

DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.1.3  
УДК 532.517:536.252

## ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ НА МОНОТОННУЮ МОДУ НЕУСТОЙЧИВОСТИ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ТВЁРДЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ СЛУЧАЯ СПИРАЛЬНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Д.Г. Чикулаев, К.Г. Шварц

*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*

Изучена связь между появлением монотонной неустойчивости адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами и величинами числа Прандтля ( $Pr$ ) и числа Тейлора ( $Ta$ ) для случая спиральных возмущений. Для исследования применялся метод малых возмущений. Полученная одномерная задача была решена с помощью метода сеток, для которого представлены системы уравнений и необходимые численные параметры. Построены нейтральные кривые, отображающие зависимость критического числа Грасгофа от волнового числа при различных значениях  $Ta$  и  $Pr$ . Выявлены две гидродинамические моды неустойчивости и исследовано влияние на них вращения при  $0 \leq Ta \leq 10^5$  и числах Прандтля из диапазона  $0 < Pr \leq 20$ . Область существования первой монотонной моды с ростом числа Тейлора от 4 до 370 расширяется по  $Pr$  в пределах от 0 до 0,3. При  $Ta = 370$  и  $0,3 < Pr \leq 1$  возникает вторая мода, зона наличия которой с ростом числа  $Ta$  охватывает значения числа  $Pr$  от 0,3 до 0 и от 1 до 20. Построены графики поведения критического числа Грасгофа как функции числа Тейлора и числа Прандтля. Выявлено, что при фиксированном значении  $Pr \leq 0,1$  первая мода опаснее второй моды (критические числа Грасгофа первой моды меньше критических чисел Грасгофа второй моды при соответствующих  $Ta$  и  $Pr$ ), а при  $Pr$  из диапазона  $0,1 < Pr \leq 0,3$  наоборот — вторая мода более опасна, чем первая монотонная мода. При определённом значении числа  $Ta$  из диапазона, при котором одновременно присутствуют обе монотонные моды, обнаружено, что вторая мода опаснее первой моды.

*Ключевые слова:* адвективные течения, горизонтальная конвекция, вращение, устойчивость, спиральные возмущения, монотонная мода неустойчивости, метод сеток, нейтральная кривая

## EFFECT OF ROTATION ON THE MONOTONIC INSTABILITY MODE OF ADVECTIVE FLOW IN A HORIZONTAL INCOMPRESSIBLE FLUID LAYER WITH RIGID BOUNDARIES IN THE CASE OF NORMAL SPIRAL PERTURBATIONS

D.G. Chikulaev and K.G. Shvarts

*Perm State University, Perm, Russian Federation*

We study the monotonic instability mode of an advective flow in a rotating horizontal layer of incompressible fluid with rigid boundaries, which depend on the Prandtl number ( $Pr$ ) and the Taylor number ( $Ta$ ) in the case of spiral perturbations using a small perturbation method. In calculations, we apply the grid method to the one-dimensional problem. The system of equations and necessary parameters of the numerical solution are presented. The neutral curves describing the dependence of the Grashof number on the wave number for different values of  $Ta$  and  $Pr$  are presented. Two hydrodynamic modes of instability are revealed. The effect of rotation on these modes is investigated in the range of  $0 \leq Ta \leq 10^5$  at Prandtl numbers in the range of  $0 < Pr \leq 20$ . The region of the first monotonic mode is expanded with respect to  $Pr$  in the range of 0 to 0.3 with increasing Taylor number from 4 to 370. The second monotonic mode arises in the range  $0.3 < Pr \leq 1$  at  $Ta = 370$ , and the region of this mode is expanded with respect to  $Pr$  in the range from 0.3 to 0 and from 1 to 20 with increasing  $Ta$ . The curves describing the dependence of the Grashof number on the Taylor and Prandtl numbers are given. The first mode is more dangerous than the second mode for a fixed value of the Prandtl number at  $Pr \leq 0,1$ . However, the second mode is more dangerous than the first monotonic mode in the range of  $0,1 < Pr \leq 0,3$ . The second mode is more dangerous than the first mode for a fixed value of  $Ta$  in the range of the simultaneous existence of both monotonic modes.

*Key words:* advective flows, horizontal temperature gradient, rotation, stability, spiral perturbations, monotonic instability mode, grid method, neutral curve

### 1. Введение

В работе [1] Г.А. Остроумов рассматривал тепловую конвекцию в бесконечной наклонной щели, заполненной жидкостью и ограниченной полубесконечными твёрдыми массивами с плоскими параллельными границами при наличии постоянного градиента температуры на них. Решение для горизонтального слоя с продольным градиентом температуры впервые дано в работе Р.В. Бириха [2]. В [3, 4] приведён обзор работ, связанных с плоскопараллельными адвективными течениями при различных граничных условиях, а также представлены некоторые новые постановки задач для этого решения и его обобщения. Влияние наклона слоя на адвективные течения исследовалось А.Н. Шарифулиным [5, 6]. В теоретической работе [5] получена простая модель, описывающая существенные черты сложного бифуркационного поведения жидкости в горизонтальном наклоняемом параллелепипеде. В [6] изучалась устойчивость адвективного течения в наклонном плоском слое с идеально теплопроводными границами, на которых задан постоянный по отношению к длинноволновым возмущениям продольный градиент температуры.

В работе [7] представлено точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее плоскопараллельное адвективное течение в плоском слое несжимающейся жидкости с твёрдыми границами, на которых задано либо линейное распределение температуры разных знаков, либо линейный горизонтальный температурный градиент.

Устойчивость течений для случая с твёрдыми границами исследовалась в [8, 9] с помощью метода Галёркина. Обнаружено, что при малых числах Прандтля для плоских возмущений возникает гидродинамическая мода, обусловленная гидродинамическим механизмом, при которой вихри на границе встречных потоков неподвижны [9]. Монотонная гидродинамическая мода неустойчивости существует при малых числах Прандтля ( $0 \leq Pr \leq 0,34$ ); с ростом  $Pr$  она резко стабилизируется ввиду того, что в области образования вихрей имеется устойчивая температурная стратификация, затрудняющая их развитие. Спиральные возмущения обладают только колебательным характером.

С.Н. Аристовым с соавторами [10–12] впервые получены уравнения, аналитически представляющие адвективное течение во вращающемся плоском горизонтальном слое жидкости в случае, когда на границах линейно с продольной координатой изменялась температура. В [13] изображено семейство замкнутых адвективных течений во вращающемся вокруг вертикальной оси горизонтальном слое жидкости при различных граничных условиях для скорости и температуры. Здесь по аналогии с течениями без вращения вектор скорости был ориентирован перпендикулярно силе плавучести, имел горизонтальные компоненты, но отсутствовала его вертикальная компонента [13].

В статье [14] описано адвективное течение стратифицированной жидкости при наличии вращения. Нестационарные адвективные течения во вращающемся горизонтальном слое несжимаемой жидкости представлены в работе [15].

Публикации, посвящённые исследованию устойчивости адвективных течений во вращающемся слое жидкости, представлены в обзоре [16]. Устойчивость адвективных течений во вращающемся плоском горизонтальном слое жидкости с твёрдыми границами рассматривалась с применением метода сеток при  $Pr = 6,7$  (вода) в [13, 17] и при  $Pr = 0,1$  в [18]. Показано, что при вращении адвективное течение становится более устойчивым, за исключением небольшого интервала значений числа Тейлора  $Ta$ . В рамках линейной теории вращение не меняет монотонный характер неустойчивости течения. В [13, 17] обсуждались следующие виды возмущений: винтовые — периодические по  $x$  возмущения в виде валов с осью, перпендикулярной горизонтальной оси  $Ox$ , и спиральные — возмущения в виде валов с осью, параллельной оси  $Ox$ . При  $Pr = 6,7$  и  $Ta \leq 60$  спиральные возмущения оказались более опасными, чем винтовые пространственные (критические числа Грасгофа для случая спиральных возмущений меньше критических чисел Грасгофа для случая винтовых возмущений при соответствующих  $Ta$  и  $Pr$ ), а при  $Ta > 60$  наоборот.

В работе [19] опубликованы результаты сравнения метода дифференциальной прогонки с методом сеток при анализе устойчивости адвективного течения во вращающемся слое жидкости, получены одинаковые результаты и показана эффективность метода сеток.

Устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами при слабом вращении ( $0 \leq Ta \leq 100$ ) и малых числах Прандтля исследовалась в [20]. Показано, что с ростом  $Ta$  течение становится более устойчивым, а граница монотонной моды сужается по числу Прандтля. В работе [21] изучалось влияние быстрого вращения при большом значении числа Тейлора ( $Ta = 10^5$ ) на аналогичное течение. Показано, что с ростом числа Прандтля от 0 до 0,3 течение дестабилизируется, а при  $0,3 \leq Pr \leq 0,92$  стабилизируется — критическое число Грасгофа возрастает. Определена граница гидродинамической моды.

Граница существования монотонной неустойчивости адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами в зависимости от числа Прандтля и числа Тейлора для случая винтовых возмущений (периодических по  $x$  в виде валов с осью, перпендикулярной оси  $Ox$ ) обсуждалась в работе [22]. Уравнения возмущений выводились в предположении, что производная по  $y$  всех функций равна нулю. В результате были найдены две гидродинамические моды неустойчивости и исследовано влияние на них вращения в диапазоне  $0 \leq Ta \leq 10^5$  при малых числах Прандтля. Обнаружено, что граница первой монотонной моды с ростом числа Тейлора от 0 до 200 сужается по  $Pr$  в пределах от 0,34 до 0. В диапазоне числа Тейлора от 200 до 268 монотонные моды отсутствуют. Граница второй монотонной моды с ростом  $268 \leq Ta \leq 10^5$  расширяется по  $Pr$  от 0,065 до нуля и от 0,065 до 0,92. Первая монотонная мода стабилизирует адвективное течение, то есть увеличивается критическое число Грасгофа с ростом числа Тейлора. Вторая мода с ростом  $Ta$  сначала дестабилизирует течение, а при переходе порогового значения числа Тейлора стабилизирует его. Величина порогового  $Ta$  зависит от  $Pr$ , и минимальное значение  $Ta = 540$  это число принимает при  $Pr = 0,08$ . При фиксированном числе Тейлора с ростом числа Прандтля течение дестабилизируется, а затем при переходе порогового значения числа Прандтля течение стабилизируется. С ростом числа Тейлора пороговое число Прандтля увеличивается.

В работе [23] представлены некоторые результаты исследования устойчивости адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами для двух предельных случаев: пространственных винтовых периодических по  $x$  возмущений в виде валов с осью, перпендикулярной горизонтальной оси  $Ox$ , и спиральных возмущений в виде валов с осью, параллельной оси  $Ox$ .

В обсуждаемой задаче из-за наличия продольного градиента температуры не удаётся получить преобразования, сводящие проблему пространственных возмущений к плоским [9]. Поэтому сначала рассматриваются два предельных случая: винтовые [22] и спиральные возмущения. Отметим, что при отсутствии вращения винтовые возмущения становятся плоскими.

Цель данной работы — определение границы монотонных мод неустойчивости адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами при  $0 < Pr \leq 20$  в диапазоне  $0 \leq Ta \leq 10^5$  для случая спиральных возмущений и оценка их стабилизационных эффектов.

## 2. Постановка задачи

Пусть имеем бесконечный горизонтальный слой несжимаемой жидкости с твёрдыми границами  $z = \pm h$ , вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\Omega = \Omega_0 \mathbf{i}_z$ , где  $\mathbf{i}_z$  — орт-вектор вертикальной оси  $z$ . Направление оси вращения совпадает с вертикальной осью координат  $Oz$ . На обеих границах заданы горизонтальный градиент температуры  $T$ , условие прилипания и замкнутости потока

$$z = \pm h: \quad T = Ax, \quad A = \text{const}, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \int_{-h}^h v_x dz = 0, \quad \int_{-h}^h v_y dz = 0. \quad (1)$$

Исследование адвективных течений будем проводить в декартовой системе координат на основе уравнений конвекции в приближении Буссинеска, записанных во вращающейся системе отсчёта [13, 24]. За счёт неоднородности плотности в центробежном поле возникает конвективная сила. Её отношение к конвективной силе в поле тяжести определяется числом Фруда  $Fr$ . Рассмотрим ситуацию, когда число Фруда  $Fr = \Omega^2 l / g \ll 1$  [24], здесь  $l$  — характерный горизонтальный масштаб,  $g$  — ускорение силы тяжести. В этом случае центробежной силой можно пренебречь, так как влияние поля тяжести существенно преобладает. В качестве единиц измерения длины, времени, скорости, температуры и давления, соответственно, выберем  $h$ ,  $h^2/\nu$ ,  $g\beta Ah^2/\nu$ ,  $Ah$  и  $\rho_0 g\beta Ah^2$ , где  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $A$  — постоянный горизонтальный температурный градиент на горизонтальных границах слоя,  $\rho_0$  — средняя плотность. С учётом этих масштабов получим замкнутую систему уравнений в проекциях на оси вращающейся системы координат в безразмерном виде [9, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + Gr \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) - \sqrt{Ta} \cdot v_y &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + Gr \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \sqrt{Ta} \cdot v_x &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + Gr \left( v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta v_z + T, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + Gr \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{1}{Pr} \Delta T, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $T(x, y, z, t)$  — температура,  $\chi$  — коэффициент теплопроводности,  $\mathbf{v}(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z)$  — вектор скорости жидкости относительно вращающейся системы,  $p$  — давление,  $Gr = g\beta Ah^4/\nu^2$  — число Грасгофа,  $Ta = (2\Omega_0 h^2/\nu)^2$  — число Тейлора,  $Pr = \nu/\chi$  — число Прандтля. Условия (1) будут выглядеть следующим образом:

$$z = \pm 1: \quad T = x, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \int_{-1}^1 v_x dz = 0, \quad \int_{-1}^1 v_y dz = 0. \quad (3)$$

Точное решение задачи (2), (3) получено в работе [13]:

$$u_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\text{Ta}}} \text{Im} f_1(z), \quad v_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\text{Ta}}} (z - \text{Re} f_1(z)), \quad w_0(z) \equiv 0,$$

$$T_0 = x + \text{GrPr}\tau_0(z), \quad \tau_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0(z), \quad f_1(z) = \frac{\text{sh}(\mu z)}{\text{sh}(\mu)}, \quad \mu = \sqrt[4]{\frac{\text{Ta}}{4}}(1+i), \quad i = \sqrt{-1},$$

где  $u_0(z)$ ,  $v_0(z)$  и  $w_0(z)$  — компоненты вектора скорости, а  $\text{Re}$  и  $\text{Im}$  — действительная и мнимая части комплексных значений,  $T_0$  — температура.

Для исследования устойчивости возникающего стационарного плоскопараллельного адвективного течения применим метод малых возмущений [13, 25]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_0 = (u_0, v_0, 0), \quad \mathbf{V} = (u, v, w), \quad T = T_0 + \theta, \quad p = p_0 + P, \quad (4)$$

где  $\mathbf{V}$ ,  $\theta$ ,  $P$  — малые нестационарные возмущения скорости, температуры и давления. Будем считать, что границы слоя являются идеально теплопроводными. Подставим (4) в (2) и (3). В рамках линейной теории пренебрежём квадратичными по  $\mathbf{V}$  и  $\theta$  слагаемыми и получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \text{Gr} \left( w \frac{\partial u_0}{\partial z} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sqrt{\text{Ta}} \cdot v &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \text{Gr} \left( w \frac{\partial v_0}{\partial z} + u_0 \frac{\partial v}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \sqrt{\text{Ta}} \cdot u &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \text{Gr} \left( u_0 \frac{\partial w}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \Delta w + \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{Gr} \left( u \frac{\partial T_0}{\partial x} + w \frac{\partial T_0}{\partial z} + u_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta;$$

$$z = \pm 1: \quad \mathbf{V} = 0, \quad \theta = 0, \quad \int_{-1}^1 u dz = 0, \quad \int_{-1}^1 v dz = 0. \quad (6)$$

### 3. Численное решение

Исследование устойчивости будем проводить на основе метода сеток, используемого для решения одномерной задачи в [13, 17]. Разработанный web-интерфейс [26] позволяет управлять расчётами на удалённом сервере с сохранением полученных результатов в базе данных.

Рассмотрим периодические по  $y$  возмущения, которые выглядят как валы с осью, параллельной оси  $Ox$ . Уравнения возмущений будем выводить в предположении, что производная по  $x$  всех функций равна нулю. Этот предельный случай называется спиральными возмущениями [9]. Таким образом, имеются все три компоненты вектора возмущения скорости, которые так же, как и возмущения температуры, являются функциями времени  $t$  и двух пространственных переменных  $y$ ,  $z$  [13].

Введём функцию тока возмущений  $\Psi$ :  $v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$ ,  $w = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ , и вихря возмущения скорости

$\Phi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = -\Delta \Psi$ . В качестве малых возмущений возьмём нормальные возмущения [17] и представим

все неизвестные функции в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(t, y, z) &= (\Phi_1(t, z) + i\Phi_2(t, z)) \exp(ik_y y), \\ \Psi(t, y, z) &= (\Psi_1(t, z) + i\Psi_2(t, z)) \exp(ik_y y), \\ u(t, y, z) &= (u_1(t, z) + iu_2(t, z)) \exp(ik_y y), \\ \theta(t, y, z) &= (\theta_1(t, z) + i\theta_2(t, z)) \exp(ik_y y), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Phi_1(t, z)$ ,  $\Psi_1(t, z)$ ,  $u_1(t, z)$ ,  $\theta_1(t, z)$ ,  $\Phi_2(t, z)$ ,  $\Psi_2(t, z)$ ,  $u_2(t, z)$ ,  $\theta_2(t, z)$  — амплитуды возмущений,  $k_y$  — вещественное волновое число, характеризующее периодичность возмущений вдоль направления  $y$ .

Из системы уравнений (5), граничных условий (6) с учётом представления решения в виде нормальных возмущений (7) получим систему одномерных уравнений в частных производных по времени  $t$  и переменной  $z$  [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - k_y \text{Gr} (v_0(z) \Phi_2 + v_0''(z) \Psi_2) + \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial u_1}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - k_y^2 \Phi_1 + k_y \theta_2, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + k_y \text{Gr} (v_0(z) \Phi_1 + v_0''(z) \Psi_1) + \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial u_2}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - k_y^2 \Phi_2 - k_y \theta_1, \\ \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial z^2} - k_y^2 \Psi_\alpha + \Phi_\alpha &= 0 \quad (\alpha = 1, 2), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} - k_y \text{Gr} (v_0(z) u_2 + u_0'(z) \Psi_2) + \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - k_y^2 u_1, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + k_y \text{Gr} (v_0(z) u_1 + u_0'(z) \Psi_1) + \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - k_y^2 u_2, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - k_y \text{Gr} \left( v_0(z) \theta_2 + \frac{\text{Ra}}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0'(z) \Psi_2 \right) + \text{Gr} u_1 &= \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - k_y^2 \theta_1 \right), \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + k_y \text{Gr} \left( v_0(z) \theta_1 + \frac{\text{Ra}}{\sqrt{\text{Ta}}} v_0'(z) \Psi_1 \right) + \text{Gr} u_2 &= \frac{1}{\text{Pr}} \left( \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - k_y^2 \theta_2 \right) \end{aligned} \quad (8)$$

с граничными условиями

$$z = \pm 1: \quad \Psi_\alpha = \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial z} = u_\alpha = \theta_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \quad (9)$$

где  $\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr}$  — число Релея.

В качестве начальных возмущений для неизвестных возьмём функции

$$u_\alpha = \theta_\alpha = \sin^2 \pi z, \quad \Phi_\alpha = 2\pi^2 \cos 2\pi z \quad (\alpha = 1, 2), \quad (10)$$

согласующиеся с граничными условиями (9).

Полученная система (8)–(10) решалась в соответствии с численной методикой, описанной в работе [17]. Дискретные аналоги уравнений для возмущения вихря и функции тока получались с помощью классической неявной схемы [13]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_z^2} \Phi_{1,j+1}^{n+1} - \left( \frac{2}{h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + k_y^2 \right) \Phi_{1,j}^{n+1} + \frac{1}{h_z^2} \Phi_{1,j-1}^{n+1} &= -\frac{1}{\Delta t} \Phi_{1,j}^n - k_y \text{Gr} (v_0(z_j) \Phi_{2,j}^n + v_0'(z_j) \Psi_{2,j}^n) - \\ &\quad - \sqrt{\text{Ta}} \frac{u_{1,j+1}^n - u_{1,j-1}^n}{2h_z} - k_y \theta_{2,j}^n \quad (0 < j < N), \\ \Phi_{1,0}^{n+1} &= \Phi_{1,0}^n, \quad \Phi_{1,N}^{n+1} = \Phi_{1,N}^n; \\ \frac{1}{h_z^2} \Phi_{2,j+1}^{n+1} - \left( \frac{2}{h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + k_y^2 \right) \Phi_{2,j}^{n+1} + \frac{1}{h_z^2} \Phi_{2,j-1}^{n+1} &= -\frac{1}{\Delta t} \Phi_{2,j}^n + k_y \text{Gr} (v_0(z_j) \Phi_{1,j}^{n+1} + v_0'(z_j) \Psi_{1,j}^{n+1}) - \\ &\quad - \sqrt{\text{Ta}} \frac{u_{2,j+1}^n - u_{2,j-1}^n}{2h_z} + k_y \theta_{1,j}^n \quad (0 < j < N), \\ \Phi_{2,0}^{n+1} &= \Phi_{2,0}^n, \quad \Phi_{2,N}^{n+1} = \Phi_{2,N}^n; \\ \frac{1}{h_z^2} \Psi_{1,j+1}^{n+1} - \left( \frac{2}{h_z^2} + k_y^2 \right) \Psi_{1,j}^{n+1} + \frac{1}{h_z^2} \Psi_{1,j-1}^{n+1} &= -\Phi_{1,j}^{n+1} \quad (0 < j < N), \\ \Psi_{1,0}^{n+1} &= 0, \quad \Psi_{1,N}^{n+1} = 0; \\ \frac{1}{h_z^2} \Psi_{2,j+1}^{n+1} - \left( \frac{2}{h_z^2} + k_y^2 \right) \Psi_{2,j}^{n+1} + \frac{1}{h_z^2} \Psi_{2,j-1}^{n+1} &= -\Phi_{2,j}^{n+1} \quad (0 < j < N), \\ \Psi_{2,0}^{n+1} &= 0, \quad \Psi_{2,N}^{n+1} = 0, \end{aligned}$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени,  $n=0, 1, \dots$  — номер шага по времени;  $h_z = 2/N$  — шаг по вертикальной координате,  $N$  — число интервалов разбиения. Верхние индексы — это номера шагов по времени, а нижние — номера шагов по горизонтальной и вертикальной координатам. Вихри  $\Phi_1, \Phi_2$  на границах аппроксимировались по формуле Вудса [13]:

$$\Phi_{\alpha,0}^{n+1} = -\frac{3}{h_z^2} \Psi_{\alpha,1}^{n+1} - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha,1}^{n+1},$$

$$\Phi_{\alpha,N}^{n+1} = -\frac{3}{h_z^2} \Psi_{\alpha,N-1}^{n+1} - \frac{1}{2} \Phi_{\alpha,N-1}^{n+1} \quad (\alpha=1,2).$$

При решении уравнений для возмущений скорости и температуры прибегали к схеме Кранка–Николсон, погрешность аппроксимации имела порядок  $O(\Delta t^2 + h_z^2)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h_z^2} u_{1,j+1}^{n+1} - \left( \frac{1}{h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_y^2}{2} \right) u_{1,j}^{n+1} + \frac{1}{2h_z^2} u_{1,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} u_{1,j}^n - \frac{u_{1,j+1}^n - 2u_{1,j}^n + u_{1,j-1}^n}{2h_z^2} + \\ & + \frac{k_y^2}{2} u_{1,j}^n - k_y \text{Gr} (v_0(z_j) u_{2,j}^n + u_0'(z_j) \Psi_{2,j}^{n+1}) - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\Psi_{1,j+1}^{n+1} - \Psi_{1,j-1}^{n+1}}{2h_z} \quad (0 < j < N), \\ & u_{1,0}^{n+1} = 0, \quad u_{1,N}^{n+1} = 0; \\ & \frac{1}{2h_z^2} u_{2,j+1}^{n+1} - \left( \frac{1}{h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_y^2}{2} \right) u_{2,j}^{n+1} + \frac{1}{2h_z^2} u_{2,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} u_{2,j}^n - \frac{u_{2,j+1}^n - 2u_{2,j}^n + u_{2,j-1}^n}{2h_z^2} + \\ & + \frac{k_y^2}{2} u_{2,j}^n + k_y \text{Gr} (v_0(z_j) u_{1,j}^{n+1} + u_0'(z_j) \Psi_{1,j}^{n+1}) - \sqrt{\text{Ta}} \frac{\Psi_{2,j+1}^{n+1} - \Psi_{2,j-1}^{n+1}}{2h_z} \quad (0 < j < N), \\ & u_{2,0}^{n+1} = 0, \quad u_{2,N}^{n+1} = 0; \\ & \frac{1}{2\text{Pr} h_z^2} \theta_{1,j+1}^{n+1} - \left( \frac{1}{\text{Pr} h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_x^2}{2\text{Pr}} \right) \theta_{1,j}^{n+1} + \frac{1}{2\text{Pr} h_z^2} \theta_{1,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \theta_{1,j}^n - \frac{\theta_{1,j+1}^n - 2\theta_{1,j}^n + \theta_{1,j-1}^n}{2\text{Pr} h_z^2} + \\ & + \frac{k_x^2}{2\text{Pr}} \theta_{1,j}^n - k_x \text{Gr} (u_0(z_j) \theta_{2,j}^n + \text{Ra} \tau_0'(z_j) \Psi_{2,j}^{n+1}) - \text{Gr} \frac{\Psi_{1,j+1}^{n+1} - \Psi_{1,j-1}^{n+1}}{2h_z} \quad (0 < j < N), \\ & \theta_{1,0}^{n+1} = 0, \quad \theta_{1,N}^{n+1} = 0; \\ & \frac{1}{2\text{Pr} h_z^2} \theta_{2,j+1}^{n+1} - \left( \frac{1}{\text{Pr} h_z^2} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{k_x^2}{2\text{Pr}} \right) \theta_{2,j}^{n+1} + \frac{1}{2\text{Pr} h_z^2} \theta_{2,j-1}^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \theta_{2,j}^n - \frac{\theta_{2,j+1}^n - 2\theta_{2,j}^n + \theta_{2,j-1}^n}{2\text{Pr} h_z^2} + \\ & + \frac{k_x^2}{2\text{Pr}} \theta_{2,j}^n + k_x \text{Gr} (u_0(z_j) \theta_{1,j}^{n+1} + \text{Ra} \tau_0'(z_j) \Psi_{1,j}^{n+1}) - \text{Gr} \frac{\Psi_{2,j+1}^{n+1} - \Psi_{2,j-1}^{n+1}}{2h_z} \quad (0 < j < N), \\ & \theta_{2,0}^{n+1} = 0, \quad \theta_{2,N}^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Декремент возмущений представлялся в виде  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ . Для построения нейтральной кривой при каждом выбранном значении  $k_y$  необходимо было решить задачу поиска корня  $\lambda_1 = 0$  для неявной функции  $\lambda_1(k_y, \text{Gr}, \text{Ta})$ . Так как эта функция строилась дискретным образом, то для её нахождения прослеживалась эволюция во времени максимумов модулей неизвестных. Подробнее метод определения действительной части декремента возмущений описан в работе [13]. Число пространственных узлов сетки выбиралось равным  $N = 800$ , шаг по времени составлял  $\Delta t = h_z^2/8$ .

#### 4. Исследование монотонной неустойчивости адвективного течения

Перед тем, как начать рассмотрение полученных результатов, введём необходимые определения. Пороговые числа Тейлора (Прандтля) — это значения  $\text{Ta}$  ( $\text{Pr}$ ), при которых достигаются локальные экстремумы критического числа Грасгофа при фиксированном значении числа Прандтля (Тейлора).

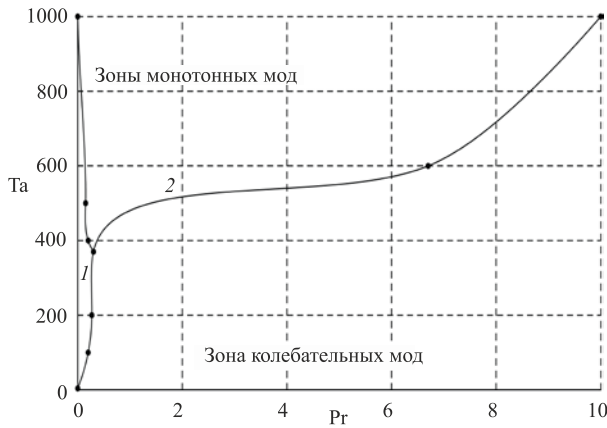


Рис. 1. Границы по числу Прандтля первой (линия 1) и второй (2) гидродинамических мод при различных значениях числа Тейлора

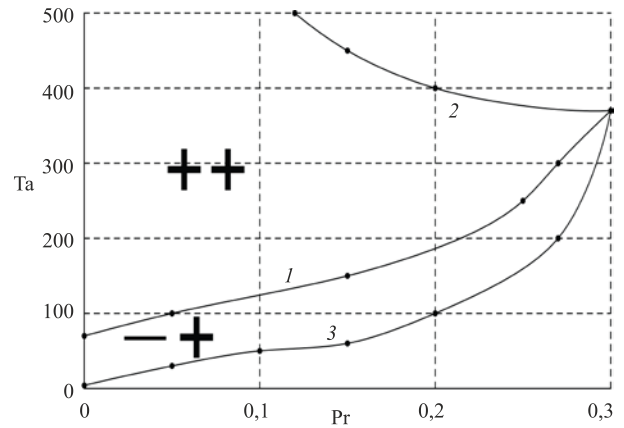


Рис. 2. Зоны дестабилизации (-) и стабилизации (+) первой гидродинамической моды по числам Тейлора и Прандтля; 1 – линия пороговых чисел Тейлора первой гидродинамической моды; 2 – граница между первой и второй гидродинамическими модами; 3 – граница между гидродинамическими и колебательными модами

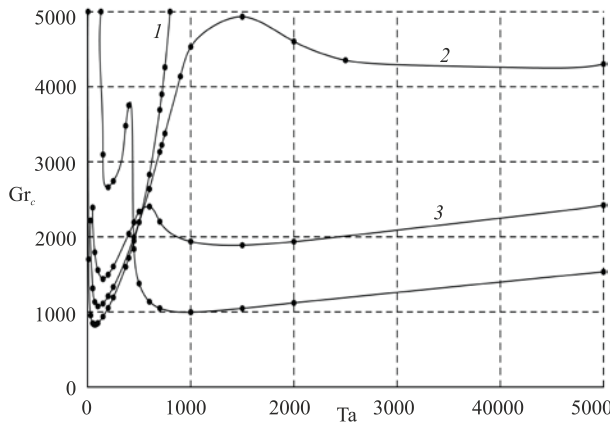
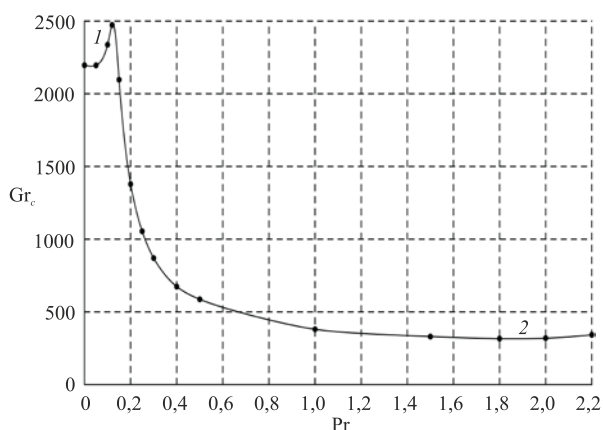


Рис. 3. Зависимость критического числа Грасгофа от числа Тейлора при различных значениях числа Прандтля: 1 –  $Pr=0,01$ , 2 –  $Pr=0,05$ , 3 –  $Pr=0,1$ , 4 –  $Pr=0,2$

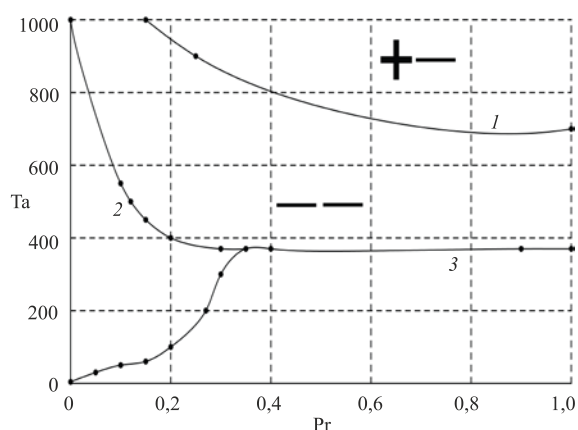
Расчёты показали, что монотонная мода для случая спиральных возмущений появляется при  $Ta = 4$  в диапазоне  $0 < Pr \leq 0,01$ . Таким образом, при очень слабом вращении она отсутствует. С ростом числа Тейлора граница существования моды расширяется по числу Прандтля (Рис. 1), и, например, при  $Ta = 370$  правая граница соответствует  $Pr = 0,3$  (Рис. 2). При фиксированном числе Прандтля с увеличением числа Тейлора течение дестабилизируется (уменьшается критическое число Грасгофа), а затем с достижением его порогового значения течение начинает стабилизироваться (наблюдается рост критического числа Грасгофа). Таким образом, можно выделить зоны дестабилизации и стабилизации адвективного течения по числу Тейлора. Отметим, что с ростом числа  $Pr$  пороговое число Тейлора увеличивается (Рис. 2). Например, при  $Pr = 0,01$  минимальное значение

$Gr_c = 830,54$  достигается для  $Ta = 70$ , при  $Pr = 0,05$  —  $Gr_c = 1074,41$  для  $Ta = 100$ , при  $Pr = 0,1$  —  $Gr_c = 1438,85$  для  $Ta = 150$  и при  $Pr = 0,2$  —  $Gr_c = 2662,03$  для  $Ta = 200$  (Рис. 3). Описанное выше семейство и названо здесь первой гидродинамической модой. Отметим, что при  $Ta \geq 370$  данное семейство также присутствует, но оно уже начинает вытесняться новым семейством монотонных мод, которое появляется при  $Ta = 370$  в диапазоне  $0,3 < Pr \leq 1$  для значений волнового числа  $k_y \leq 0,2$  и соответствует критическому числу Грасгофа. Это семейство именуется в данной работе как вторая гидродинамическая мода, поведение которой имеет ряд различий по сравнению с первой гидродинамической модой.

В результате анализа первой гидродинамической моды было установлено, что для каждого фиксированного  $Ta$  из диапазона  $4 \leq Ta \leq 500$  с ростом  $Pr$  увеличивается критическое число Грасгофа (Рис. 4). С ростом  $Ta$  в диапазоне  $370 \leq Ta \leq 500$  гидродинамические моды ведут себя в зависимости от числа  $Pr$  противоположно друг другу: у первой моды имеет место сужение, а у второй моды — расширение границ существования. В результате правая граница первой моды смыкается с левой границей второй моды (Рис. 5). При фиксированном значении числа Тейлора из диапазона  $Ta \geq 370$  с ростом числа Прандтля вторая мода сначала дестабилизирует адвективное течение, а затем стабилизирует его для любых значений числа Тейлора из диапазона существования второй моды  $370 \leq Ta \leq 10^5$ . Критическое число Грасгофа достигает своего максимального значения на границе между первой и второй гидродинамическими модами. Правая граница первой моды при  $Ta = 500$  становится по числу Прандтля равной  $Pr = 0,1$  (Рис. 2 и 5).



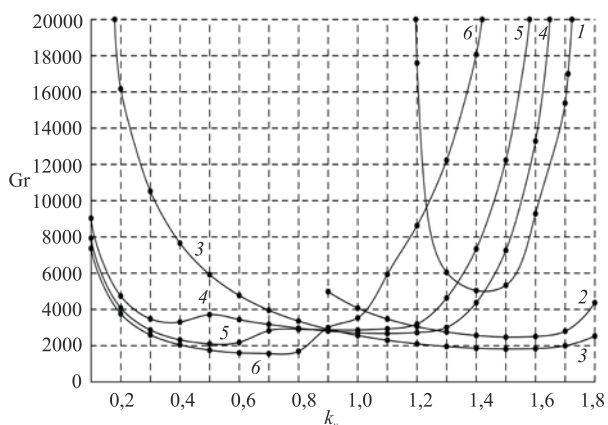
**Рис. 4.** Зависимость критического числа Грасгофа от числа Прандтля при  $Ta = 500$ : 1 – первая гидродинамическая мода, 2 – вторая гидродинамическая мода



**Рис. 5.** Зоны дестабилизации (–) и стабилизации (+) второй гидродинамической моды по числам Тейлора и Прандтля; 1 – линия пороговых чисел Тейлора второй гидродинамической моды; 2 – граница между первой и второй гидродинамическими модами; 3 – граница между гидродинамическими и колебательными модами

Было выявлено, что при фиксированном значении числа Тейлора из диапазона  $500 \leq Ta < 600$  с ростом  $Pr$  первая мода сначала дестабилизирует течение, а затем с достижением  $Pr$  порогового значения начинает стабилизировать его. Таким образом, можно выделить зоны дестабилизации и стабилизации адвективного течения по числу Прандтля. Но в диапазоне  $600 \leq Ta < 1000$  первая мода только дестабилизирует течение по  $Pr$ . С ростом  $Ta$  при  $500 \leq Ta < 1000$  диапазон существования первой моды по числу Прандтля сужается. В результате при  $Ta = 1000$  первая гидродинамическая мода полностью пропадает, а левая граница второй моды достигает своего минимального значения при  $Pr = 0$  (Рис. 5). На отрезке значений  $4 \leq Ta \leq 10^5$  при  $0 < Pr \leq 20$  граница второй моды достигает своего максимального значения по числу Прандтля  $Pr = 20$  при  $Ta = 2500$ .

При фиксированном значении числа Прандтля обе гидродинамические моды имеют пороговые числа Тейлора (Рис. 2 и 5). Так, при числе  $Pr$  из диапазона  $0 < Pr \leq 0,3$  существуют обе гидродинамические моды, и возникает следующая ситуация: с ростом  $Ta$  течение сначала дестабилизируется; после преодоления порогового числа Тейлора для первой гидродинамической моды течение начинает стабилизироваться; затем возникает вторая мода, которая вновь вносит в течение неустойчивость, но после преодоления порогового числа Тейлора, отвечающего второй гидродинамической моде, течение снова стабилизируется (Рис. 3). Отметим, что с ростом  $Pr$  пороговое число Тейлора второй моды сначала уменьшается, а затем переходит в фазу роста (Рис. 5). Далее в таблице представлены пороговые числа Тейлора второй моды для различных значений числа Прандтля. Величина порогового  $Ta$  для первой моды принимает своё минимальное значение  $Ta = 70$  при  $Pr = 0,01$ , а для второй моды —  $Ta = 800$  при  $Pr = 1$ .



**Рис. 6.** Нейтральные кривые при  $Pr = 0,15$ : 1 – при  $Ta = 60$ , 2 – при  $Ta = 80$ , 3 – при  $Ta = 150$ , 4 – при  $Ta = 450$ , 5 – при  $Ta = 500$  и 6 – при  $Ta = 600$

Таблица. Пороговые числа Тейлора второй монотонной моды в зависимости от числа Прандтля

$Pr$	Пороговое число $Ta$	$Gr_c$
0,05	5000	4303,10
0,10	1500	1890,03
0,20	1000	997,06
0,25	900	834,75
1,00	700	346,47
6,70	2000	145,39
10,00	2500	122,32
20,00	5000	101,23



При фиксированном значении числа Прандтля из диапазона  $Pr \leq 0,1$  первая монотонная мода более опасна, чем вторая мода, а при  $0,1 < Pr \leq 0,3$  вторая мода опаснее первой (Рис. 3). При фиксированном значении числа Тейлора вторая мода опаснее первой моды во всём диапазоне одновременного существования обеих мод  $370 \leq Ta \leq 1000$  (Рис. 4).

Диапазон чисел Прандтля и Тейлора, при которых существуют первая и вторая гидродинамические моды, делится на части (Рис. 2 и 5). Для каждой из частей указаны два знака. Если первый знак «+», то эта часть входит в зону стабилизации по числу Тейлора, если «-», то в зону дестабилизации. Вторым знаком аналогично указывает на зону стабилизации или дестабилизации по числу Прандтля.

Для первой моды характерно, что при фиксированном значении  $Pr$  с ростом  $Ta$  волновое число  $k_y$ , соответствующее критическому числу Грасгофа, уменьшается в пределах  $0,5 < k_y < 2,0$ , а для второй моды наоборот — увеличивается. На рисунке 6 представлены нейтральные кривые для обеих монотонных мод неустойчивости для случая спиральных возмущений.

Обнаружено, что монотонные моды при спиральных возмущениях являются опаснее монотонных мод винтовых возмущений в диапазоне чисел Прандтля и Тейлора, за исключением некоторых небольших диапазонов значений  $Pr$  и  $Ta$ .

## 5. Заключение

Изучено влияние вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами для случая спиральных нормальных возмущений. Обнаружены две новые наиболее опасные для течения гидродинамические монотонные моды неустойчивости. Они возникают при наличии вращения. Первая монотонная мода появляется при  $Ta = 4$ , а вторая мода — при  $Ta = 370$ . С ростом значения числа  $Ta$  граница существования монотонных мод расширяется по числу Прандтля.

Определено влияние чисел Прандтля и Тейлора на значения критического числа Грасгофа. При любом фиксированном  $Ta$  с ростом величины числа Прандтля вторая мода сначала дестабилизирует адвективное течение, а затем стабилизирует его. В этом заключается отличие второй моды от первой, которая ведёт себя более сложным образом. При  $Pr \leq 0,1$  первая мода опаснее второй моды (критические числа Грасгофа первой моды меньше критических чисел Грасгофа второй моды при соответствующих  $Ta$  и  $Pr$ ), а при  $0,1 < Pr \leq 0,3$  вторая мода опаснее первой.

При любых фиксированных значениях числа Прандтля обе монотонные моды имеют пороговые числа Тейлора. Величина порогового  $Ta$  зависит от числа  $Pr$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-96001-р\_урал\_а).

## Литература

1. *Остроумов Г.А.* Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М.: Гостехтеориздат, 1952. – 286 с.
2. *Бирх Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. – 1966. – № 3. – С. 69-72. (English version DOI).
3. *Андреев В.К.* Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: Препринт № 1-10 / ИВМ СО РАН. – Красноярск, 2010. – 68 с.
4. *Андреев В.К., Бекежанова В.Б.* Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 3-20. (English version DOI).
5. *Сагитов Р.В., Шарифулин А.Н.* Устойчивость стационарной тепловой конвекции в наклоняемой прямоугольной полости в маломодовом приближении // Теплофизика и аэромеханика. – 2008. – Т. 15, № 2. – С. 247-256. DOI
6. *Сагитов Р.В., Шарифулин А.Н.* Длинноволновая неустойчивость адвективного течения в наклонном слое жидкости с идеально теплопроводными границами // ПМТФ. – 2011. – Т. 52, № 6. – С. 13-21. (English version DOI).
7. *Шварц К.Г.* Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // МЖГ. – 2014. – № 4. – С. 26-30. (English version DOI).
8. *Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M.* On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers // Microgravity Q. – 1992. – Vol. 2, no. 3. – P. 141-151.
9. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
10. *Аристов С.Н., Зимин В.Д.* Адвективные волны во вращающемся шаровом слое: Препринт № 145 / ИМСС, Уральский научный центр, АН СССР. – Свердловск, 1986. – 50 с.
11. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизотермической вращающейся жидкости // МЖГ. – 1988. – № 4. – С. 48-55. (English version DOI).
12. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препринт № 146 / ИМСС, Уральский научный центр, АН СССР. – Свердловск, 1987. – 48 с.
13. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2006. – 154 с.
14. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Крупномасштабные адвективные течения во вращающейся стратифицированной жидкости // Вестник ПГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 1997. – № 1. – С. 77-83.

15. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Нестационарные адвективные течения во вращающейся жидкости // Вестник ПГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 1997. – № 1. – С. 84-99.
16. Шварц К.Г. Исследование устойчивости адвективных течений во вращающемся слое жидкости // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 1(13). – С. 54-61.
17. Тарунин Е.Л., Шварц К.Г. Исследование линейной устойчивости адвективного течения методом сеток // ЖВТ. – 2001. – Т. 6, № 6. – С. 108-117.
18. Шварц К.Г. Влияние вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости при малом значении числа Прандтля // МЖГ. – 2005. – № 2. – С. 29-38. (English version [DOI](#)).
19. Чукулаев Д.Г., Шварц К.Г. Исследование линейной устойчивости адвективного течения во вращающемся горизонтальном слое жидкости с твёрдыми границами методом дифференциальной прогонки // Вестник ПГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 3. – С. 42-46.
20. Чукулаев Д.Г., Шварц К.Г. Влияние слабого вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости с твёрдыми границами при малых числах Прандтля // Вестник ПГУ. Серия: Физика. – 2012. – № 4. – С. 188-192.
21. Чукулаев Д.Г., Шварц К.Г. Численное исследование влияния быстрого вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твёрдыми границами при малых числах Прандтля // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 135-141. [DOI](#)
22. Чукулаев Д.Г., Шварц К.Г. Влияние вращения на устойчивость адвективного течения в горизонтальном слое жидкости с твёрдыми границами при малых числах Прандтля // МЖГ. – 2015. – № 2. – С. 41-49. (English version [DOI](#)).
23. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Influence of rotation on the stability of an advective flow in a horizontal fluid layer with rigid boundaries // Sixth International Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics, 15-17 July 2015. Books of Abstracts. – ESPCI Paris, France, 2015. – p. 146.
24. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
25. Мызников В.М. Об устойчивости стационарного адвективного движения жидкости в плоском горизонтальном слое со свободной границей // Конвективные течения / Под ред. Е.М. Жуховицкого. – Пермь: Пермский педагогический институт, 1979. – № 1. – С. 52-57.
26. Чукулаев Д.Г. Интерактивная система исследования устойчивости адвективных течений во вращающемся слое жидкости // Сборник материалов межрегиональной науч.-практ. конф. ММВТ-2012, Киров, ВятГУ, 6-7 декабря 2012 г. – С. 152-156.

## References

1. Ostroumov G.A. *Free convection under the condition of the internal problem*. NASA TM, 1958.
2. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43-47. [DOI](#)
3. Andreev V.K. *Reshenie Birikha uravnenij konveksii i nekotorye ego obobshcheniya* [Birikh solution of convection equations and some of its generalizations]. Preprint No 1-10, Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, 2010. 68 p.
4. Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Stability of non-isothermal fluids (Review). *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 171-184. [DOI](#)
5. Sagitov R.V., Sharifulin A.N. Stability of steady thermal convection in a tilted rectangular cavity in low-mode approximation. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2008, vol. 15, no. 2, pp. 233-241. [DOI](#)
6. Sagitov R.V., Sharifulin A.N. The long-wave instability of an advective flow in an inclined fluid layer with perfectly heat-conducting boundaries. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 857-864. [DOI](#)
7. Schwarz K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, no. 4, pp. 438-442. [DOI](#)
8. Gershuni G.Z., Laure P., Myznikov V.M., Roux B., Zhukhovitsky E.M. On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers. *Microgravity Q.*, 1992, vol. 2, no. 3, pp. 141-151.
9. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M., Nepomnyashchy A.A. *Ustojchivost' konvektivnykh techenij* [Stability of convective flows]. Moscow: Nauka, 1989. 320 p.
10. Aristov S.N., Zimin V.D. *Advektivnye volny vo vrashchayushchemsya sharovom sloe* [Advective waves in a rotating spherical layer]. Preprint No. 145, Institute of Continuous Media Mechanics, Academy of Sciences USSR, Sverdlovsk, 1986. 50 p.
11. Aristov S.N., Frick P.G. Large-scale turbulence in thin layer of non-isothermal rotating fluid. *Fluid Dynamics*, 1988, vol. 23, no. 4, pp. 522-528. [DOI](#)
12. Aristov S.N., Frick P.G. *Dinamika krupnomasshtabnykh techenij v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Dynamics of large-scale flows in thin liquid layers]. Preprint No. 146, Institute of Continuous Media Mechanics, Academy of Sciences USSR, Sverdlovsk, 1987. 48 p.
13. Aristov S.N., Schwarz K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoj prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortices flows of the advective nature in a rotated layer]. Perm: Perm State University, 2006. 154 p.
14. Aristov S.N., Schwarz K.G. Krupnomasshtabnyye advektivnye techeniya vo vrashchayushchemsya stratifitsirovannoj zhidkosti [Large-scale advective flow in rotating stratified fluid]. *Vestnik PGU. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm State University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 1997, no. 1, pp. 77-83.
15. Aristov S.N., Schwarz K.G. Nestatsionarnyye advektivnye techeniya vo vrashchayushchemsya zhidkosti [Nonstationary advective flow in rotating fluid]. *Vestnik PGU. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm State University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 1997, no. 1, pp. 84-99.

16. Shvarts K.G. Investigation of the stability of advective flows in a rotating fluid layer. *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2013, no. 1 (13), pp. 54-61.
17. Tarunin E.L., Shvarts K.G. Issledovanie linejnoy ustojchivosti advektivnogo techeniya metodom setok [The advective flow linear stability investigation by grid method]. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational Technologies*, 2001, vol. 6, no. 6, pp. 108-117.
18. Schwarz K.G. Effect of rotation on the stability of advective flow in a horizontal fluid layer at a small Prandtl number. *Fluid Dynamics*, 2005, vol. 40, no. 2, pp.193-201. DOI
19. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Issledovanie linejnoy ustojchivosti advektivnogo techeniya vo vrashchayushchemsya gorizont'al'nom sloe zhidkosti s tvyordymi granitsami metodom differentsial'noj prigonki [Investigation of the advective flow linear stability in rotated horizontal liquid layer with solid boundaries by differential sweep method]. *Vestnik PGU. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm State University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2011, no. 3, pp. 42-46.
20. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Vliyanie slabogo vrashcheniya na ustojchivost' advektivnogo techeniya v gorizont'al'nom sloe zhidkosti s tvyordymi granitsami pri malykh chislakh Prandtlya [The effect of slow rotation on the stability of advective flow in a horizontal fluid layer with rigid boundaries at small Prandtl numbers]. *Vestnik PGU. Seriya: Fizika. – Bulletin of Perm State University. Series: Physics*, 2012, no. 4, pp. 188-192.
21. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Numerical study of the fast rotation effect on the stability of advective flow in a horizontal fluid layer with rigid boundaries at small Prandtl numbers. *Vycisl. meh. splos. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 135-141. DOI
22. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Effect of rotation on the stability of advective flow in a horizontal liquid layer with solid boundaries at small Prandtl numbers. *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 215-222. DOI
23. Chikulaev D.G., Shvarts K.G. Influence of rotation on the stability of an advective flow in a horizontal fluid layer with rigid boundaries. *Sixth International Symposium on Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics, 15-17 July 2015. Books of Abstracts, ESPCI Paris, France, 2015, p. 146.*
24. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective stability of incompressible liquid*. Jerusalem: Wiley, Keter Press, 1976.
25. Myznikov V.M. Ob ustojchivosti statsionarnogo advektivnogo dvizheniya zhidkosti v ploskom gorizont'al'nom sloe so svobodnoj granitsej [About the stability of steady advection of fluid motion in a plane horizontal layer with free boundary]. *Konvektivnyye techeniya [The convective flow]*, ed. by E.M. Zhukhovitskii. Perm: Perm Pedagogical Institute, 1979, no. 1, pp. 52-57.
26. Chikulaev D.G. Interaktivnaya sistema issledovaniya ustojchivosti advektivnykh techenij vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti [Interactive system for investigation of the stability of advective flows in a rotating fluid layer]. *Proc. Conf. MMVT-2012, Kirov, Vyatka State University, 6-7 December 2012, pp. 152-156.*

Поступила в редакцию 03.09.2015; опубликована в электронном виде 30.03.2016

---

Сведения об авторах

Чикулаев Дмитрий Геннадьевич, асп., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, Пермь, ул. Букирева, д. 15; e-mail: mail@chikulaev.com

Шварц Константин Григорьевич, дфмн, проф., ПГНИУ; e-mail: kosch@psu.ru