eta_n - \eta_k}{\eta_m + \eta_p} 2 \int_{S_{nk}} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}_n(\xi)) \boldsymbol{\varphi}(\xi) d_\xi S = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (16)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\eta_m + \eta_p} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V$ ,  $\mathbf{x} \in S_{mp}$ .

Соответственно соотношения (12), (13), определяющие решение, будут выглядеть так:

$$\eta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = - \sum_{n=1}^N \eta_n \cdot \int_{\partial V_n} \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\xi) d_\xi S + \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V, \quad (17)$$

$$\eta(\mathbf{x}) = \eta_n, \quad \mathbf{x} \in V_n,$$

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \eta_n \cdot \int_{\partial V_n} \nabla(\mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\xi)) \cdot \mathbf{u}(\xi) d_\xi S + \sum_{n=1}^N \int_{V_n} \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V, \quad (18)$$

где значение функции  $\boldsymbol{\varphi}(\xi)$  следует из решения системы интегральных уравнений (16).

Так как интегралы в (16) имеют слабую особенность, то, как показано Ф. Рисом [20], на такие уравнения распространяются все основные результаты теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Поскольку множители, стоящие перед несобственными интегралами в (16), по модулю меньше единицы, то можно показать, что для численного решения уравнения (16) применим обычный метод последовательных приближений. Отметим, что численное решение систем интегральных уравнений также может быть осуществлено с использованием методов, описанных в работах [18, 21].

#### 4. Расчёт модельного примера

Рассмотрим численную реализацию решения (16)–(18), предназначенного для исследования динамического поведения, применительно к модели тектоносферы Земли, приведённой на рисунке 1.

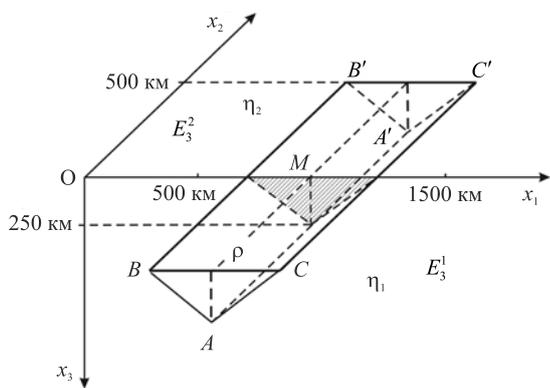


Рис. 1. Модель тектоносферы Земли

Плоскость  $Ox_1x_2$  делит трёхмерное евклидово пространство  $E_3$  на два полупространства: нижнее —  $E_3^1$ , содержащее включение в форме горизонтальной призмы с равнобедренным треугольным сечением, и верхнее —  $E_3^2$ , более вязкое, имитирующее литосферу, лежащую на менее вязкой астеносфере  $E_3^1$ . Треугольная горизонтальная призма разуплотняет среду, имитируя так называемую аномальную мантию, выделившуюся из астеносферы на границе с литосферой.

Положим вязкость нижнего полупространства равной  $\eta_1$ , а вязкость верхнего полупространства —  $\eta_2$ . Горизонтальное основание призмы располагается в плоскости  $x_3 = 0$  и перпендикулярно направлению

вектора ускорения силы тяжести  $\mathbf{g}$ . Треугольная призма представляет собой аномально разуплотнённое относительно вмещающей его среды тело. Аномальная плотность призмы (разность между плотностью призмы и плотностью вмещающей среды)  $\rho = -20 \text{ кг/м}^3$ . Вектор массовых сил  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  опишем выражением  $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \rho \mathbf{g} \mathbf{i}_3$ , где  $\mathbf{i}_3$  — орт оси  $Ox_3$ . Размеры призмы составляют: 500 км по оси  $Ox_1$ , 250 км по оси  $Ox_3$ , 1000 км по оси  $Ox_2$ , где ось  $Ox_2$  перпендикулярна плоскости рисунка и направлена от читателя.

Отличие данной модели от модели, рассмотренной ранее в работе [19], заключается в том, что теперь значения вязкостей нижнего ( $E_3^1$ ) и верхнего ( $E_3^2$ ) полупространств не равны друг другу ( $\eta_1 \neq \eta_2$ ), тогда как в предыдущей модели они были одинаковыми ( $\eta_1 = \eta_2$ ).

Запишем исходную систему уравнений (1) для данной модели:

$$-\nabla p(\mathbf{x}) + \eta_n \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in E_3^n \quad (n=1, 2). \quad (19)$$

Соответственно выражения (17), (18), определяющие решение, примут вид:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -((\eta_2 - \eta_1)/\eta(\mathbf{x})) \int_S \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\xi) d_\xi S + \mathbf{v}(\mathbf{x})/\eta(\mathbf{x}), \quad (20)$$

$$p(\mathbf{x}) = (\eta_2 - \eta_1) \int_S \nabla(\mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\xi)) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\xi) d_\xi S + p_0(\mathbf{x}), \quad (21)$$

где  $\eta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \eta_1, & \mathbf{x} \in E_3^1 \\ \eta_2, & \mathbf{x} \in E_3^2 \end{cases}$ ;  $S$  — плоскость  $x_3 = 0$ ;  $D$  — треугольная призма;  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_D \mathbf{G}(\mathbf{x}, \xi) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V$  и  $p_0(\mathbf{x}) = \int_D \mathbf{P}(\mathbf{x}, \xi) \cdot \mathbf{H}(\xi) d_\xi V$  — соответственно вектор мгновенной скорости смещения среды

и аномальное давление для однородной среды (с вязкостью  $\eta = \eta_1 = \eta_2 = 1$ ), содержащей аномально разуплотнённое включение  $D$ . Формулы для вычисления  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $p_0(\mathbf{x})$  были получены в [19] в явном аналитическом виде.

Система уравнений для определения функции  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ , согласно (16), будет следующей:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = -2 \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \int_S \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\xi) dS_\xi + \frac{2\mathbf{v}(\mathbf{x})}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (22)$$

В соответствии с (5), (6), (11) интеграл в правой части (22) можно записать так:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \int_S \mathbf{T}_\xi(\mathbf{G}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{P}(\xi, \mathbf{x}), \mathbf{n}(\xi)) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\xi) dS_\xi = \\ & = -\frac{3}{2\pi} \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \sum_{k=1}^3 \int_S (\xi_3 - x_3) \cdot (\xi_k - x_k) R^{-5}(\xi, \mathbf{x}) \mathbf{R}(\xi, \mathbf{x}) \boldsymbol{\varphi}_k(\xi) dS_\xi, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\mathbf{R}(\xi, \mathbf{x})$  — радиус-вектор, направленный из точки  $\mathbf{x}$  в точку  $\xi$ ;  $\mathbf{R}(\xi, \mathbf{x}) = (\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, \xi_3 - x_3)^T$ . Подынтегральные функции в (23) содержат множитель  $\xi_3 - x_3$ , поэтому в точках плоскости  $S$  интеграл в правой части (23) равен нулю, и, следовательно, искомая функция в уравнении (22) может быть найдена в явном виде:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\eta_2 + \eta_1} \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S.$$

По определению  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  для  $\mathbf{x} \in S$ , следовательно, в точках плоскости  $S$  вектор  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  принимает значение:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\eta_2 + \eta_1} \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S. \quad (24)$$

Поскольку значение функции  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  уже известно, решение находится по формулам (20), (21). При этом численный расчёт интегралов в правой части (20), (21) может быть осуществлён с помощью методов, описанных в работе [22].

Покажем, что в рассматриваемом модельном примере можно избежать вычисления интегралов (20), (21), записав решение задачи в явном аналитическом виде. Действительно, выражение (24), полученное на основании интегрального уравнения (22), даёт искомый вектор скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  в точках плоскости  $S$ . В соответствии с (19) в области  $E_3^2$  решение, с одной стороны, должно удовлетворять однородной системе уравнений движения, так как  $E_3^2$  не содержит аномального источника, и вектор массовых сил  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  при этом в точках  $\mathbf{x} \in E_3^2$  равняется нулю, а с другой стороны, в соответствии с (24) в точках  $\mathbf{x} \in S$  выполняется равенство  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{v}(\mathbf{x})/(\eta_2 + \eta_1)$ . Тогда в точках  $\mathbf{x} \in E_3^2$  решение системы уравнений (19) можно представить как

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\eta_1 + \eta_2} \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad p(\mathbf{x}) = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} p_0(\mathbf{x}).$$

Теперь найдём решение в точках области  $E_3^1$ . Запишем его в виде суммы  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^2(\mathbf{x})$ ,  $p(\mathbf{x}) = p^1(\mathbf{x}) + p^2(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})/\eta_1$ ,  $p^1(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x})$  — решение неоднородной системы уравнений (19), а  $\mathbf{u}^2(\mathbf{x})$ ,  $p^2(\mathbf{x})$  — решение однородной системы уравнений в точках  $\mathbf{x} \in E_3^1$ . Определим  $\mathbf{u}^2(\mathbf{x})$  так, чтобы на границе  $S$  выражение  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^2(\mathbf{x})$  принимало форму:  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{v}(\mathbf{x})/(\eta_2 + \eta_1)$  (тем самым будет обеспечена непрерывность вектора  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  при переходе точки  $\mathbf{x}$  из области  $E_3^2$  в область  $E_3^1$ ). Для этого разместим в области  $E_3^2$  источник  $D'$  с плотностью  $-\rho$ , зеркально отобразив область  $D$  относительно  $S$ . Обозначим  $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ ,  $p'(\mathbf{x})$  — поле скоростей и давление, обусловленные влиянием источника  $D'$  в однородном пространстве с вязкостью  $\eta_1$ . Поскольку  $D' \subset E_3^2$ , в области  $E_3^1$  решение

$\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ ,  $p'(\mathbf{x})$  будет удовлетворять однородной системе уравнений движения. Согласно построению включение  $D'$  является зеркальным отображением  $D$ , поэтому для  $\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = (u'_1(\mathbf{x}), u'_2(\mathbf{x}), u'_3(\mathbf{x}))^T$  и  $p'(\mathbf{x})$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned} u'_1(\mathbf{x}) &= v_1(x_1, x_2, -x_3)/\eta_1, & u'_2(\mathbf{x}) &= v_2(x_1, x_2, -x_3)/\eta_1, \\ u'_3(\mathbf{x}) &= -v_3(x_1, x_2, -x_3)/\eta_1, & p'(\mathbf{x}) &= -p_0(x_1, x_2, -x_3), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $v_1(\mathbf{x})$ ,  $v_2(\mathbf{x})$ ,  $v_3(\mathbf{x})$  — компоненты вектора  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

В таком случае решение  $k' \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x})$ ,  $k' \cdot p'(\mathbf{x})$  в точках области  $E_3^1$  также будет удовлетворять однородной системе уравнений движения ( $k'$  — произвольная константа). Положим  $k' = (\eta_1 - \eta_2)/(\eta_1 + \eta_2)$ . Тогда горизонтальные компоненты вектора  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + k' \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x})$  в точках плоскости  $S$  примут необходимые значения:  $u_i^1(\mathbf{x}) + k' \cdot u'_i(\mathbf{x}) = 2v_i(\mathbf{x})/(\eta_1 + \eta_2)$ , ( $i = 1, 2$ ). При этом вертикальная компонента вектора  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + k' \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x})$  в точках плоскости  $S$  составит  $u_3^1(\mathbf{x}) + k' \cdot u'_3(\mathbf{x}) = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \cdot \frac{v_3(\mathbf{x})}{\eta_1}$ , а давление —  $p(\mathbf{x}) = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \cdot p_0(\mathbf{x})$ .

Таким образом, остаётся найти решение  $\mathbf{u}''(\mathbf{x})$ ,  $p''(\mathbf{x})$ , удовлетворяющее в точках области  $E_3^1$  однородной системе уравнений движения, при этом горизонтальные компоненты вектора  $\mathbf{u}''(\mathbf{x})$  в точках  $S$  должны равняться нулю, а вертикальная компонента — принимать значение  $u_3''(\mathbf{x}) = 2k'' \cdot v_3(\mathbf{x})$ , где  $k'' = \frac{\eta_1 - \eta_2}{(\eta_1 + \eta_2) \cdot \eta_1}$ .

Проведя непосредственную проверку, можно убедиться, что таким решением будет следующее:

$$u_1'' = -2k'' \cdot x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad u_2'' = -2k'' \cdot x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad u_3'' = -2k'' \cdot x_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + 2k'' \cdot \Phi, \quad p'' = -2k'' \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \quad (26)$$

где  $\Phi(\mathbf{x})$  — гармоническая в области  $E_3^1$  функция, определяемая соотношением

$$\Phi = \frac{\rho}{4\pi} \int_D \left( \frac{1}{R_2} + \frac{(x_3 + \xi_3)^2}{R_2^3} - x_3 \frac{x_3 + \xi_3}{R_2^3} \right) dV_{\xi}, \quad R_2^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 + \xi_3)^2.$$

В точках плоскости  $S$  ( $x_3 = 0$ ) выражение для  $\Phi(\mathbf{x})$  совпадает с выражением для  $v_3(\mathbf{x})$ .

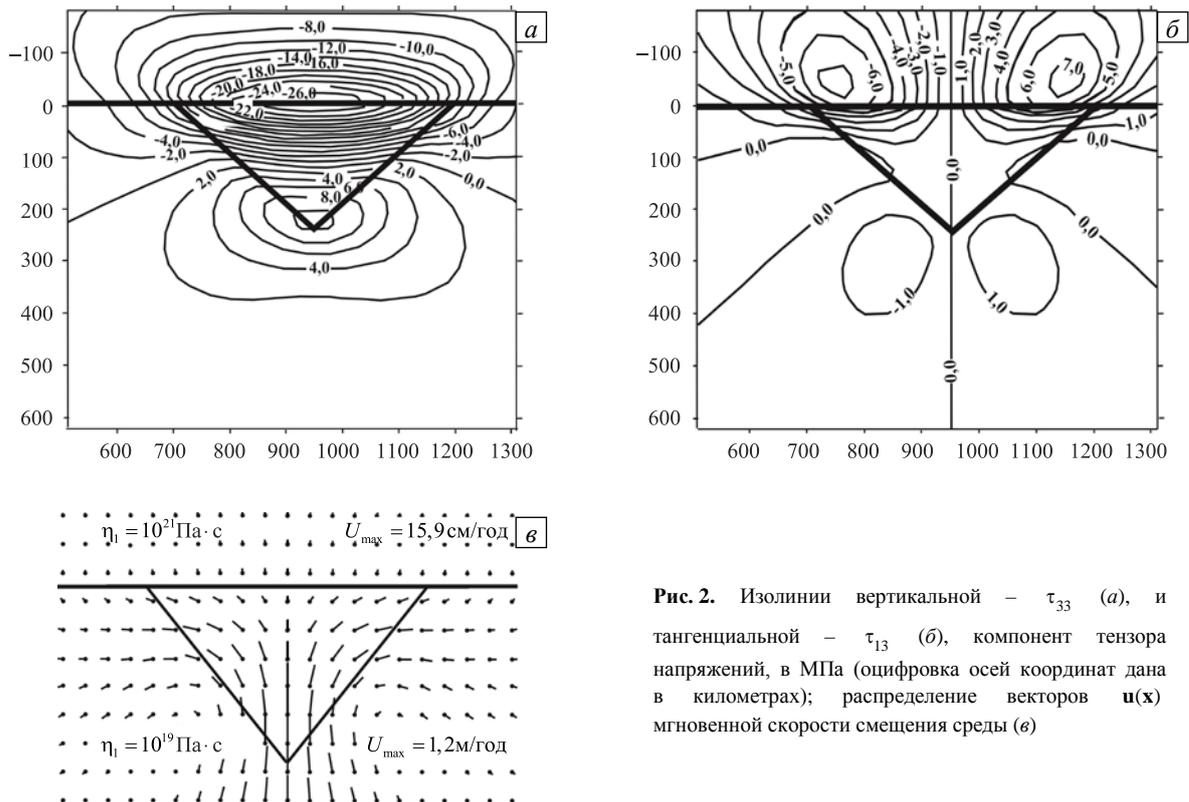
Итак, окончательное решение задачи будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\eta_2 + \eta_1} \mathbf{v}(\mathbf{x}), \\ p(\mathbf{x}) = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} p_0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad \text{при } \mathbf{x} \in E_3^2, \quad (27)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^2(\mathbf{x}), \\ p(\mathbf{x}) = p^1(\mathbf{x}) + p^2(\mathbf{x}), \end{cases} \quad \text{при } \mathbf{x} \in E_3^1, \quad (28)$$

где  $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})/\eta_1$ ,  $p^1(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}^2(\mathbf{x}) = k' \cdot \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + k'' \cdot \mathbf{u}''(\mathbf{x})$ ,  $p^2(\mathbf{x}) = k' \cdot p'(\mathbf{x}) + k'' \cdot p''(\mathbf{x})$ ,  $k' = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$ ,  $k'' = \frac{\eta_1 - \eta_2}{(\eta_1 + \eta_2) \cdot \eta_1}$ , а  $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}''(\mathbf{x})$ ,  $p'(\mathbf{x})$ ,  $p''(\mathbf{x})$  находятся с помощью соотношений

(25), (26). Решение (27), (28) удовлетворяет исходной системе уравнений (19) по условиям построения. При этом вектор мгновенной скорости смещения среды  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  является непрерывным на границе  $S$ , а непрерывность напряжений устанавливается непосредственной проверкой.



**Рис. 2.** Изолинии вертикальной –  $\tau_{33}$  (а), и тангенциальной –  $\tau_{13}$  (б), компонент тензора напряжений, в МПа (оцифровка осей координат дана в километрах); распределение векторов  $u(x)$  мгновенной скорости смещения среды (в)

На рисунке 2 приведены результаты вычисления вертикальной и тангенциальной компонент тензора напряжений и поле мгновенных скоростей смещения среды, рассчитанные для модели тектоносферы Земли, представленной на рисунке 1. Расчёты проводились в плоскости симметрии аномальной призмы ( $x_2 = 0$ ). Вязкость  $\eta_1$  нижнего полупространства  $E_3^1$  была принята равной  $10^{19}$  Па·с, а вязкость  $\eta_2$  верхнего полупространства  $E_2^3$  —  $10^{21}$  Па·с. Аномальная плотность  $\rho$  треугольной призмы составляла  $-20 \text{ кг/м}^3$ .

## 5. Выводы

В данной работе выполнена математическая постановка и получено решение гранично-контактной задачи динамики для сильновязкой несжимаемой неоднородной неограниченной среды. Показано, что запись вектора скорости и давления в виде интегральных выражений, соответственно, (12) и (13) позволяет свести решение контактной задачи для неограниченной неоднородной области к решению системы интегральных уравнений (16). Построенное решение гранично-контактной задачи было применено к модели тектоносферы Земли, изображённой на рисунке 1. Результаты расчётов, представленных на рисунке 2, показывают, что в астеносфере (нижнее полупространство  $E_3^1$ ) возникают две симметричные относительно аномальной мантии (имитируемой включением в форме треугольной призмы) разнонаправленные конвективные ячейки (Рис. 2в). Центры ячеек находятся на уровне вершины призмы, а их общая граница располагается на вертикальной оси призмы. Вследствие взаимодействия течений в этих ячейках лежащая выше литосфера раздвигается, и в дальнейшем наблюдается образование в ней так называемого конвергентного разлома — границы литосферных плит. Это заключение совпадает с изложенными в [2] представлениями о том, что именно наличие аномальной мантии непосредственно под подошвой литосферы служит причиной образования в этом месте её разлома.

## Литература

1. *Cathles L.M.* The viscosity of the Earth's mantle. – Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1975. – 386 p.
2. *Артюшков Е.В.* Геодинамика. – М.: Наука, 1979. – 328 с.
3. *Oxburgh E.R., Turcotte D.L.* Mechanisms of continental drift // Rep. Prog. Phys. – 1978. – Vol. 41, no. 8. – P. 1249-1312. DOI
4. *Schubert G.* Subsolidus convection in the mantles of terrestrial planets // Ann. Rev. Earth Planet. Sci. – 1979. – Vol. 7. – P. 289-342. DOI
5. *Сорохтин О.Г.* Глобальная эволюция Земли. – М.: Наука, 1974. – 184 с.

6. Vanpe J.M. Thermo-mechanical convection in a seduction zone and initiation of back-arcspreading // *Ann. Geophys.* – 1984. – Vol. 2, no. 3. – P. 343-352.
7. Cserepes L., Yuen D.A., Schroeder B.A. Effect of the mid-mantle viscosity and phase-transition structure on 3D mantle convection // *Phys. Earth Planet. In.* – 2000. – Vol. 118. no. 1-2. – P. 135-148. [DOI](#)
8. Nishimura K.A. A numerical study of mantle tectonic flow as relevant to the Cenozoic structural development of the East Asiatic transition zone // *Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute.* – 1986. – Vol. 36, no. 3-4. – P. 113-135.
9. Косыгин В.Ю., Красный М.Л., Маслов Л.А. Напряжения в литосфере Курило-Камчатской переходной зоны // *Тихоокеанская геология.* – 1986. – Т. 5, № 1. – С. 3-6.
10. Косыгин В.Ю. Гравитационное поле и плотностные модели тектоносферы северо-запада Тихого океана. – Владивосток: ДВО АН СССР, 1991. – 201 с.
11. Косыгин В.Ю., Комова О.С., Маслов Л.А. Геомеханическое состояние тектоносферы северо-запада Тихого океана по ее плотностным моделям // *Тихоокеанская геология.* – 1991. – Т. 10, № 3. – С. 3-10.
12. Каракин А.В. Аналитическое решение некоторых плоских задач конвекции в мантии // *Физика Земли.* – 1985. – № 2. – С. 16-25.
13. Каракин А.В., Лобковский Л.И. Механика раздвижения океанской литосферы. – М.: ВИНТИ, 1984. – С. 63-151.
14. Маслов Л.А., Комова О.С. Численное моделирование глубинных геодинамических процессов в активных окраинах // *Физика Земли.* – 1990. – № 3. – С. 53-60.
15. Маслов Л.А. Геодинамика литосферы Тихоокеанского подвижного пояса. – Владивосток: Дальнаука, 1995. – 200 с.
16. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
17. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1953. – 416 с.
18. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / Под ред. В.Д. Купрадзе. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
19. Косыгин В.Ю., Пятаков Ю.В. Решение задачи динамики сильно вязких несжимаемых сред и его приложение к моделированию напряженно-деформированного состояния тектоносферы Земли // *Вычисл. мех. сплош. сред.* – 2011. – Т. 4, № 4. – С. 42-51. [DOI](#)
20. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во ИЛ, 1954. – 310 с.
21. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
22. Пятаков Ю.В., Исаев В.И., Косыгин В.Ю. Методы теории потенциала при решении прямых задач гравиметрии и геодинамики трехмерных неоднородных сред // *Известия ТПУ.* – 2012. – Т. 321, № 1. – С. 76-83.

## References

1. Cathles L.M. *The viscosity of the Earth's mantle.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1975. 386 p.
2. Artyushkov E.V. *Geodinamika* [Geodynamics]. Moscow: Nauka, 1979. 328 p.
3. Oxburgh E.R., Turcotte D.L. Mechanisms of continental drift. *Rep. Prog. Phys.*, 1978. vol. 41, no. 8, pp. 1249-1312. [DOI](#)
4. Schubert G. Subsolidus convection in the mantles of terrestrial planets. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 1979. vol. 7, pp. 289-342. [DOI](#)
5. Sorokhtin O.G. *Global'naya evolyutsiya Zemli* [Global evolution of the Earth]. Moscow: Nauka, 1974. 184 p.
6. Vanpe J.M. Thermo-mechanical convection in a seduction zone and initiation of back-arcspreading. *Ann. Geophys.*, 1984, vol. 2, no. 3, pp. 343-352.
7. Cserepes L., Yuen D.A., Schroeder B.A. Effect of the mid-mantle viscosity and phase-transition structure on 3D mantle convection. *Phys. Earth Planet. In.*, 2000. vol. 118, no. 1-2, pp. 125-148. [DOI](#)
8. Nishimura K.A. A numerical study of mantle tectonic flow as relevant to the Cenozoic structural development of the East Asiatic transition zone. *Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute*, 1986. vol. 36, no. 3-4, pp. 113-135.
9. Kosygin V.Yu., Krasnyi M.L., Maslov L.A. Napryazheniya v litosfere Kurilo-Kamchatskoj perekhodnoj zony [Stresses in the lithosphere of the Kuril-Kamchatka transition zone]. *Tikhookeanskaya geologiya – Russian Journal of Pacific Geology*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 3-6.
10. Kosygin V.Yu. *Gravitatsionnoe pole i plotnostnye modeli tektonosfery severo-zapada Tikhogo okeana* [The gravitational field and density models of tectonosphere of northwest Pacific]. Vladivostok: FEB AS USSR, 1991. 201 p.
11. Kosygin V.Yu., Komova O.S., Maslov L.A. Geomekhanicheskoe sostoyanie tektonosfery severo-zapada Tikhogo okeana po ee plotnostnym modelyam [Geomechanical state of tectonosphere of northwest Pacific based on its density models]. *Tikhookeanskaya geologiya – Russian Journal of Pacific Geology*, 1991, vol. 10, no. 3, pp. 3-10.
12. Karakin A.V. Analiticheskoe reshenie nekotorykh ploskikh zadach konveksii v mantii [Analytical solution of some plane problems of convection in the mantle]. *Fizika Zemli – Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, 1985, no. 2, pp. 16-25.
13. Karakin A.V., Lobkovskii L.I. Mekhanika razdvizheniya okeanskoj litosfery [Mechanics of separation of the ocean lithosphere back]. Moscow: VINITI, 1984. pp. 63-151.
14. Maslov L.A., Komova O.S. Chislennoe modelirovanie glubinykh geodinamicheskikh protsessov v aktivnykh okrainakh [Numerical modeling of deep geodynamic processes in active suburbs]. *Fizika Zemli – Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, 1990, no. 3, pp. 53-60.
15. Maslov L.A. *Geodinamika litosfery Tikhookeanskogo podvizhnogo poyasa* [Geodynamics of the lithosphere of the Pacific mobile belt]. Vladivostok: Dal'nauka, 1995. 200 p.
16. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi nezhimaemoj zhidkosti* [Mathematical problems of the dynamics of viscous incompressible fluid]. Moscow: Nauka, 1970. 288 p.
17. Gyunter N.M. *La theorie du potential et ses applications auxproblems fondamentaux de la physique mathematique* [The theory of potential and its application to the primary problems of mathematical physics]. Paris: Gauthier – Villars, 1934. 303 p.

18. *Trekhmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti* [Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity]. Ed. by V.D. Kupradze. Moscow: Nauka, 1976. 664 p.
19. Kosygin V.Yu., Pyatakov Yu.V. Solution of the problem of dynamics of highly viscous, incompressible media and its application to modeling the stress-strain state of the Earth's tectonosphere]. *Vycislitel'naya mehanika splosnyh sred – Computational continuum mechanics*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 42-51. [DOI](#)
20. Riesz F., Sz.-Nagy B. *Functional analysis*. New York: Frederick Ungar, 1955.
21. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow: BINOM, 2008. 636 p.
22. Pyatakov Yu.V., Isaev V.I., Kosygin V.Yu. Metody teorii potentsiala pri reshenii pryamykh zadach gravimetrii i geodinamiki trekhmernykh neodnorodnykh sred [The methods of potential theory for solving direct problems of gravimetry and geodynamics of three-dimensional inhomogeneous media]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta – Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*, 2012, vol. 321, no. 1, pp. 76-83.

*Поступила в редакцию 28.09.2015; опубликована в электронном виде 30.03.2016*