

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.1.4

УДК 539.374

## АНАЛИЗ ВЕЕРНЫХ ВОЛН В ЛАБОРАТОРНОЙ МОДЕЛИ, ИМИТИРУЮЩЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ТРЕЩИН В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Б.Г. Тарасов<sup>1</sup>, В.М. Садовский<sup>2</sup>, О.В. Садовская<sup>2</sup><sup>1</sup>University of Western Australia, Perth, Australia<sup>2</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Российская Федерация

Анализируется веерный механизм передачи вращательного движения в системе упруго связанных пластин на плоском основании, имитирующий распространение сдвиговых трещин в горной породе с аномально высокой хрупкостью. Такие трещины возникают в земной коре на глубинах сейсмической активности. Они продвигаются за счет формирования множественных наклонных микротрещин отрыва, приводящих к образованию веерной домино-структуры в головной части трещины. Создана лабораторная физическая модель, которая наглядно демонстрирует процесс распространения веерных волн. Получены уравнения динамики вращательного движения пластин как механической системы с конечным числом степеней свободы. На основе метода Мерсона решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений разработан вычислительный алгоритм, учитывающий контактное взаимодействие пластин. В рамках упрощенной математической модели динамического поведения веерной системы в приближении сплошной среды оценены зависимости длины веера от скорости движения. Показано, что в отсутствие трения веер может двигаться по инерции с любой скоростью, не превосходящей критическое значение, которое определяется размером, моментом инерции и начальным по отношению к плоскому основанию углом пластин, а также коэффициентом упругости связей. При наличии трения веер останавливается. С помощью дискретной и непрерывной моделей исследованы основные качественные закономерности поведения веера, движущегося под действием приложенных касательных усилий, величина которых в лабораторной физической модели регулируется изменением угла наклона основания. Установлено, что результаты расчетов хорошо согласуются с наблюдениями и данными измерений по лабораторной модели.

*Ключевые слова:* веерный механизм, уравнения Лагранжа, уравнение Эйлера, бегущие волны, вычислительный алгоритм

## ANALYSIS OF FAN WAVES IN A LABORATORY MODEL SIMULATING THE PROPAGATION OF SHEAR RUPTURES IN ROCKS

B.G. Tarasov<sup>1</sup>, V.M. Sadovskii<sup>2</sup> and O.V. Sadovskaya<sup>2</sup><sup>1</sup>University of Western Australia, Perth, Australia<sup>2</sup>Institute of Computational Modeling SB RAS, Krasnoyarsk, Russian Federation

The fan-shaped mechanism of rotational motion transmission in the system of elastically connected plates on a plane base is analyzed. This mechanism governs the propagation of shear ruptures in super brittle rocks of the Earth's crust at seismogenic depths. A laboratory physical model was created which demonstrates the process of fan wave propagation. Equations of the dynamics of a fan system as a mechanical system with a finite number of degrees of freedom are obtained. A computational algorithm taking into account contact interaction between plates is worked out. Within the framework of a simplified continuous model, the approximate estimates of the length of a fan depending on the velocity of its propagation are obtained. It is shown that in the absence of friction a stationary fan can move with any velocity that does not exceed the critical value, which depends on the size, the moment of inertia of plates, the initial angle and the coefficient of elasticity of connection, and that the length of a fan decreases with increasing velocity. In the absence of distributed shear stress, when the system of plates is in a horizontal position, the fan stops due to the friction forces. The action of distributed shear stress leads to the incomplete disclosure of a fan, and besides the angle of opening decreases with increasing friction. In a system with friction the velocity of a traveling fan is uniquely determined by the opening angle, and in the case of neglecting friction it can take any value within an allowable range. On the basis of a discrete model, the computations demonstrating the incomplete disclosure of fans with different opening angles due to rapid or slow change in the velocity of rotation of the first plate are performed. Comparison of the results of computations of the length and velocity of the fan by means of a discrete model with computations based on analytical formulas and laboratory observations showed a good correspondence between the results.

*Key words:* fan-shaped mechanism, Lagrange equations, Euler equation, traveling waves, computational algorithm

### 1. Введение

До недавнего времени свойства прочных горных пород (с прочностью на одноосное сжатие свыше 250 МПа) при разрушении за пределом прочности, которое вызвано осевым нагружением в условиях высокого уровня боковых сжимающих напряжений, соответствующих глубинам сейсмической активности, практически не были исследованы экспериментально. Причиной этого является аномальная динамика разрушения, что не позволяет достоверно идентифицировать механизм разрушения. Поведение таких пород за пределом прочности трактовалось по аналогии с поведением хорошо изученных менее прочных пород. Согласно общепринятым представлениям, при сжатии в условиях высокого бокового давления микроскопические трещины сдвига продвигаются за счет формирования системы наклонных микротрещин отрыва, которые образуют впереди сдвиговой трещины фундаментальную структуру, включающую эшелон тонких пластин [1]. Рисунок 1 иллюстрирует структуру, типичную как для трещин сдвига лабораторного масштаба [1, 2], так и масштаба массива горных пород [3, 4]. Такая структура получила название «домино-структуры».

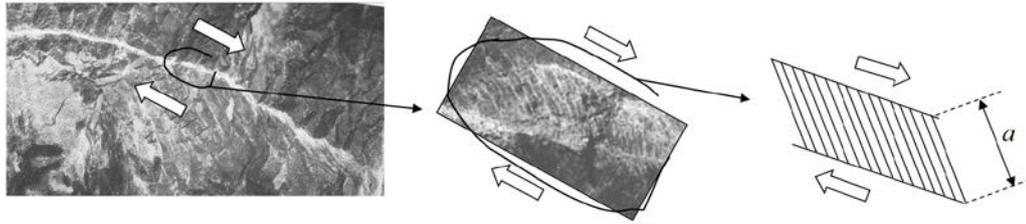


Рис. 1. Структура трещины сдвига (фотографии из работы [3])

На рисунке 2а схематично представлен процесс формирования микротрещин отрыва и домино-блоков перед сдвиговой трещиной, продвигающейся слева направо. Черными стрелками показаны направления наибольшего ( $\sigma_1$ ) и наименьшего ( $\sigma_3$ ) напряжений, белые стрелки соответствуют индуцированным нормальному ( $\sigma_n$ ) и касательному ( $\tau_n$ ) напряжениям.

Физическая модель формирования домино-блоков в голове трещины разработана авторами статьи [1]. Ими и другими исследователями [1–3, 5] экспериментально установлено, что при сдвиге берегов трещины относительно друг друга домино-блоки подвергаются вращению. Это приводит к их разрушению и созданию трения. Рисунок 2б иллюстрирует такое поведение домино-блоков. Наличие трения в голове трещины позволяет проводить устойчивый контроль процесса разрушения в лабораторных условиях. Считается, что сопротивление сдвигу, вызванное трением, характеризует минимальную прочность горной породы, по которой и определяется прочность земной коры [6].

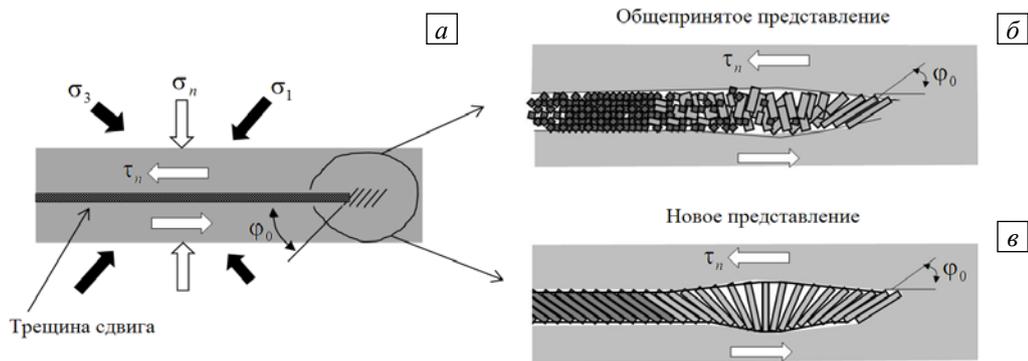


Рис. 2. Схема формирования микротрещин отрыва в трещине сдвига (а) и иллюстрация «домино-структуры» из работ [1] (б) и [9, 10] (в)

Недавние исследования с использованием принципов эксперимента, описанных в [7, 8], позволили выявить «неуловимый» механизм динамического разрушения, который при высоких давлениях

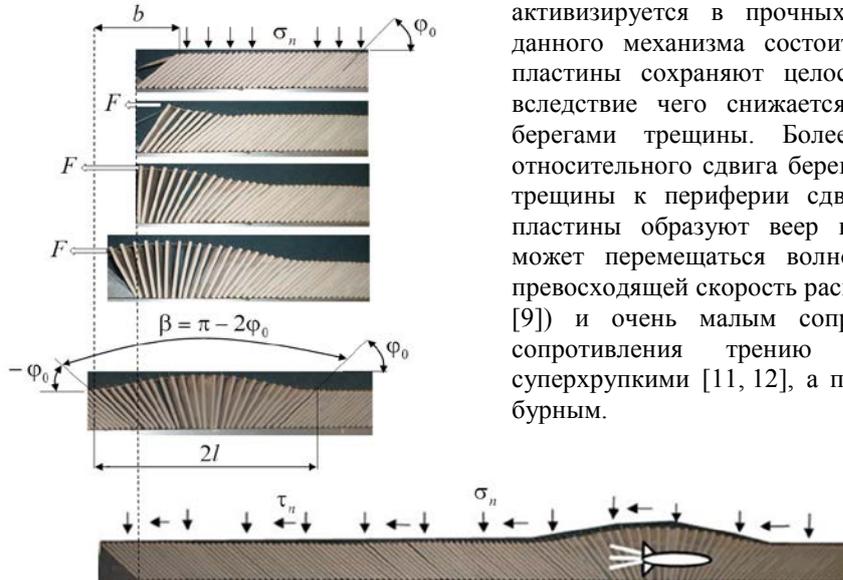


Рис. 3. Физическая модель веерного механизма разрушения прочных горных пород при высоких давлениях

активизируется в прочных горных породах. Особенность данного механизма состоит в том, что прочные домино-пластины сохраняют целостность при вращении (Рис. 2в), вследствие чего снижается трение между сдвигающимися берегами трещины. Более того, из-за неравномерности относительного сдвига берегов (по мере удаления от кончика трещины к периферии сдвиг увеличивается) вращающиеся пластины образуют веер в голове трещины [9, 10]. Веер может перемещаться волнообразно с высокой скоростью, превосходящей скорость распространения упругих волн сдвига [9]) и очень малым сопротивлением (на порядок ниже сопротивления трению [10]), что делает породы суперхрупкими [11, 12], а процесс разрушения — аномально бурным.

Исходя из последующих наблюдений разработаны новый принцип оценки хрупкости горных пород и универсальная шкала хрупкости [11, 13]. На их основе проанализированы особенности формирования веерного механизма в глубинах земной коры [14]. Предложены новая модель прочности земной коры в области сейсмической активности и новый механизм землетрясений [15, 16]. Разработана физическая лабораторная модель веерного механизма (см. Рис. 3), которая дает возможность изучать его уникальные свойства [10, 11]. Математическая модель веера в приближении статики представлена в [17]. Однако прямые исследования веерного механизма затрудняются высокой динамикой развития трещин. Предлагаемая в данной статье динамическая модель дает возможность более детального исследования особенностей нового механизма.

## 2. Уравнения движения

Лабораторная модель, имитирующая веерный механизм, создана проф. Б.Г. Тарасовым в Центре шельфовых инженерных систем Университета Западной Австралии (COFS UWA). Она представляет собой систему пластин на плоском основании, соединенных упругими связями (Рис. 4). С точки зрения классической механики — это система, характеризующаяся  $n$  степенями свободы, поскольку имеется  $n$  независимых углов поворота пластин:  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ .

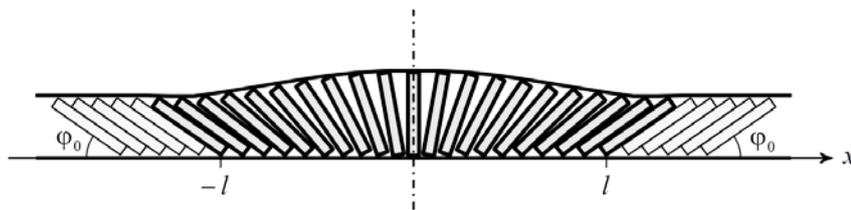


Рис. 4. Веерная система пластин

Для описания движения системы применим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = F_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

в которых  $\dot{\varphi}_i = d\varphi_i/dt$  — угловые скорости,  $L = T - \Pi$  — функция Лагранжа, равная разности кинетической  $\left( T = \frac{J}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}_i^2 \right)$  и потенциальной  $\left( \Pi = \sum_{i=1}^{n-1} U(\varepsilon_{i+1/2}) \right)$  энергий системы. Здесь:  $J$  — момент инерции пластины относительно оси вращения;  $U$  — упругий потенциал связи;  $\varepsilon_{i+1/2} = (s_{i+1/2}^2 - h^2)/(2h^2)$  — деформация связи между соседними пластинами с номерами  $i$  и  $i+1$ ;  $h = h_0/\sin \varphi_0$  — расстояние между осями вращения;  $h_0$  и  $a$  — толщина и высота пластины;  $\varphi_0$  — начальный угол;  $s_{i+1/2}^2 = (h + a(\cos \varphi_{i+1} - \cos \varphi_i))^2 + a^2(\sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi_i)^2$  — квадрат расстояния между верхними концами пластин. Зависимость реакции связи от деформации задается уравнением:

$$R_{i+1/2} = \frac{dU}{ds_{i+1/2}} = U' \frac{ds_{i+1/2}}{ds_{i+1/2}} = \frac{s_{i+1/2}}{h^2} U'(\varepsilon_{i+1/2}). \quad (2)$$

Обобщенные силы  $F_i$ , входящие в правые части уравнений (1), вызванные действием на систему вертикальных усилий  $P_i$ , горизонтальных усилий  $Q_i$  и вращательных моментов  $M_i$  сил контактного взаимодействия между пластинами, вычислим в соответствии с выражением для виртуальной работы:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n F_i \delta \varphi_i = - \sum_{i=1}^n (Q_i \delta X_i + P_i \delta Y_i + M_i \delta \varphi_i + \eta \dot{\varphi}_i \delta \varphi_i),$$

где  $X_i = (i-1)h_0 + a \cos \varphi_i$ ,  $Y_i = a \sin \varphi_i$  — координаты верхних концов пластин,  $\eta$  — коэффициент вязкого сопротивления вращению. Тогда для обобщенных сил получим формулу:

$$F_i = Q_i a \sin \varphi_i - P_i a \cos \varphi_i + M_i - \eta \dot{\varphi}_i.$$

Если внешнее воздействие на веерную систему, расположенную горизонтально, обусловлено только собственным весом пластин, то  $2P_i = mg$ ,  $Q_i = 0$ , в случае же основания, наклоненного под углом  $\alpha$  к горизонтальной плоскости,  $2P_i = mg \cos \alpha$ ,  $2Q_i = mg \sin \alpha$ .

Ниже приводится развернутая форма уравнений (1):

$$J \ddot{\varphi}_i = F_i - R_{i+1/2} \frac{\partial s_{i+1/2}}{\partial \varphi_i} - R_{i-1/2} \frac{\partial s_{i-1/2}}{\partial \varphi_i},$$

$$s_{i+1/2} \frac{\partial s_{i+1/2}}{\partial \varphi_i} = (h + a(\cos \varphi_{i+1} - \cos \varphi_i)) \sin \varphi_i - a(\sin \varphi_{i+1} - \sin \varphi_i) \cos \varphi_i, \quad (3)$$

$$s_{i-1/2} \frac{\partial s_{i-1/2}}{\partial \varphi_i} = -(h + a(\cos \varphi_i - \cos \varphi_{i-1} - 1)) \sin \varphi_i + a(\sin \varphi_i - \sin \varphi_{i-1}) \cos \varphi_i.$$

Система (3) состоит из  $(n-1)$  дифференциальных уравнений второго порядка для степеней свободы  $i = 2, 3, \dots, n$ . Для  $i=1$  задается условие  $\varphi_1 = \varphi_0 + \omega_0 t$ , означающее принудительный разворот первой пластины с постоянной угловой скоростью  $\omega_0 = (\pi - 2\varphi_0)/T$  и обеспечивающее раскрытие веера за время  $T$ . Предполагается, что конечная пластина в системе связана только с предыдущей пластиной, поэтому справа на нее не действует сила натяжения ( $R_{n+1/2} = 0$ ). Моменты  $M_i$  являются заданными функциями углов поворота и угловых скоростей пластин. Они обеспечивают выполнение односторонних ограничений на углы поворота  $\varphi_0 \leq \varphi_i \leq \pi/2 - \varphi_0$ , которые реализуются в процессе численного счета с помощью специального алгоритма корректировки решения. Для системы уравнений (3) ставится задача Коши:  $\varphi_i = \varphi_0$  и  $\dot{\varphi}_i = 0$  при  $t = 0$ .

### 3. Алгоритм корректировки решения

Для численной реализации физической модели контактного взаимодействия пластин в веере разработан специальный алгоритм, основанный на вариационной формулировке условий их контакта. Момент сил реакции  $M_i$ , приложенных к пластине с номером  $i$ , равняется нулю, если она находится в свободном состоянии; момент положителен, если пластина  $i$  опирается на  $(i+1)$ -ю пластину, и отрицателен, если она опирается на  $(i-1)$ -ю пластину; в случае одновременного контакта соседних пластин знак  $M_i$  может быть произвольным. В общем случае выполняется вариационное неравенство

$$\delta A' = \sum_{i=1}^n M_i \delta \varphi_i \geq 0, \quad (4)$$

представляющее собой математическую формулировку принципа минимума работы сил реакции на возможных перемещениях системы. Возможные перемещения подчиняются кинематическим ограничениям:

$$\pi - \varphi_0 \geq \varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \dots \geq \varphi_n \geq \varphi_0. \quad (5)$$

Если в системе трех соседних пластин контакт отсутствует, то есть  $\varphi_{i-1} > \varphi_i > \varphi_{i+1}$ , то из неравенства (4), с учетом произвольности вариации  $\delta \varphi_i$ , следует, что  $M_i = 0$ . Если контакт происходит с  $(i+1)$ -й пластиной:  $\varphi_{i-1} > \varphi_i = \varphi_{i+1}$ , то  $\delta \varphi_i \geq 0$  и  $M_i \geq 0$ , а если с  $(i-1)$ -й пластиной:  $\varphi_{i-1} = \varphi_i > \varphi_{i+1}$ , то  $\delta \varphi_i \leq 0$  и  $M_i \leq 0$ . При одновременном контакте трех пластин, когда  $\varphi_{i-1} = \varphi_i = \varphi_{i+1}$ , допустимая вариация  $\delta \varphi_i$  равняется нулю, поэтому знак  $M_i$  не определен. Такие рассуждения показывают, что вариационное неравенство (4) адекватно описывает контакт пластин без учета их отскока друг от друга за счет сил упругости.

Момент  $M_i$  аддитивно входит в правую часть уравнения вращательного движения (3) для  $i$ -й пластины, поэтому после аппроксимации уравнений на каждом шаге по времени возникает линейная связь вида  $M_i = \mu(\varphi_i - \bar{\varphi}_i)$  между моментом сил реакции, текущим значением угла поворота  $\varphi_i$  и значением угла  $\bar{\varphi}_i$ , следующим из уравнения (3) без учета контактного взаимодействия, то есть при  $M_i = 0$ . В уравнении связи  $\mu$  — положительная постоянная, пропорциональная моменту инерции пластины. После исключения  $M_i$  вариационное неравенство (4) преобразуется к виду:

$$\sum_{i=1}^n (\varphi_i - \bar{\varphi}_i) \delta \varphi_i \geq 0. \quad (6)$$

Ограничения (5) задают в пространстве обобщенных координат выпуклое и замкнутое множество. Используя условия выпуклости и замкнутости, можно показать, что решение неравенства (6) при ограничениях (5) существует, единственно и является проекцией вектора с координатами  $\bar{\varphi}_i$  на данное множество. Строгое доказательство этого утверждения в более общей формулировке можно найти, например, в монографии [18], где к вариационным неравенствам приводятся определяющие соотношения деформируемых сред, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

При нахождении проекции в расчетах используется одна из версий итерационного алгоритма Удзавы [19], предназначенного для вычисления седловых точек. После применения теоремы Куна–Таккера задача сводится к поиску седловой точки лагранжиана:

$$\min_{\varphi_j} \max_{\lambda_j \geq 0} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\varphi_i - \bar{\varphi}_i)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_{i+1/2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \right),$$

где  $\lambda_{i+1/2}$  — множители Лагранжа, отвечающие ограничениям  $\varphi_{i+1} - \varphi_i \leq 0$ , и для компактности обозначений принято  $\varphi_{n+1} = \varphi_0$ . На начальной стадии алгоритма полагается  $\varphi_i^{(0)} = \bar{\varphi}_i$ ,  $\lambda_{i+1/2}^{(0)} = 0$ . Затем производится пересчет по рекуррентным формулам:

$$\lambda_{i+1/2}^{(k+1)} = \left( \lambda_{i+1/2}^{(k)} + \gamma (\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}) \right)_+, \quad \varphi_i^{(k+1)} = \bar{\varphi}_i + \lambda_{i+1/2}^{(k+1)} - \lambda_{i-1/2}^{(k+1)}. \quad (7)$$

Здесь:  $\gamma > 0$  — итерационный параметр; индекс «+» обозначает положительную часть числа:  $z_+ = \max(z, 0)$ ; в соответствии с граничными условиями значения  $\varphi_1^{(k+1)}$  остаются равными  $\bar{\varphi}_1$ , а  $\varphi_{n+1}^{(k+1)}$  принимают значение  $\varphi_0$ . Формулы (7) служат для вычисления множителей Лагранжа в диапазоне изменения индекса  $i = 1, 2, \dots, n$ . Первая из формул обеспечивает градиентное приближение решения к точке максимума лагранжиана по переменным  $\lambda_{i+1/2}$ , вторая представляет собой условие минимума по переменным  $\varphi_i$ . Эти переменные пересчитываются при  $i = 2, 3, \dots, n$ . Окончание счета по рекуррентным формулам происходит, когда для заданного достаточно малого  $\varepsilon$  выполняется условие  $|\varphi_i^{(k+1)} - \varphi_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ .

Можно показать, что алгоритм сходится при  $k \rightarrow \infty$ , если  $\gamma < 1/2$ . Для этого, исключая  $\varphi_i^{(k)}$ , приведем систему уравнений (7) к виду:

$$\begin{aligned} \lambda_{3/2}^{(k+1)} &= (\lambda_{3/2}^{(k)} + \gamma (\lambda_{5/2}^{(k)} - \lambda_{3/2}^{(k)} + \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1))_+, \\ \lambda_{i+1/2}^{(k+1)} &= (\lambda_{i+1/2}^{(k)} + \gamma (\lambda_{i+3/2}^{(k)} - 2\lambda_{i+1/2}^{(k)} + \lambda_{i-1/2}^{(k)} + \bar{\varphi}_{i+1} - \bar{\varphi}_i))_+ \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \\ \lambda_{n+1/2}^{(k+1)} &= (\lambda_{n+1/2}^{(k)} + \gamma (-\lambda_{n+1/2}^{(k)} + \lambda_{n-1/2}^{(k)} + \varphi_0 - \bar{\varphi}_n))_+. \end{aligned}$$

Согласно теореме о предельном переходе искомые значения  $\lambda_{i+1/2}$  удовлетворяют этой же системе с опущенными верхними индексами. Так как отображение  $z \rightarrow z_+$ , представляющее собой проектор на конус неотрицательных чисел, является нестягивающим отображением, то для разностей  $\Delta \lambda_{i+1/2}^{(k+1)} = \lambda_{i+1/2}^{(k+1)} - \lambda_{i+1/2}^{(k)}$  выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} |\Delta \lambda_{3/2}^{(k+1)}| &\leq |(1 - \gamma) \Delta \lambda_{3/2}^{(k)} + \gamma \Delta \lambda_{5/2}^{(k)}|, \\ |\Delta \lambda_{i+1/2}^{(k+1)}| &\leq |(1 - 2\gamma) \Delta \lambda_{i+1/2}^{(k)} + \gamma (\Delta \lambda_{i+3/2}^{(k)} + \Delta \lambda_{i-1/2}^{(k)})|, \\ |\Delta \lambda_{n+1/2}^{(k+1)}| &\leq |(1 - \gamma) \Delta \lambda_{n+1/2}^{(k)} + \gamma \Delta \lambda_{n-1/2}^{(k)}|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\|\Delta \lambda^{(k+1)}\| \leq \|(E + \gamma A) \Delta \lambda^{(k)}\|$ , где двойные скобки означают норму вектора в  $n$ -мерном евклидовом пространстве,  $E$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ ,  $A$  — трехдиагональная симметричная матрица такой же размерности с коэффициентами, равными  $-2$  на главной диагонали и  $1$  на побочных диагоналях. Исключение составляют первая и последняя строки матрицы, в которых на диагонали стоит число  $-1$ . Такая матрица возникает, например, при анализе собственных колебаний линейных упругих цепочек [20]. Известны собственные значения  $A$ :  $\mu_j = -4 \sin^2 \pi j / (2n)$

( $j=0, 1, \dots, n-1$ ), первое из которых нулевое. Соответствующий ему собственный вектор состоит из единиц. Если  $\gamma < 1/2$ , то для всех остальных собственных значений выполняется строгое неравенство  $|1 + \gamma \mu_j| < 1$ . Разлагая векторы  $\Delta\lambda^{(k+1)}$  и  $\Delta\lambda^{(k)}$  по ортонормированному базису из собственных векторов, на основании равенства Парсеваля получим:

$$\|\Delta\lambda^{(k+1)}\|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta c_j^{(k+1)})^2 \leq \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \gamma \mu_j)^2 (\Delta c_j^{(k)})^2 \leq \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta c_j^{(k)})^2 = \|\Delta\lambda^{(k)}\|^2,$$

где  $\Delta c_j^{(k+1)}$  и  $\Delta c_j^{(k)}$  — коэффициенты разложения.

Установленная цепочка уравнений и неравенств гарантирует ограниченность последовательности приближений для  $\Delta\lambda$ . В этой цепочке последнее неравенство будет строгим, если хотя бы один из коэффициентов  $\Delta c_j^{(k)}$  для  $j=1, 2, \dots, n-1$  не равен нулю. В этом случае последовательность является релаксационной. Оптимальное значение итерационного параметра, обеспечивающее наискорейшую релаксацию всех таких коэффициентов, задается известной формулой  $\gamma_0 = -2/(\mu_1 + \mu_{n-1})$

(см., например, [21]). В пределе получается вектор с одним коэффициентом  $\Delta c_0 = \sum_{i=1}^n \Delta\lambda_{i+1/2} / \sqrt{n}$ , который может быть отличным от нуля. Это связано с отсутствием единственности решения задачи нахождения седловой точки функции Лагранжа.

#### 4. Результаты расчетов

Устойчивый веер формируется только при определенных ограничениях на механические параметры системы. Например, если упругие связи чрезмерно податливы, то при повороте первой пластины вторая пластина может не последовать за ней, а остаться в исходном положении. Такая схема приведена на рисунке 5а. На рисунке 5б изображена схема раскрытого веера из единственной пластины, соответствующая большей жесткости связей. Естественное требование состоит в том, что в этой схеме равновесие вертикальной пластины должно быть устойчивым по отношению к малым возмущениям угла  $\Delta\varphi$ .

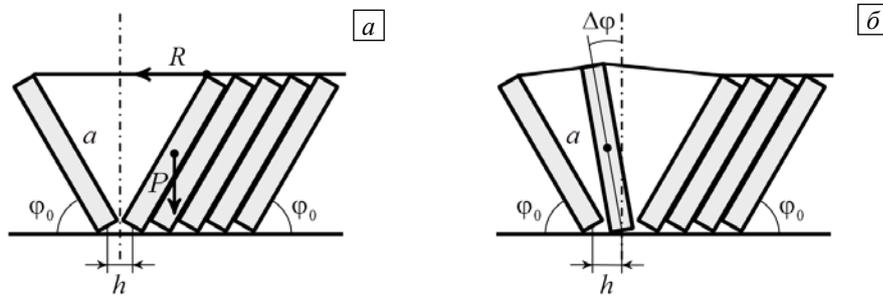


Рис. 5. Веерные системы в случае чрезмерно податливых (а) и более жестких (б) связей

Представленный на рисунке 5а механизм реализуется в случае, если между моментами действующих сил соблюдается условие:  $2R \sin \varphi_0 < P \cos \varphi_0$ . Поэтому минимальное значение силы реакции связи  $R$ , при котором происходит раскрытие веера, составляет:  $R_0 = P/(2 \operatorname{tg} \varphi_0)$ . Отношение  $z_0 = R/R_0$  характеризует коэффициент запаса веерной системы по критерию раскрытия, при этом числитель вычисляется по уравнению (2) через расстояние  $s = 2a \cos \varphi_0 + h$  между верхними концами пластин. Коэффициент запаса веерной системы должен быть больше единицы.

Длины связей, удерживающих в равновесии вертикальную пластину на рисунке 5б, определяются по формуле:  $s = \sqrt{2a(a - a \sin \varphi_0 + h \cos \varphi_0) + h^2}$ . С учетом малости  $h$  относительное удлинение, вызванное малым отклонением пластины от положения равновесия на угол  $\Delta\varphi$ , равняется  $a \Delta\varphi$ . Для вычисления приращения деформации связей ( $\Delta\varepsilon$ ) служат уравнения:

$$\varepsilon = \frac{s^2 - h^2}{2h^2}, \quad \varepsilon + \Delta\varepsilon = \frac{(s + a \Delta\varphi)^2 - h^2}{2h^2}, \quad \Delta\varepsilon \approx \frac{as \Delta\varphi}{h^2}.$$

При отклонении пластины в одной из связей происходит дополнительное малое растяжение, а в другой — сжатие, поэтому приращение потенциальной энергии системы оказывается следующим:

$$\Delta\Pi = \Pi(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - \Pi(\varepsilon) = U(\varepsilon + \Delta\varepsilon) + U(\varepsilon - \Delta\varepsilon) - 2U(\varepsilon) \approx U''(\varepsilon)\Delta\varepsilon^2.$$

Приращение работы активных сил (веса вертикальной пластины) имеет вид:

$$\Delta A = \frac{Pa}{2}(1 - \cos\varphi_0) \approx \frac{Pa}{4}\Delta\varphi^2.$$

При этом, согласно теореме Эйлера о минимуме потенциальной энергии системы в положении устойчивого равновесия, должно выполняться неравенство  $\Delta\Pi - \Delta A \geq 0$ , которое приводит к условию  $z_s \geq 1$  для коэффициента запаса веерной системы по критерию устойчивости:

$$z_s = 4U''(\varepsilon) \frac{as^2}{Ph^4}.$$

Если задана зависимость силы реакции (натяжения) связи от деформации, то входящая сюда вторая производная упругого потенциала вычисляется по формуле, получаемой дифференцированием из уравнения (2):

$$U''(\varepsilon) \frac{s^2}{h^4} = \frac{s}{h^2} R'(\varepsilon) - \frac{1}{s} R.$$

Численное решение системы уравнений (3) осуществлялось на основе метода Мерсона, который обладает хорошим запасом устойчивости при решении нелинейных задач и для которого имеется простая процедура автоматического выбора шага интегрирования с контролем точности вычислений [22]. Программная реализация метода Мерсона была выполнена в пакете прикладных программ Matlab. В расчетах время раскрытия веера  $T$  варьировалось в пределах от 2 до 15 с. Были приняты значения параметров задачи, соответствующие лабораторной модели Б.Г. Тарасова:  $m = 0,11$  кг;  $a = 0,1$ ;  $h = 0,005$  м;  $\varphi_0 = 40^\circ$ . Коэффициент вязкого сопротивления вычислялся через время релаксации вращательного движения  $\tau$  как  $\eta = J/\tau$ . Время релаксации варьировалось в интервале от 0,1 до 5 с. Упругая реакция связей задавалась в виде кусочно-линейной зависимости и строилась по данным лабораторных измерений, представленным в таблице. Расчеты коэффициентов запаса устойчивости по параметрам физической модели показали, что она устойчива по обоим критериям:  $z_0 = 167$  и  $z_s = 40$ .

Таблица. Упругие характеристики связей

$\varepsilon, \%$	0,00	1,57	36,20	101,47	158,40	203,13	240,41	262,50
$R, \text{Н}$	0,00	1,18	2,16	3,24	4,32	5,40	6,48	7,56

На рисунке *ба* приведен график зависимости  $R = R(\varepsilon)$ , на рисунке *бб* — распределение деформаций связей в полностью сформированном веере, полученное в расчетах. Точками на рисунке *ба* отмечены лабораторные измерения, а на рисунке *бб* — местоположения пластин в веере. График на рисунке *бб* показывает, что сформированный веер представляет собой симметричную самоуравновешенную (равновесную) структуру.

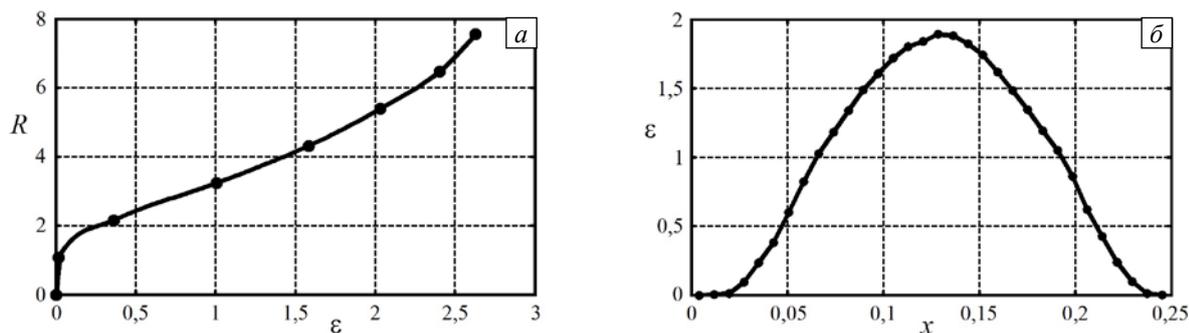


Рис. 6. Зависимость силы натяжения от деформации (*а*), распределение деформаций связей в веере (*б*)

Для оценки влияния трения проводились сравнительные расчеты медленного раскрытия веера за время  $T = 6$  с при малом ( $\tau = 0,5$  с) и при относительно большом ( $\tau = 2$  с) времени релаксации. Расчеты показали, что силы вязкого трения способствуют быстрой остановке движения. В первом случае веер окончательно тормозится на малом расстоянии от первой пластины (Рис. 7а), во втором — это расстояние соизмеримо с длиной веера (Рис. 7б).

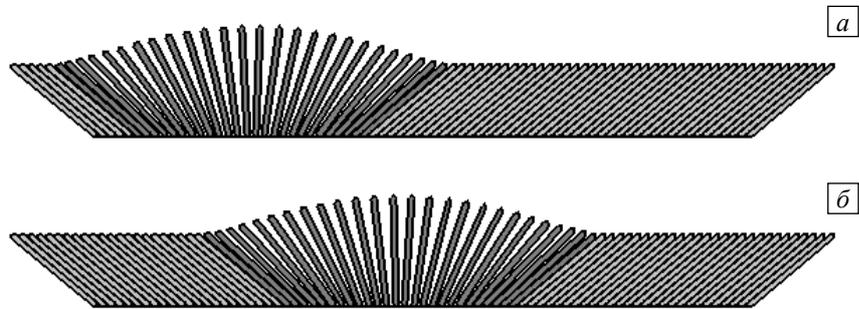


Рис. 7. Вид веерной системы после остановки при разных временах релаксации  $\tau$ , с: 0,5 (а); 2 (б)

До момента остановки веера глубина его продвижения существенно зависит от скорости раскрытия, характеризуемой временем  $T$ , возрастая по мере увеличения скорости. Так в случае времени раскрытия веера  $T = 2$  с расстояние торможения превосходит половину длины веера при малом времени релаксации, и при дальнейшем уменьшении времени раскрытия глубина продвижения возрастает. Это демонстрирует существенное влияние скорости нагружения.

Веер переходит из равновесного состояния в неравновесное, если к включающей его домино-системе приложить дополнительное сдвиговое напряжение. В физической модели такое напряжение может быть обеспечено наклоном основания относительно горизонтальной плоскости на угол  $\alpha$ . Неравновесность вызывает перемещение веера вдоль домино-системы в виде бегущей волны. В этом случае веерный механизм на качественном уровне воспроизводит последовательное перемещение верхнего берега сдвиговой трещины относительно нижнего по мере продвижения бегущей веерной волны. Уникальная особенность веерного механизма состоит в том, что он осуществим при очень низких сдвиговых напряжениях: напряжения могут быть на порядок ниже величины трения между берегами трещины при отсутствии веера.

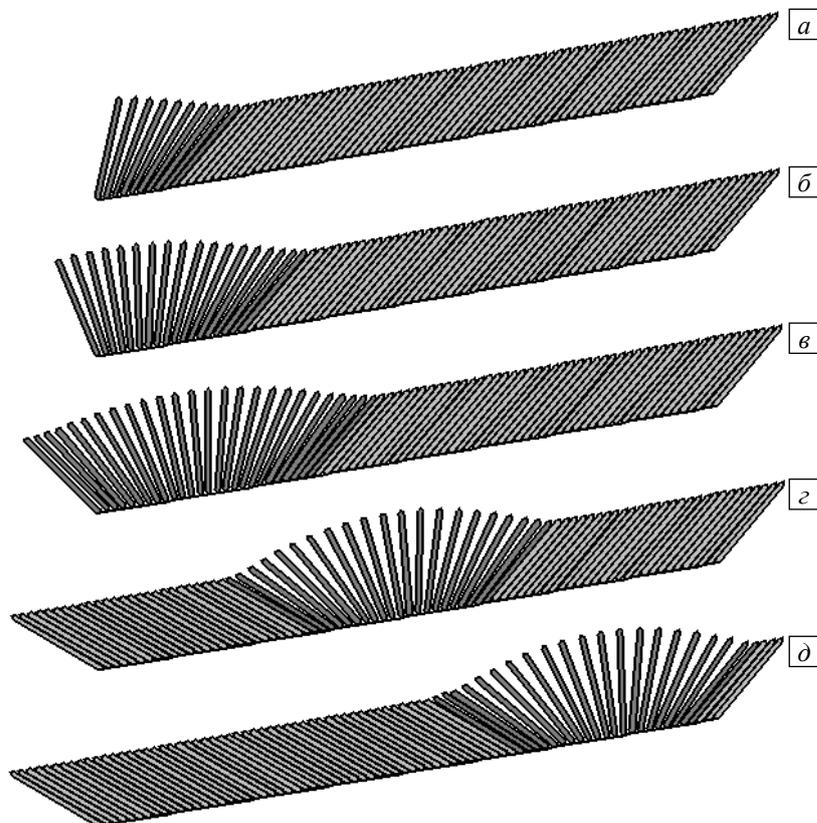


Рис. 8. Стадии формирования и движения веера в разные моменты времени  $t$ , с: 0,67 (а); 1,71 (б); 2,38 (в); 3,12 (г); 3,63 (д)

В данной работе также проведены расчеты для разных углов наклона:  $\alpha = 5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$  и более. Считалось, что к начальному моменту времени веер уже сформировался (начальное распределение углов задавалось в соответствии с решением системы при  $\alpha = 0$ ). Расчеты показали, что страгивание и последующее движение веера происходит при малых углах наклона. Увеличение угла приводит к возрастанию скорости перемещения веера.

На рисунке 8 изображены последовательные стадии раскрытия веера за счет принудительного поворота первой пластины, включая страгивание и движение. В расчетах принято: время раскрытия  $T = 3$  с; угол наклона  $\alpha = 10^\circ$ . Третья картина относится к моменту начала движения веера как волны. Заметим, что страгивание веера происходит до наступления момента его полного раскрытия, соответствующего повороту первой пластины на угол  $\pi - \varphi_0$ .

В серии вычислительных экспериментов моделировался процесс движения не полностью сформированного веера. Если веер в начальный момент находится в неравновесном состоянии, то возможны два пути развития событий. На первом из них, когда угол наклона меньше критического, веер смыкается в начальное состояние. Критический угол зависит от степени неравновесности веера. При углах наклона больше критического веер страгивается и ускоряется, двигаясь вдоль системы.

## 5. Приближение длинного веера

Если длина веера значительно превышает характерный размер пластин  $a$  и веер состоит из большого числа пластин, то основные характеристики его движения можно получить, исходя из упрощенной непрерывной модели. В этой модели деформация упругой связи вычисляется через текущие координаты верхних концов пластин:  $X = x + u$  и  $Y = \sqrt{a^2 - u^2}$ , где  $u = a \cos \varphi$  — продольное смещение, по следующей приближенной формуле (штрих означает производную по переменной  $x$ ):

$$\varepsilon = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2 ds_0^2} = \frac{dX^2 + dY^2 - dx^2}{2 dx^2} = \frac{1}{2} \left( (a\varphi' - \sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi - 1 \right) \approx -a\varphi' \sin \varphi = u'.$$

В положении устойчивого равновесия веера при отсутствии касательных усилий выполняется принцип минимума потенциальной энергии:

$$I = \int_{x_b}^{x_e} W(u, u') dx, \quad W = \frac{k}{2} \varepsilon^2 - pY \approx \frac{k}{2} (u')^2 - p\sqrt{a^2 - u^2},$$

где  $p = P/h_0$  — нормальное усилие, отнесенное к единице длины веера,  $x_b$  и  $x_e$  — координаты его начала и конца,  $k$  — модуль упругости связей. Соответствующее этому принципу вариационное уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial W}{\partial u'} - \frac{\partial W}{\partial u} = 0: \quad k u'' + p \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = 0 \quad (8)$$

описывает форму покоящегося веера. В результате подстановки  $u' = z(u)$  это уравнение интегрируется:

$$k z^2 = 2p\sqrt{a^2 - u^2} + C_1.$$

Постоянная интегрирования  $C_1$  определяется из условия равенства нулю силы натяжения связи в головной части веера:  $z(a \cos \varphi_0) = 0$ . Найденное решение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно смещения:

$$u' = \lambda \left( \sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}} - \sin \varphi_0 \right), \quad \lambda^2 = \frac{2pa}{k}.$$

После разделения переменных из него вытекает формула для вычисления полудлины веера  $l = (x_b - x_e)/2$ :

$$l = \frac{a}{\lambda} \int_0^{\cos \varphi_0} \frac{dw}{\sqrt{\sqrt{1-w^2} - \sin \varphi_0}} = \frac{a}{\lambda} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi - \sin \varphi_0}}. \quad (9)$$

Заметим, что форма покоящегося веера симметрична относительно точки наивысшего подъема и что веер полностью раскрывается в точке  $x_e$ , где  $\varphi = \pi - \varphi_0$  и отсутствует натяжение связи.

Для бегущего веера уравнение движения может быть получено на основе принципа возможных перемещений в сочетании с принципом Даламбера:

$$-j \left( \ddot{\varphi} + \frac{\dot{\varphi}}{\tau} \right) \delta\varphi + \left( k u'' + p \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} - q \right) \delta u = 0,$$

где  $j$  — погонный момент инерции,  $q = Q/h_0$  — касательное усилие на единицу длины веерной системы. Так как

$$\delta\varphi = -\frac{\delta u}{\sqrt{a^2 - u^2}}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{\dot{u}}{\sqrt{a^2 - u^2}}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{u}}{\sqrt{a^2 - u^2}} - \frac{u \dot{u}^2}{(\sqrt{a^2 - u^2})^3},$$

то это уравнение принимает вид:

$$j \frac{\ddot{u}}{a^2 - u^2} + j \left( \frac{u \dot{u}}{a^2 - u^2} + \frac{1}{\tau} \right) \frac{\dot{u}}{a^2 - u^2} - k u'' - p \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} + q = 0. \tag{10}$$

Для уравнения (10) выполняется уравнение баланса энергии с учетом диссипативных процессов:

$$\frac{j}{2} \frac{d}{dt} \frac{\dot{u}^2}{a^2 - u^2} - k u'' \dot{u} + p \frac{d}{dt} \sqrt{a^2 - u^2} + q \dot{u} = -\frac{j}{\tau} \frac{\dot{u}^2}{a^2 - u^2}.$$

Подстановка в него выражения  $u = u(x - Vt)$  для веера, бегущего с постоянной скоростью  $V > 0$ , приводит к уравнению, которое в результате интегрирования преобразуется к следующей форме:

$$\left( k - \frac{jV^2}{a^2 - u^2} \right) \frac{(u')^2}{2} - p \sqrt{a^2 - u^2} - qu = C_2 - \frac{jV}{\tau} \int_x^{x_b} \frac{(u')^2 dx}{a^2 - u^2} \quad (x_e \leq x \leq x_b). \tag{11}$$

Здесь постоянная интегрирования  $C_2 = -pa \sin \varphi_0 - qa \cos \varphi_0$  определяется в силу граничных условий  $u = a \cos \varphi_0$ ,  $u' = 0$  в головной части веера.

При отсутствии трения и касательных усилий ( $\tau \rightarrow \infty$ ,  $q = 0$ ) из (11) следует уравнение свободного веера, бегущего по горизонтальной плоскости. Такой веер симметричен относительно точки максимального подъема, может двигаться с любой скоростью, не превышающей критического значения  $V_* = a \sin \varphi_0 \sqrt{k/j}$ , и его полудлина вычисляется по формуле:

$$l = \frac{a}{\lambda} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - v^2}}{\sin \varphi - \sin \varphi_0} d\varphi, \quad \lambda^2 = \frac{2pa}{k}, \quad v^2 = \frac{jV^2}{ka^2}.$$

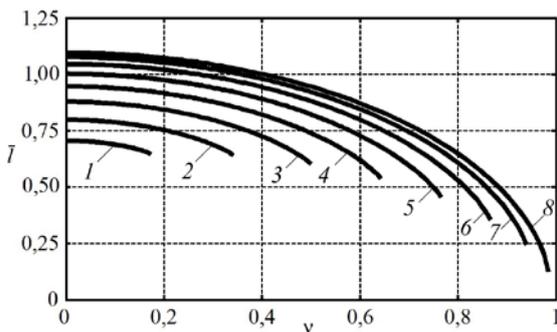


Рис. 9. Зависимость полудлины веера от скорости для разных начальных углов

Простой анализ показывает, что бегущий веер в этом случае всегда короче покоящегося, полудлина которого находится по формуле (9), и что веер сокращается с увеличением скорости. В системе с трением ( $\tau < \infty$ ) скорость горизонтального веера  $V$  равняется нулю. Это следует из уравнения (11), взятого при  $x = x_e$ , с учетом граничных условий в концевой части веера. На рисунке 9 представлен график зависимости безразмерной полудлины  $\bar{l} = \lambda l/a$  от безразмерной скорости веера  $v$  для значений начального угла  $\varphi_0 = 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$  (кривые 1, 2, ..., 8 соответственно). Справа кривые обрываются на критической скорости  $v_*$ , которая зависит от начального угла.

Если касательное усилие отлично от нуля, а трением в системе можно пренебречь, то из (11) вытекает уравнение

$$\left(k - \frac{jV^2}{a^2 - u^2}\right) \frac{(u')^2}{2} = p \left(\sqrt{a^2 - u^2} - a \sin \varphi_0\right) + q(u - a \cos \varphi_0),$$

показывающее, что бегущий веер в своей стационарной части не раскрывается полностью. Судя по этому уравнению, натяжение связи исчезает на пластине в конце веера с углом поворота  $\varphi_*$ , для которого правая часть данного уравнения оказывается равной нулю:

$$p \sin \varphi_* + q \cos \varphi_* = p \sin \varphi_0 + q \cos \varphi_0.$$

Пусть  $\psi$  — угол наклона вектора внешних усилий к оси  $x$ . Тогда  $p = \sqrt{p^2 + q^2} \sin \psi$ ,

$$q = \sqrt{p^2 + q^2} \cos \psi, \quad \cos(\psi - \varphi_*) = \cos(\psi - \varphi_0) \Rightarrow \varphi_* = 2\psi - \varphi_0.$$

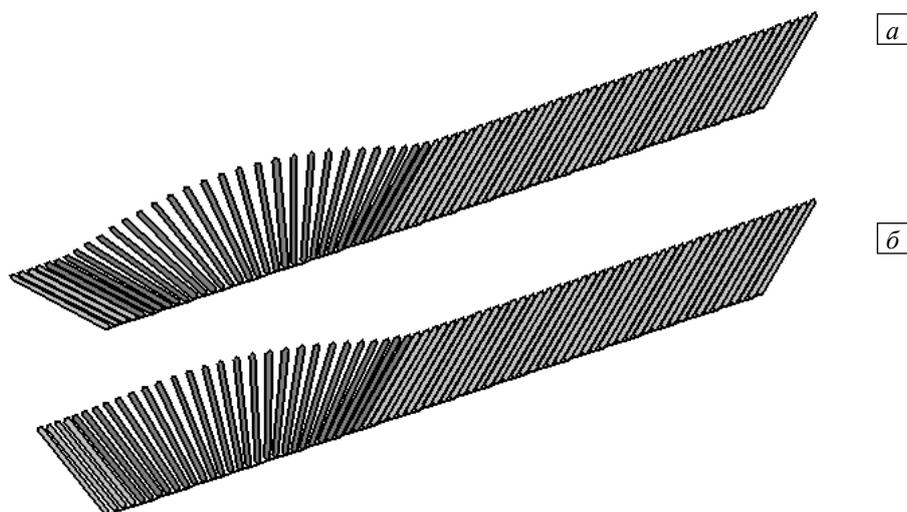
Угол  $\psi$  лежит в пределах от  $\varphi_0$  до  $\pi/2$ , поскольку нарушение условия  $\psi \geq \varphi_0$  привело бы к одновременному опрокидыванию всех пластин, а условие  $\psi < \pi/2$  отвечает принятому направлению действия касательного усилия. Следовательно, уравнение движения в данном случае описывает бегущий веер с неполным углом раскрытия  $\varphi_* < \pi - \varphi_0$ . Величина скорости такого веера может быть произвольной, не превышающей критическую скорость  $V_*$ .

Оказывается, за счет диссипативных сил угол раскрытия бегущего веера уменьшается. При учете трения в концевой точке веера ( $\varphi = \varphi^*$ ) в силу (10) выполняется строгое неравенство:  $p(\sin \varphi^* - \sin \varphi_0) + q(\cos \varphi^* - \cos \varphi_0) > 0$ , которое в точности означает, что  $\varphi^* < \varphi_*$ . При этом скорость бегущего веера однозначно вычисляется через угол раскрытия по уравнению:

$$\frac{jV}{a\tau} \int_{x_c}^{x_p} (\varphi')^2 dx = p(\sin \varphi^* - \sin \varphi_0) + q(\cos \varphi^* - \cos \varphi_0). \quad (12)$$

Описанные выше особенности движения веера анализировались численно на основе дискретной модели. В частности, сравнение полудлины веера, полученной в расчетах —  $l = 0,107$  м, и рассчитанной по формуле (9) с коэффициентом  $k = R/\varepsilon$ , вычисленным по таблице на уровне 120–150 % деформации, показало их полное соответствие и хорошее согласование с лабораторными измерениями.

На рисунке 10 приведены результаты численных расчетов неполного раскрытия веера при угле наклона  $\alpha = 20^\circ$ . Видно, что срыв веера происходит, когда первая пластина принудительно поворачивается



**Рис. 10.** Момент страгивания веера в системе пластин, наклоненной под углом  $\alpha = 20^\circ$  при разных временах раскрытия  $T$ , с: 1 ( $t = 0,82$  с) (а), 6 ( $t = 4$  с) (б)

до критического угла, близкого к  $\varphi_*$ . Более того, вычислительные эксперименты показали, что, регулируя скорость формирования веера, то есть угловую скорость первой пластины, можно запустить веер с определенной скоростью. При быстром повороте первой пластины за время  $T=1$  с веер до момента страгивания успевает раскрыться на больший угол (Рис. 10а), чем в случае относительно медленного раскрытия ( $T=6$  с, Рис. 10б). При этом скорость веера возрастает, что качественно согласуется с уравнением (11).

В целом сопоставление результатов показало, что уравнения непрерывной модели в приближении длинного веера хорошо описывают основные качественные и количественные характеристики модели Б.Г. Тарасова. Используя физические параметры прочных горных пород в условиях сейсмических глубин, разработанная модель позволит исследовать особенности развития динамических трещин сдвига, управляемых веерным механизмом. Это даст возможность более глубокого понимания природы динамических явлений в земной коре.

## 6. Заключение

На основе уравнений Лагранжа построена дискретная математическая модель вращательного движения системы пластин на плоском основании, соединенных упругими связями. Предложен алгоритм численной реализации модели, учитывающий контактное взаимодействие пластин. С помощью разработанной программы в пакете прикладных программ Matlab выполнены расчеты процесса формирования и последующего движения веера за счет принудительного поворота первой пластины.

Получено уравнение, описывающее равновесное состояние системы в приближении длинного веера, с помощью которого вычислена длина веера в зависимости от веса пластин и коэффициента упругости связи. Показано, что при отсутствии трения и касательных усилий, когда система пластин находится в горизонтальном положении, стационарный веер может двигаться по инерции со скоростью, не превышающей критического значения, которое зависит от размера, момента инерции пластин, начального угла домино-системы и коэффициента упругости связи, и что длина веера сокращается с увеличением скорости. Стационарный веер останавливается при наличии трения. Действие касательных усилий приводит к неполному раскрытию веера, причем угол раскрытия уменьшается с ростом трения. В системе с трением скорость бегущего веера однозначно определяется через угол раскрытия, а при пренебрежении трением она может принимать любое значение из допустимого диапазона.

В рамках дискретной модели выполнены расчеты, демонстрирующие неполное раскрытие веера с различными углами раскрытия за счет быстрого или медленного изменения скорости поворота первой пластины. Сравнение результатов вычисления длины и скорости веера, найденных по дискретной модели, с расчетами на основе аналитических формул и с лабораторными наблюдениями показало хорошее соответствие результатов. Разработанная модель будет использоваться для изучения природы формирования динамических трещин сдвига в горных породах в условиях глубин сейсмической активности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Centre for Offshore Foundation Systems (The University of Western Australia), Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 18 «Алгоритмы и математическое обеспечение для вычислительных систем сверхвысокой производительности» и РФФИ (проект № 14-01-00130-а).

## Литература

1. *Reches Z., Lockner D.A.* Nucleation and growth of faults in brittle rocks // *J. Geophys. Res.* – 1994. – Vol. 99, no. B9. – P. 18159-18173. DOI
2. *Peng S., Johnson A.M.* Crack growth and faulting in cylindrical specimens of Chelmsford granite // *Int. J. Rock Mech. Min.* – 1972. – Vol. 9, no. 1. – P. 37-86. DOI
3. *Ortlepp W.D.* Rock fracture and rockbursts: an illustrative study. Monograph Series M9. – Johannesburg: South African Institute of Mining and Metallurgy, 1997. – 98 p.
4. *Ortlepp W.D., Armstrong R., Ryder J.A., O'Connor D.* Fundamental study of micro-fracturing on the slip surface of mine-induced dynamic brittle shear zones // *Proc. of 6th Int. Symp. on Rockburst and Seismicity in Mines. RaSiM6 – Controlling Seismic Risk, Perth, Australia, March 9-11, 2005 / Eds.: Y. Potvin, M. Hudyma.* – Perth: Australian Centre for Geomechanics, 2005. – P. 229-237.
5. *King G.C.P., Sammis C.G.* The mechanisms of finite brittle strain // *Pure Appl. Geophys.* – 1992. – Vol. 138, no. 4. – P. 611-640. DOI
6. *Scholz C.H.* The mechanics of earthquakes and faulting. – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 471 p.
7. *Stavrogin A.N., Tarasov B.G.* Experimental physics and rock mechanics: results of laboratory studies. – Lisse/Abingdon/Exton/Tokio: A.A. Balkema Publishers, 2001. – 356 p.
8. *Tarasov B.G., Randolph M.F.* Frictionless shear at great depth and other paradoxes of hard rocks // *Int. J. Rock Mech. Min.* – 2008. – Vol. 45, no. 3. – P. 316-328. DOI
9. *Tarasov B.G.* Intersonic shear rupture mechanism // *Int. J. Rock Mech. Min.* – 2008. – Vol. 45, no. 6. – P. 914-928. DOI

10. Tarasov B.G. Hitherto unknown shear rupture mechanism as a source of instability in intact hard rocks at highly confined compression // *Tectonophysics*. – 2014. – Vol. 621. – P. 69-84. DOI
11. Tarasov B.G. Superbrittleness of rocks at high confining pressure // *Proc. of 5th Int. Seminar on Deep and High Stress Mining, Keynote Address. Deep Mining 2010, Santiago, Chile, October 6-8, 2010* / Eds.: M. Van Sint Jan, Y. Potvin. – Perth: Australian Centre for Geomechanics, 2010. – P. 119-133.
12. Tarasov B.G., Randolph M.F. Superbrittleness of rocks and earthquake activity // *Int. J. Rock Mech. Min.* – 2011. – Vol. 48, no. 6. – P. 888-898. DOI
13. Tarasov B., Potvin Y. Universal criteria for rock brittleness estimation under triaxial compression // *Int. J. Rock Mech. Min.* – 2013. – Vol. 59. – P. 57-69. DOI
14. Tarasov B.G. Fan-structure shear rupture mechanism as a source of shear rupture rockbursts // *J. S. Afr. I. Min. Metall.* – 2014. – Vol. 114. – P. 773-784.
15. Tarasov B.G. Depth distribution of lithospheric strength determined by the self-unbalancing shear rupture mechanism // *Proc. of Int. Symp.: Rock Mechanics for Resources, Energy and Environment. EUROCK 2013, Wroclaw, Poland, September 21-26, 2013* / Eds.: M. Kwaśniewski, D. Łydzba. – London: Taylor & Francis Group, 2013. – Ch. 21. – P. 165-170. DOI
16. Tarasov B.G., Randolph M.F. Improved concept of lithospheric strength and earthquake activity at shallow depths based upon the fan-head dynamic shear rupture mechanism // *Tectonophysics*. – 2016. – Vol. 667. – P. 124-143. DOI
17. Tarasov B.G., Guzev M.A. New insight into the nature of size dependence and the lower limit of rock strength // *Proc. of 8th Int. Symp. on Rockbursts and Seismicity in Mines. RaSiM8, Saint Petersburg–Moscow, Russia, September 1-7, 2013* / Eds. A. Malovichko, D. Malovichko. – Obninsk/Perm: GS RAS & MI UB RAS, 2013. – P. 31-40.
18. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. – М.: Физматлит, 2008. – 368 с. (English version DOI).
19. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Трёмольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
20. Садовский В.М., Ченцов Е.П. Анализ резонансного возбуждения слоистых и блочных сред на основе дискретных моделей // *Вычислительные методы и программирование*. – 2015. – Т. 16, № 2. – С. 318-327.
21. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.
22. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. – Новосибирск: Наука, 1997. – 192 с.

## References

1. Reches Z., Lockner D.A. Nucleation and growth of faults in brittle rocks. *J. Geophys. Res.*, 1994, vol. 99, no. B9, pp. 18159-18173. DOI
2. Peng S., Johnson A.M. Crack growth and faulting in cylindrical specimens of Chelmsford granite. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 1972, vol. 9, no. 1, pp. 37-86. DOI
3. Ortlepp W.D. *Rock fracture and rockbursts: an illustrative study*. Monograph Series M9. Johannesburg: South African Institute of Mining and Metallurgy, 1997. 98 p.
4. Ortlepp W.D., Armstrong R., Ryder J.A., O'Connor D. *Proc. of 6th Int. Symp. on Rockburst and Seismicity in Mines. RaSiM6 – Controlling Seismic Risk, Perth, Australia, March 9-11, 2005*. Ed. by Y. Potvin and M. Hudyma. Perth: Australian Centre for Geomechanics, 2005. Pp. 229-237.
5. King G.C.P., Sammis C.G. The mechanisms of finite brittle strain. *Pure Appl. Geophys.*, 1992, vol. 138, no. 4, pp. 611-640. DOI
6. Scholz C.H. *The mechanics of earthquakes and faulting*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 471 p.
7. Stavrogin A.N., Tarasov B.G. *Experimental physics and rock mechanics: results of laboratory studies*. Lisse/Abingdon/Exton/Tokio, A.A. Balkema Publishers, 2001. 356 p.
8. Tarasov B.G., Randolph M.F. Frictionless shear at great depth and other paradoxes of hard rocks. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 2008, vol. 45, no. 3, pp. 316-328. DOI
9. Tarasov B.G. Intersonic shear rupture mechanism. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 2008, vol. 45, no. 6, pp. 914-928. DOI
10. Tarasov B.G. Hitherto unknown shear rupture mechanism as a source of instability in intact hard rocks at highly confined compression. *Tectonophysics*, 2014, vol. 621, pp. 69-84. DOI
11. Tarasov B.G. Superbrittleness of rocks at high confining pressure. *Proc. of 5th Int. Seminar on Deep and High Stress Mining, Keynote Address. Deep Mining 2010, Santiago, Chile, October 6-8, 2010*. Ed. by M. Van Sint Jan, Y. Potvin. Perth: Australian Centre for Geomechanics, 2010. Pp. 119-133.
12. Tarasov B.G., Randolph M.F. Superbrittleness of rocks and earthquake activity. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 2011, vol. 48, no. 6, pp. 888-898. DOI
13. Tarasov B., Potvin Y. Universal criteria for rock brittleness estimation under triaxial compression. *Int. J. Rock Mech. Min.*, 2013, vol. 59, pp. 57-69. DOI
14. Tarasov B.G. Fan-structure shear rupture mechanism as a source of shear rupture rockbursts. *J. S. Afr. I. Min. Metall.*, 2014, vol. 114, pp. 773-784.
15. Tarasov B.G. Depth distribution of lithospheric strength determined by the self-unbalancing shear rupture mechanism. *Proc. of Int. Symp.: Rock Mechanics for Resources, Energy and Environment. EUROCK 2013, Wroclaw, Poland, September 21-26, 2013*. Ed. by M. Kwaśniewski, D. Łydzba. London, Taylor & Francis Group, 2013, ch. 21, pp. 165-170. DOI
16. Tarasov B.G., Randolph M.F. Improved concept of lithospheric strength and earthquake activity at shallow depths based upon the fan-head dynamic shear rupture mechanism. *Tectonophysics*, 2016, vol. 667, pp. 124-143. DOI
17. Tarasov B.G., Guzev M.A. New insight into the nature of size dependence and the lower limit of rock strength. *Proc. of 8th Int. Symp. on Rockbursts and Seismicity in Mines. RaSiM8, Saint Petersburg – Moscow, Russia, September 1-7, 2013*. Ed. by A. Malovichko, D. Malovichko. Obninsk/Perm, GS RAS & MI UB RAS, 2013. Pp. 31-40.

18. Sadovskaya O., Sadovskii V. *Mathematical modeling in mechanics of granular materials*. Series: Advanced Structured Materials, vol. 21. Heidelberg/New York/Dordrecht/London: Springer, 2012. 390 p. DOI
19. Glowinski R., Lions J.L., Trémolières R. *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles* [Numerical analysis of variational inequalities], vol. 1-2. Paris: Dunod, 1976.
20. Sadovskii V.M., Chentsov E.P. Analysis of resonant excitation of layered and block media on the basis of discrete models. *Vychislitel'nye Metody i Programirovanie – Numerical Methods and Programming*, 2015, vol. 16, no. 2, pp. 318-327.
21. Marchuk G.I. *Methods of numerical mathematics*. New York: Springer-Verlag, 1982. 510 p.
22. Novikov E.A. *Yavnye metody dlya zhestkikh sistem* [Explicit methods for stiff systems]. Novosibirsk: Nauka, 1997. 192 p.

*Поступила в редакцию 18.12.2015; опубликована в электронном виде 30.03.2016*

---

*Сведения об авторах*

*Тарасов Борис Григорьевич*, дтн, проф., University of Western Australia (COFS UWA), Australia, 6009 Western Australia, Crawley, Stirling Highway, 35; e-mail: boris.tarasov@uwa.edu.au

*Садовский Владимир Михайлович*, дфмн, проф., зам. дир., Институт вычислительного моделирования СО РАН (ИВМ СО РАН), 660036, Красноярск, Академгородок, д. 50/44; e-mail: sadov@icm.krasn.ru

*Садовская Оксана Викторовна*, кфмн, снс, ИВМ СО РАН; e-mail: o\_sadov@icm.krasn.ru