

DOI: [10.7242/1999-6691/2016.9.1.2](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.1.2)

УДК 539.376

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ БАЛОК-СТЕНОК РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

Сформулирована задача изгибного деформирования слоистых металлокомпозитных балок-стенок регулярной структуры, работающих в условиях установившейся ползучести материалов всех слоев. Получены уравнения, позволяющие с различной степенью точности описывать напряженно-деформированное состояние в балке. Из этих уравнений в частных случаях следуют соотношения классической теории и два варианта теории Тимошенко. Для статически определимых балок разработана упрощенная теория. При различных температурах проведены конкретные расчеты механического поведения двухопорных балок-стенок, состоящих из двух типов металлокомпозитов с регулярно чередующимися слоями: медными и стальными; алюминиевыми и стальными. Показано, что в случае металлокомпозитов медь–сталь ни классическая теория, ни первый вариант теории Тимошенко не гарантируют надежных результатов по податливости конструкции даже в пределах 20%-ной точности, считающейся приемлемой при изучении механического поведения элементов конструкций в условиях ползучести. Обнаружено, что с увеличением температуры точность расчетов по традиционным теориям ухудшается, и при повышенных температурах для металлокомпозитов такого типа даже второй вариант теории Тимошенко не гарантирует требуемой точности. Расчеты балок из алюминий–сталь-композитов продемонстрировали, что по сравнению с «эталонным» расчетом классическая теория и оба варианта теории Тимошенко существенно (в разы и даже на порядки) занижают в подобных балках-стенках, работающих в условиях установившейся ползучести, как податливость, так и напряженно-деформированное состояние.

Ключевые слова: металлокомпозиты, слоистые балки-стенки, регулярная структура, установившаяся ползучесть, теория Тимошенко, теория Бернулли, уточненная теория изгиба

STUDY OF BENDING DEFORMATION OF LAYERED METAL-COMPOSITE WALL-BEAMS OF REGULAR STRUCTURE UNDER STEADY-STATE CREEP CONDITIONS

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

The problem of bending deformation is formulated for layered metal-composite wall-beams of regular structure during steady-state creep in the materials of all the layers. Equations describing the stress-strain state in a beam with different degrees of precision are obtained. Based on these equations, in special cases, the ratio of the classical theory and two variants of the Timoshenko theory are determined. A simplified version of the theory is developed for statically determinate beams. Specific calculations are carried out to evaluate at different temperatures the mechanical behavior of a double-seat deep beam consisting of two types of metal-composites: regularly alternating copper and steel layers, and alternating aluminum and steel layers. It is shown that, in the case of metal-composites copper/steel, neither the classical theory nor the first variant of the Timoshenko theory guarantee the reliability of the results for the compliance of the structure even within 20% accuracy considered acceptable to study the mechanical behavior of structural elements under creep conditions. It is found that with increasing temperature the accuracy of calculations according to traditional theories decreases, and for this type of metal composites even the second variant of the Timoshenko theory does not guarantee the required accuracy at elevated temperatures. Calculations of composite beams made of aluminum and steel show that, in comparison with standard simulations, the classical theory and both versions of the Timoshenko theory significantly reduce the ductility and stress-strain state in such wall-beams under steady-state creep conditions.

Key words: metal-composites, layered wall-beams, regular structure, steady-state creep, Timoshenko theory, Bernoulli theory, improved theory of bending

1. Введение

В последние десятилетия в инженерно-конструкторской деятельности широкое применение находят слоистые элементы конструкций регулярной структуры [1, 2 и другие], так как слоистость позволяет получить изделия с уникальными свойствами [3]. Современные технологии способны создавать такие слоистые конструкции из металлокомпозитов [4], которые все активнее внедряются в практику.

Известно, что при длительном нагружении конструкции из металлических материалов (в частности, металлокомпозитов) большую часть времени работают в условиях установившейся ползучести [5, 6]. Поэтому актуальной является проблема адекватного расчета слоистых металлокомпозитных тонкостенных элементов конструкций регулярной структуры, работающих в указанных условиях. Исследования различных вопросов изгибного деформирования в условиях ползучести тонкостенных элементов, изготовленных из традиционных конструкционных металлических материалов, проводились, например, в [7–9] и других. Теория же расчета изгибаемых металлокомпозитных балок, пластин и оболочек, в частности, регулярной слоистой структуры, работающих в условиях ползучести, находится пока

в состоянии становления. Так, в [10, 11] и других изучались вопросы изгибного деформирования слоистых и слоисто-волоконистых тонкостенных элементов металлоконструкций. Основные разрешающие соотношения в этих работах были построены в рамках классических теорий. Однако более поздние исследования [12–15] показали, что классическая теория не обеспечивает адекватных результатов при расчете установившейся ползучести изгибаемых слоистых и армированных металлокомпозитных пластин и балок-стенок регулярной по толщине структуры, так как не учитывает их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам.

Традиционно учет ослабленного сопротивления поперечным сдвигам тонкостенных элементов конструкций осуществляется на основе первого (см. [16] и другие) или второго (см. [1, 2, 17] и другие) вариантов теории Тимошенко, либо на базе теории Тимошенко–Рейсснера (см. [18, 19] и другие). Так, в [12–15] использованы гипотезы второго варианта теории Тимошенко. Однако там не был исследован вопрос, являются ли приемлемыми с инженерной точки зрения решения с учетом допущений этой теории, или требуется построение более адекватных теорий. Независимо от этого особый интерес вызывает и точность решений, обеспечиваемая в условиях установившейся ползучести первым вариантом теории Тимошенко, являющейся наиболее простой и часто применяемой из всех неклассических теорий.

В связи с вышеизложенным настоящее исследование посвящено построению уточненной теории изгибного деформирования в условиях установившейся ползучести слоистых металлокомпозитных балок-стенок регулярной структуры, из которой как частные случаи следуют классическая теория и оба варианта теории Тимошенко, а также сопоставлению решений, полученных в рамках классической теории, теорий типа Тимошенко и уточненных соотношений.

2. Постановка задачи

Рассматривается балка прямоугольного поперечного сечения (Рис. 1) длиной L , высотой $2h = \text{const}$ и толщиной $B = \text{const}$. Свяжем с балкой прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы плоскость Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) была срединной ($|x_3| \leq h$), а направление x_1 — продольным (осевым).

Предполагается, что: начальными деформациями можно пренебречь по сравнению с накопленными деформациями ползучести [7, 8]; прогибы малы; температура конструкции однородна; металлокомпозитная балка состоит из регулярно чередующихся изотропных слоев малой толщины, параллельных плоскости Ox_1x_2 ; материалы слоев равносопротивляются растяжению–сжатию; в поперечном направлении x_3 балка имеет квазиоднородную структуру; решение не зависит от переменной x_2 .

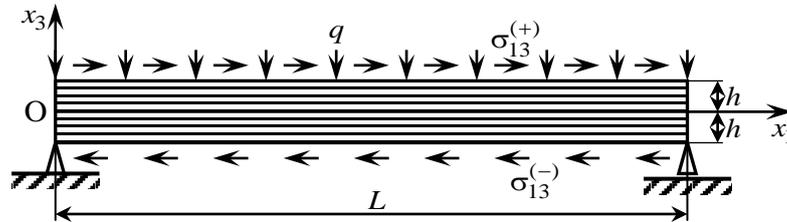


Рис. 1. Двухопорная слоистая балка-стенка регулярной структуры

Чтобы описать ослабленное сопротивление такой балки-стенки поперечному сдвигу в плоскости Ox_1x_3 , соответствующую скорость деформации установившейся ползучести ξ_{13} зададим следующим соотношением:

$$\xi_{13}(x_1, x_3) = \beta \left[\frac{x_3 + h}{2h} \xi_{13}^{(+)}(x_1) - \frac{x_3 - h}{2h} \xi_{13}^{(-)}(x_1) \right] + \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \xi_{13}^{(k)}(x_1), \quad |x_3| \leq h, \quad (1)$$

где β — параметр переключения; K — неотрицательное целое число, характеризующее количество слагаемых, удерживаемых в разложении функции ξ_{13} по степеням x_3 ; $\xi_{13}^{(\pm)}$, $\xi_{13}^{(k)}$ — функции осевой координаты $x_1 \in [0, L]$, имеющие смысл: $\xi_{13}^{(\pm)}$ — скорости сдвиговых деформаций на верхней и нижней ($x_3 = \pm h$) горизонтальных поверхностях балки. При $\xi_{13}^{(\pm)} \equiv 0$ функция $\xi_{13}^{(0)}$ характеризует скорость деформации ползучести поперечного сдвига в отсчетном слое ($x_3 = 0$). Если $\beta = 0$, $\xi_{13}^{(k)}(x_1) \equiv 0$ ($0 \leq k \leq K$), то далее получаются соотношения классической теории [7, 8]. Если же $K = 0$ и $\beta = 1$, то из (1) вытекают соотношения, соответствующие второму варианту теории Тимошенко [1, 2, 12, 17].

Случаю $K \geq 1$ и $\beta = 1$ отвечают различные уточнения второго варианта теории Тимошенко, а при $K = 0$ и $\beta = 0$ из (1) следуют соотношения первого варианта теории Тимошенко [16, 18, 19].

Пренебрегая обжатием балки в поперечном направлении x_3 , на основании дифференциальных соотношений Коши [7, 8]

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

при $i = j = 3$ и $\xi_{33} \equiv 0$ обнаруживается, что при ползучести скорость прогиба v_3 зависит только от осевой координаты x_1 .

На основании соотношений (1), (2) с учетом зависимости $v_3 = v_3(x_1)$ имеем

$$v_1(x_1, x_3) = v_1^0(x_1) - x_3 \frac{dv_3}{dx_1} + 2 \left[\sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \xi_{13}^{(k)}(x_1) + \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \xi_{13}^{(+)} - \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \xi_{13}^{(-)} \right], \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (3)$$

$$\xi_{11}(x_1, x_3) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{dv_1^0}{dx_1} - x_3 \frac{d^2 v_3}{dx_1^2} + 2 \left[\sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \frac{d\xi_{13}^{(k)}}{dx_1} + \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \frac{d\xi_{13}^{(+)}}{dx_1} - \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \frac{d\xi_{13}^{(-)}}{dx_1} \right], \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (4)$$

где $v_1^0(x_1)$ — скорость ползучести точек отсчетного слоя ($x_3 = 0$) в осевом направлении x_1 . Не названные выше, но входящие в (2) компоненты скорости деформаций ползучести ξ_{ij} либо тождественно равны нулю ($\xi_{12} = \xi_{23} \equiv 0$), либо однозначно определяются через ξ_{11} из условия несжимаемости материалов слоев и композиции в целом ($\xi_{22} = \xi_{33} = -\xi_{11}/2$). Таким образом, в равенствах (1), (3), (4) искомыми являются функции v_1^0 , v_3 , $\xi_{13}^{(\pm)}$, $\xi_{13}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$), зависящие только от одной осевой координаты x_1 .

Рассматриваемая задача обладает физической нелинейностью [5–8], поэтому для ее линеаризации, как и в [12, 20], применим метод секущего модуля [7]. Согласно методу, используя выражения для ξ_{11} , ξ_{13} (см. (1), (4)), можно найти осредненные напряжения в каждой точке балки (см. (29), (67) в [20]) на $(n+1)$ -й итерации:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{n+1}(x_1, x_3) &= a_{11}^{n+1} \xi_{11}^{n+1}, & |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L \quad (n = 0, 1, 2, \dots), & 1 \\ \sigma_{13}^{n+1}(x_1, x_3) &= a_{55}^{n+1} \xi_{13}^{n+1}, & & 2 \end{aligned} \quad (5)$$

где a_{11}^n , a_{55}^n — эффективные секущие модули слоистой композиции, известные всюду в балке из решения на предыдущей n -й итерации:

$$\begin{aligned} a_{11}^n(x_1, x_3) &= 3 \sum_{m=1}^M \omega_m g_m(H_m^n), & \frac{1}{a_{55}^n(x_1, x_3)} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{\omega_m}{g_m(H_m^n)}, \\ H_m^n(x_1, x_3) &= \sqrt{3 \bar{\xi}_{11}^{(m)n} \bar{\xi}_{11}^{(m)n} + 4 \bar{\xi}_{13}^{(m)n} \bar{\xi}_{13}^{(m)n}} \quad (m = 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (6)$$

M — количество различных материалов слоев композиции; ω_m — относительное объемное содержание слоев с m -м материалом в пределах репрезентативной ячейки металлокомпозиции; $\bar{\xi}_{11}^{(m)n}$, $\bar{\xi}_{13}^{(m)n}$ и H_m^n — известные n -е приближения скоростей деформаций ползучести и интенсивности скоростей деформации сдвига в m -й фазе композиции; $g_m(H_m^n)$ — экспериментально устанавливаемая функция, являющаяся коэффициентом пропорциональности между интенсивностью скоростей деформаций сдвига H_m^n и интенсивностью касательных напряжений $T_m = g_m(H_m^n) H_m^n$ ($1 \leq m \leq M$), то есть $g_m(H_m^n)$ — секущий модуль.

Соотношения (5), (6) — это частный случай общих определяющих уравнений из [20], получающиеся с учетом равенств $\bar{\xi}_{12}^{(m)n} = \bar{\xi}_{23}^{(m)n} = 0$ (так как в балке-стенке $\sigma_{12}^{(m)} = \sigma_{23}^{(m)} \equiv 0$) и $\bar{\xi}_{22}^{(m)n} \approx \bar{\xi}_{33}^{(m)n} \approx -\bar{\xi}_{11}^{(m)n}/2$. Последние,

приближенные равенства, являются следствием условия несжимаемости материалов фаз композиции, работающих в условиях установившейся ползучести ($\bar{\xi}_{11}^{(m)} + \bar{\xi}_{22}^{(m)} + \bar{\xi}_{33}^{(m)} = 0$) [7], а также равенства $\sigma_{22}^{(m)} \equiv 0$ и традиционного для тонкостенных элементов конструкций допущения $|\sigma_{11}^{(m)}| \gg |\sigma_{33}^{(m)}|$ ($1 \leq m \leq M$) [см. 1, 2, 7, 8, 10–20].

Соотношения (1), (4), (5) с учетом (6) позволяют вычислить $(n+1)$ -е приближения внутренних силовых факторов:

$$M_{11}^{(l)}(x_1) = B \int_{-h}^h \sigma_{11}^{(l)} x_3^l dx_3 = A_{11}^{(l)} \frac{d^{n+1}}{dx_1^{n+1}} v_1^0 - B_{11}^{(l)} \frac{d^{n+1}}{dx_1^{n+1}} v_3 + 2 \sum_{k=0}^K C_{11}^{(l,k)} \frac{d^{n+1}}{dx_1^{n+1}} \xi_{13}^{(k)} + 2 D_{11}^{(l)} \frac{d^{n+1}}{dx_1^{n+1}} \xi_{13}^{(+)} - 2 E_{11}^{(l)} \frac{d^{n+1}}{dx_1^{n+1}} \xi_{13}^{(-)} \quad (l = 0, 1, \dots, K/2 + 1), \quad 1 \quad (7)$$

$$M_{13}^{(l)}(x_1) = B \int_{-h}^h \sigma_{13}^{(l)} x_3^l dx_3 = \sum_{k=0}^K A_{55}^{(l,k)} \xi_{13}^{(k)}(x_1) + D_{55}^{(l)} \xi_{13}^{(+)} - E_{55}^{(l)} \xi_{13}^{(-)} \quad (l = 0, 1, \dots, K/2, \quad 0 \leq x_1 \leq L), \quad 2$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^{(l)}(x_1) &= B \int_{-h}^h a_{11}^{(l)} x_3^l dx_3, & B_{11}^{(l)}(x_1) &= B \int_{-h}^h a_{11}^{(l)} x_3^{l+1} dx_3, & D_{11}^{(l)}(x_1) &= \beta B \int_{-h}^h a_{11}^{(l)} \frac{x_3^{l+1}}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) dx_3, \\ E_{11}^{(l)}(x_1) &= \beta B \int_{-h}^h a_{11}^{(l)} \frac{x_3^{l+1}}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) dx_3, & C_{11}^{(l,k)}(x_1) &= B \int_{-h}^h a_{11}^{(l,k)} \frac{x_3^{l+k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) dx_3 \quad (0 \leq l \leq K/2 + 1), \\ A_{55}^{(l,k)}(x_1) &= B \int_{-h}^h a_{55}^{(l,k)} \frac{x_3^{l+k}}{h^2} (h^2 - \beta x_3^2) dx_3, & D_{55}^{(l)}(x_1) &= \beta B \int_{-h}^h a_{55}^{(l)} \frac{x_3^l}{2h} (x_3 + h) dx_3, \\ E_{55}^{(l)}(x_1) &= \beta B \int_{-h}^h a_{55}^{(l)} \frac{x_3^l}{2h} (x_3 - h) dx_3 \quad (0 \leq l \leq K/2, \quad 0 \leq k \leq K), \\ C_{11}^{(l,k)} &= C_{11}^{(k,l)}, & A_{55}^{(l,k)} &= A_{55}^{(k,l)}, & A_{11}^{(l+1)} &= B_{11}^{(l)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее K — четное число. Согласно (7) $M_{11}^{(0)} \equiv F_{11}^{(0)}$, $M_{13}^{(0)} \equiv F_{13}^{(0)}$ — продольная и поперечная силы,

$M_{11}^{(1)}$ — изгибающий момент, а остальные силовые факторы есть моменты высших порядков.

Используя дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи механики деформируемого твердого тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} &= -X_1 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} &= -X_3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} |x_3| \leq h, & \quad 0 \leq x_1 \leq L, \\ & \quad 2 \end{aligned} \quad 1 \quad (9)$$

где X_1 , X_3 — компоненты объемной нагрузки, действующей на материал металлокомпозиции, получим все необходимые уравнения равновесия балки, которым удовлетворяют введенные силовые факторы (7). Для этого умножим (9) на Bx_3^l и проинтегрируем по высоте балки; тогда с учетом (7) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} M_{11}^{(l)} - l M_{13}^{(l-1)} &= -X_1^{(l)} - Bh^l \left[\sigma_{13}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{13}^{(-)} \right] \quad (0 \leq l \leq K/2 + 1), \\ \frac{d}{dx_1} M_{13}^{(l)} &= -X_3^{(l)} + l B \int_{-h}^h x_3^{l-1} \sigma_{33}^{(l)} dx_3 - Bh^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \quad (0 \leq l \leq K/2), \end{aligned} \quad 1 \quad (10)$$

где

$$X_i^{(l)} = B \int_{-h}^h X_i x_3^l dx_3 \quad (i = 1, 3), \quad \sigma_{33}^{(\pm)} = \sigma_{33}(x_1, \pm h), \quad \sigma_{13}^{(\pm)} = \sigma_{13}(x_1, \pm h) \quad (11)$$

(при выводе равенств (10) прибегали к интегрированию по частям). В (11) напряжения $\sigma_{33}^{(\pm)}$, $\sigma_{13}^{(\pm)}$ известны из статических граничных условий, заданных на горизонтальных плоскостях балки-стенки $x_3 = \pm h$

(например, на рисунке 1 $\sigma_{33}^{(-)} = 0$, $\sigma_{33}^{(+)} = -q = \text{const}$). Приближение же напряжения σ_{33}^n в равенстве (10)₂ уже найдено из решения на предыдущей n -й итерации. Поэтому интеграл в этом соотношении перенесен вправо.

Напряжение σ_{33} по переменной x_3 можно аппроксимировать полиномами Эрмита, так как высота балки предполагается не слишком большой ($2h/L \ll 1$). В качестве начального приближения возьмем кубический полином, который представим через полученные значения $\sigma_{33}^{(\pm)}$ и $(\partial\sigma_{33}/\partial x_3)|_{x_3=\pm h} = -X_3(x_1) - (\partial\sigma_{13}^{(\pm)}/\partial x_1)$ (см. равенство (9)₂). Так, при $X_3 \equiv 0$, $\sigma_{13}^{(\pm)} \equiv 0$ имеем:

$$\sigma_{33} = -\frac{\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}}{4h^3} x_3 (x_3^2 - 3h^2) + \frac{\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}}{2}. \quad (12)$$

Дальнейшее уточнение выражения σ_{33}^n (после стабилизации метода секущего модуля) возможно за счет применения полиномов Эрмита более высоких порядков, основанных не только на значениях $\sigma_{33}^{(\pm)}$ и $(\partial\sigma_{33}/\partial x_3)|_{x_3=\pm h}$ как в равенстве (12), но и на дополнительных значениях $\partial\sigma_{33}^n/\partial x_3$, известных на n -й итерации во внутренних точках балки $x_3 \in (-h, h)$. Эти дополнительные значения вновь определяются на основании (9)₂ при замене всех напряжений их n -ми приближениями и использовании аналога равенства (5)₂, то есть при замене σ_{13}^n на $a_{55}^n \xi_{13}^n$, где значения a_{55}^n , ξ_{13}^n предполагаются уже найденными на предыдущей n -й итерации. Чем больше промежуточных значений $\partial\sigma_{33}^n/\partial x_3$ привлекается, тем точнее аппроксимация напряжения σ_{33}^n полиномами Эрмита высоких порядков.

Подставив найденную аппроксимацию σ_{33}^n в равенства (10) (например, (12) в (10)), на рассматриваемой $(n+1)$ -й итерации, с учетом (11), получим систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно $M_{11}^{(l)}$, $M_{13}^{(l)}$ с известными правыми частями. К этой системе нужно добавить два граничных условия на верхней и нижней горизонтальных поверхностях балки (см. (5)):

$$\sigma_{13}^{(\pm)}(x_1) = a_{55}^{(\pm)}(x_1) \xi_{13}^{(\pm)}(x_1), \quad a_{55}^{(\pm)}(x_1) \equiv a_{55}^n(x_1, \pm h), \quad (13)$$

из которых следует, что

$$\xi_{13}^{(\pm)}(x_1) = \sigma_{13}^{(\pm)}(x_1) / a_{55}^{(\pm)}(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (14)$$

то есть на текущей $(n+1)$ -й итерации приближения для функций $\xi_{13}^{(\pm)}(x_1)$ в равенствах (1), (3), (4), (7) определены.

Заметим, что, согласно (1), при $\beta=1$ удается выполнить граничные условия (13) (в частности, это возможно в рамках второго варианта теории Тимошенко), а при $\beta=0$ (то есть в рамках первого варианта теории Тимошенко и классической теории Бернулли) этого сделать нельзя.

Подстановка выражений для внутренних силовых факторов (7) в уравнения (10) приводит к следующей системе разрешающих уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \left(A_{11}^{(l)} \frac{d}{dx_1} v_1^{n+1} - B_{11}^{(l)} \frac{d^2}{dx_1^2} v_3^{n+1} + 2 \sum_{k=0}^K C_{11}^{(l,k)} \frac{d}{dx_1} \xi_{13}^{(k)} \right) - l \sum_{k=0}^K A_{55}^{(l-1,k)} \xi_{13}^{(k)} &= -Y_1^{(l)}(x_1) \quad (0 \leq l \leq K/2 + 1), \\ \frac{d}{dx_1} \sum_{k=0}^K A_{55}^{(l,k)} \xi_{13}^{(k)} &= -Y_3^{(l)}(x_1) \quad (0 \leq l \leq K/2, \quad 0 \leq x_1 \leq L), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} Y_1^{(l)}(x_1) &\equiv X_1^{(l)} + Bh^l [\sigma_{13}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{13}^{(-)}] + 2 \frac{d}{dx_1} \left(D_{11}^{(l)} \frac{d}{dx_1} \xi_{13}^{(+)} - E_{11}^{(l)} \frac{d}{dx_1} \xi_{13}^{(-)} \right) - l \left(D_{55}^{(l-1)} \frac{d}{dx_1} \xi_{13}^{(+)} - E_{55}^{(l-1)} \frac{d}{dx_1} \xi_{13}^{(-)} \right), \\ Y_3^{(l)}(x_1) &\equiv X_3^{(l)} + lB \int_{-h}^h x_3^{l-1} \sigma_{33}^n dx_3 - Bh^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] + \frac{d}{dx_1} \left(D_{55}^{(l)} \frac{d}{dx_1} \xi_{13}^{(+)} - E_{55}^{(l)} \frac{d}{dx_1} \xi_{13}^{(-)} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Согласно (11), (14), (16) правые части в (15) установлены, при этом система (15) замкнута относительно искомых функций $v_1^{n+1}(x_1)$, $v_3^{n+1}(x_1)$, $\xi_{13}^{n+1}(x_1)$ ($0 \leq k \leq K$). Для однозначного интегрирования этой системы необходимо использовать граничные условия, которые получим из следующих соображений.

Если на незакрепленном торце балки с координатой $x_1 = x_1^*$ заданы напряжения

$$\sigma_{11}(x_1^*, x_3) = \sigma_{11}^*(x_3), \quad \sigma_{13}(x_1^*, x_3) = \sigma_{13}^*(x_3), \quad |x_3| \leq h, \quad (17)$$

где σ_{11}^* , σ_{13}^* — известные функции, то равенства (17) будем выполнять лишь в интегральном смысле, то есть умножать их на Bx_3^l и интегрировать по высоте балки. В конечном итоге с учетом (7) имеем

$$\begin{aligned} M_{11}^{(l)}(x_1^*) &= M_{11}^{*(l)} & (l = 0, 1, \dots, K/2 + 1), & \quad 1 \\ M_{13}^{(l)}(x_1^*) &= M_{13}^{*(l)} & (l = 0, 1, \dots, K/2), & \quad 2 \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$M_{11}^{*(l)} = B \int_{-h}^h \sigma_{11}^*(x_3) x_3^l dx_3, \quad M_{13}^{*(l)} = B \int_{-h}^h \sigma_{13}^*(x_3) x_3^l dx_3. \quad (19)$$

Таким образом, в соответствии с (17), (19) $M_{11}^{*(l)}$, $M_{13}^{*(l)}$ — это известные значения на конце балки $x_1 = x_1^*$, например на свободном конце $M_{11}^{*(l)} = 0$, $M_{13}^{*(l)} = 0$. Подставив выражения (7) в равенства (18), получим необходимые статические граничные условия в разрешающем виде, которые здесь не приводятся. Если же торец балки ($x_1 = x_1^*$) закреплен, то на нем заданы кинематические граничные условия

$$v_3(x_1^*) = v_3^*, \quad (20)$$

$$v_1(x_1^*, x_3) = v_1^*(x_3), \quad |x_3| \leq h, \quad (21)$$

где v_3^* , $v_1^*(x_3)$ — известные скорости прогиба ползучести и осевых смещений точек поверхности $x_1 = x_1^*$ соответственно.

Так как разложение (3) является конечным, равенство в (21) в общем случае нельзя удовлетворить, поэтому кинематические условия (21) также будем выполнять в интегральном смысле (как и в [12]). Для этого проинтегрируем (21) по переменной x_3 с весом x_3^l , тогда с учетом (3) будем иметь

$$\left\{ \frac{1}{l+1} (1 - (-1)^{l+1}) v_1^{n+1} - \frac{h}{l+2} (1 - (-1)^{l+2}) \frac{d}{dx_1} v_3^{n+1} + 2 \sum_{k=0}^K h^{k+1} \left[\frac{1}{(k+1)(l+k+2)} (1 - (-1)^{l+k+2}) - \frac{\beta}{(k+3)(l+k+4)} (1 - (-1)^{l+k+4}) \right] \xi_{13}^{n+1} \right\}_{x_1=x_1^*} = V_1^{*(l)}, \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} V_1^{*(l)} &\equiv \frac{1}{h^{l+1}} \int_{-h}^h v_1^*(x_3) x_3^l dx_3 - \beta h \left[\frac{1}{2(l+3)} (1 - (-1)^{l+3}) + \frac{1}{l+2} (1 - (-1)^{l+2}) \right] \xi_{13}^{n+1}(x_1^*) + \\ &+ \beta h \left[\frac{1}{2(l+3)} (1 - (-1)^{l+3}) - \frac{1}{l+2} (1 - (-1)^{l+2}) \right] \xi_{13}^{n+1(-)}(x_1^*). \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно (14), (21), (23) $V_1^{*(l)}$ — известные значения на закрепленном конце балки $x_1 = x_1^*$. Соотношения (20), (22) являются искомыми кинематическими граничными условиями в рассматриваемой задаче. В частности, при жесткой заделке торца $x_1 = x_1^*$ в (20), (23) следует принять $v_3^* = 0$, $v_1^*(x_3) \equiv 0$.

На концах балки могут быть заданы и смешанные, составленные из (18), (20), (22) граничные условия. Так, шарнирное опирание моделируется соотношением (20) и равенством (18)₁ при $0 \leq l \leq K+1$.

В случае статически определимых балок, который далее и рассматривается, силовые факторы $M_{11}^{(0)} \equiv F_{11}$, $M_{11}^{(1)}$, $M_{13}^{(0)} \equiv F_{13}$ (см. (7)) заранее установлены. При этом в рамках классической теории ($K = 0$)

равенство $(7)_2$ не используется, а из равенств $(7)_1$ (при $l=0, 1$, $\xi_{13}^{(k)} \equiv 0$, $0 \leq k \leq K=0$) находятся производные $\frac{d^{n+1}}{dx_1} v_1^0$, $\frac{d^2}{dx_1^2} v_3$, после интегрирования которых получается искомое решение на данной $(n+1)$ -й итерации.

При применении же теорий типа Тимошенко ($K=0$) соотношение $(7)_2$ разрешаем относительно функции $\xi_{13}^{(0)}(x_1)$, после чего из $(7)_1$ ($l=0, 1$) вычисляем указанные производные. Следовательно, при обоих вариантах теории Тимошенко ход решения рассматриваемых задач полностью совпадает, различаются только числовые значения коэффициентов (8) при $\beta=0$ или $\beta=1$.

При исследовании статически определимых балок можно прибегнуть к упрощенному варианту уточненной теории, сложность реализации которого сопоставима с трудностями, возникающими при теориях типа Тимошенко. С этой целью примем, что равенства $(7)_2$, $(10)_2$ выполняются при $0 \leq l \leq K$, а $(7)_1$, $(10)_1$ — при $l=0, 1$. В этом случае соотношение $(10)_2$ при каждом l является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно $M_{13}^{(l)}$. Для однозначного интегрирования данного уравнения необходимо одно краевое условие. В некоторых характерных случаях это условие легко формулируется. Например, в случае двухопорной балки, изображенной на рисунке 1, в силу симметрии ее закрепления и нагружения при $\sigma_{13}^{(\pm)} \equiv 0$ в центральном сечении $\sigma_{13}(L/2, x_3) = 0$, $|x_3| \leq h$, а значит, на основании $(7)_2$ имеем $M_{13}^{(l)}(L/2) = 0$. Это равенство при каждом l и является необходимым краевым условием для интегрирования уравнения $(10)_2$. При рассмотрении консольной балки необходимое краевое условие совпадает с соотношением $(18)_2$ при $0 \leq l \leq K$.

Если уравнение $(10)_2$ с учетом найденного краевого условия проинтегрировано по x_1 на $(n+1)$ -й итерации, то в балке известны приближения функций $M_{13}^{(l)}(x_1)$ ($0 \leq l \leq K$), и равенства $(7)_2$ при $0 \leq l \leq K$ образуют замкнутую СЛАУ относительно $\xi_{13}^{(k)}$, из которой можно вычислить все функции $\xi_{13}^{(k)}(x_1)$ ($0 \leq k \leq K$), входящие в разложение (1). Зная $\xi_{13}^{(k)}(x_1)$, из равенства $(7)_1$ при $l=0, 1$, как из СЛАУ, можно вычислить производные $\frac{d^{n+1}}{dx_1} v_1^0$, $\frac{d^2}{dx_1^2} v_3$, после чего задача решается так же, как и в рамках теорий типа Тимошенко.

3. Обсуждение результатов расчетов

В качестве примеров рассмотрим изгибное деформирование балки длиной $L=1$ м, (Рис. 1), при разной высоте $2h$. Продольные нагрузки отсутствуют ($\sigma_{13}^{(\pm)} \equiv 0$); конструкция равномерно нагрета до разных температур, близких к 200°C . Балка-стенка изготовлена из регулярно чередующихся медных (Cu) и стальных (марки У8А) слоев, либо из алюминиевых (сплав АМг3) и стальных слоев той же марки. Относительное объемное содержание стальных слоев в обоих случаях равняется 0,3 ($\omega_1=0,7$, $\omega_2=0,3$, $M=2$, см. (6)).

Предполагается, что установившаяся ползучесть в каждом слое описывается степенным законом $\xi = A\sigma^\mu$, механические характеристики которого для каждой фазы композиции приведены в таблице с указанием температуры θ , с которой они соотносятся. Заметим, что значения постоянных μ и A , указанные в таблице для стали У8А и сплава АМг3, получены по экспериментальным данным, из [22] и [23] соответственно.

Таблица. Характеристики установившейся ползучести материалов слоев [21–23]

Материал	θ , $^\circ\text{C}$	μ	A , $(\text{МПа})^{-\mu} \cdot \text{час}^{-1}$
Медь (Cu)	165	1,60	$3,65 \cdot 10^{-10}$
Медь (Cu)	235	2,16	$5,63 \cdot 10^{-9}$
Алюминиевый сплав АМг3 (Al)	215	6,045	$1,025 \cdot 10^{-14}$
Сталь марки У8А	200	24,98	$1,054 \cdot 10^{-84}$

В случаях, когда установившаяся ползучесть материалов фаз композиции описывается степенным законом, секущие модули $g_m(H_m)$ в (6) находятся так (см. формулу (20.14) в [7]):

$$g_m(H_m) = \bar{B}_m H_m^{\eta_m - 1}, \quad \eta_m = \mu_m^{-1}, \quad \bar{B}_m = B_m^{-\eta_m}, \quad B_m = \sqrt{3^{\mu_m + 1}} A_m, \quad 1 \leq m \leq M,$$

где значения постоянных μ_m , A_m для m -го компонента слоистой композиции берутся из таблицы.

Далее на рисунках изображены эпюры скоростей прогибов ползучести $v_3(x_1)$ для балок из Cu–У8А-композиции (Рис. 2) и Al–У8А-композиции (Рис. 3). Зависимости $v_3(x_1)$ на рисунках 2 и 3а рассчитаны для балок высотой $2h = 10$ см при $q = 3$ МПа, а на рисунке 3б — при $2h = 1$ см и $q = 0,08$ МПа (см. Рис. 1). Горизонтальные прямые 1 на рисунках 2 и 3а определены по классической теории ($\beta = 0$, $\xi_{13}^{(k)} \equiv 0$, $0 \leq k \leq K$, см. (1)); линии 2 — по первому варианту теории Тимошенко ($\beta = 0$, $K = 0$); остальные кривые с номером i соответствуют расчетам по уточненным теориям при $\beta = 1$ и $K = 2(i - 3)$, $i \geq 3$ (в частности, кривые с номером $i = 3$ вычислены по второму варианту теории Тимошенко, см. (1)).

Сравнение кривых на рисунках 2, 3а с номерами $i \geq 3$ показывает, что с увеличением K имеет место сходимость частичных сумм в (1), (3), (4). Как видно из рисунка 3а, кривые 6 и 7 визуально уже не различимы, поэтому далее в настоящем исследовании результаты расчетов, полученные при $K = 6$ (см., например, кривую 6 на рисунке 3а), условимся считать «эталонными».

Кривые на рисунке 2а соответствуют балке из Cu–У8А-композиции при температуре $\theta = 165^\circ\text{C}$. Видно, что ни теория Бернулли (линия 1), ни первый вариант теории Тимошенко (кривая 2) не обеспечивают требуемой точности определения податливости балки-стенки в условиях установившейся ползучести.

Если предположить, что 20%-ная точность вполне приемлема при расчетах ползучести [8], то на основании взаимной близости кривых 3 и 6 на рисунке 2а можно заключить: в рассматриваемом случае расчет по второму варианту теории Тимошенко обеспечивает требуемую точность по податливости.

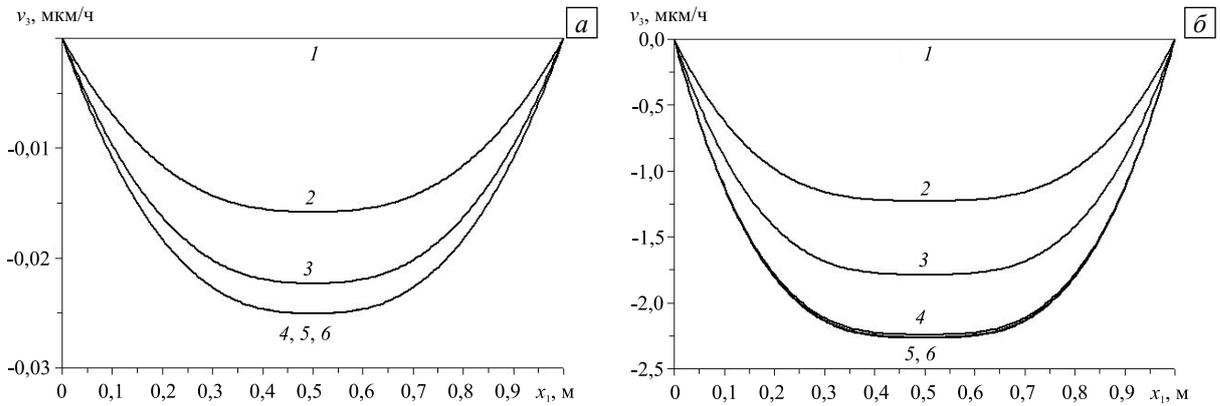


Рис. 2. Зависимости скоростей прогибов установившейся ползучести от продольной координаты, установленные в рамках разных теорий для балки-стенки высотой 10 см, изготовленной из Cu–У8А-композиции при разных температурах θ , $^\circ\text{C}$: 165 (а); 235 (б)

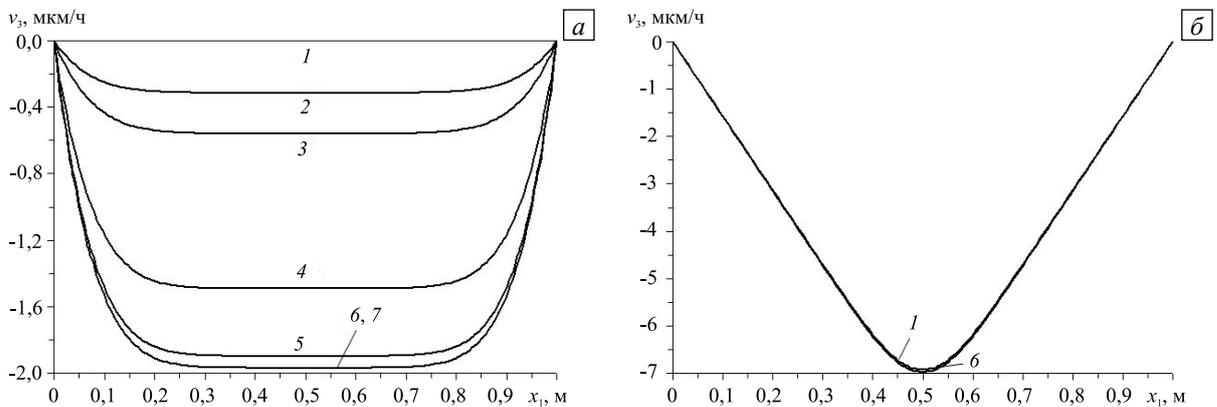


Рис. 3. Зависимости скоростей прогибов установившейся ползучести от продольной координаты, рассчитанные по разным теориям для балок-стенок высотой 10 см (а) и 1 см (б), изготовленных из Al–У8А-композиции

Однако при большем нагреве балки расчет по этой теории уже не дает столь надежных результатов. Так, кривые на рисунке 2б отвечают балке из Cu–У8А-композиции, нагретой до температуры $\theta = 235^\circ\text{C}$. Сравнение кривых 3 и 6 на этом рисунке показывает, что второй вариант теории Тимошенко не гарантирует 20%-ной точности по скорости прогиба установившейся ползучести.

В еще большей степени результаты расчетов, выполненных по традиционным теориям, отличаются от «эталонного» расчета для балок из Al–У8А-композиции. Так, на рисунке 3 приведены эпюры $v_3(x_1)$, полученные для таких балок-стенок при $\theta = 215^\circ\text{C}$. Сравнение кривых 2, 3 на рисунке 3а с «эталонной» линией 6 демонстрирует, что оба варианта теории Тимошенко не обеспечивают даже грубой точности в 50%. Кроме того, даже первое уточнение второго варианта теории Тимошенко (при $K = 2$; см. линию 4) не дает 20%-ной точности по податливости, и только расчет при $K = 4$ (см. кривую 5) гарантирует приемлемый результат (отклонение от «эталонного» расчета составляет 4%).

Линии 1 на рисунках 2 и 3а визуально не отличаются от горизонтальных прямых, так как ординаты точек, из которых они состоят, на два и более порядков меньше по модулю ординат точек всех остальных кривых.

Исследованные выше балки можно считать относительно высокими ($2h/L = 1/10$), поэтому на рисунке 3б для сравнения показаны результаты расчетов для невысокой балки-стенки ($2h/L = 1/100$). На этом рисунке кривая 1 по-прежнему получена по теории Бернулли, а кривая 6 соответствует «эталонному» расчету. Кривые же $v_3(x_1)$, лежащие между линиями 1 и 6 на рисунке 3б, которые визуально почти неразличимы, найдены по теориям типа Тимошенко. Следовательно, в этом случае и классическая теория, и оба варианта теории Тимошенко гарантируют приемлемую точность расчетов скорости прогибов ползучести. Однако проведенные дополнительные расчеты свидетельствуют о том, что уже для Al–У8А-балки высотой $2h = 2\text{ см}$ ($2h/L = 1/50$ — балка малой высоты) зависимости $v_3(x_1)$ имеют тот же вид, что и на рисунке 3а. При этом второй вариант теории Тимошенко дает ошибку для скорости прогиба в 74% относительно «эталонного» расчета. Таким образом, даже для невысоких балок ни классическая теория, ни теории типа Тимошенко не обеспечивают в некоторых случаях приемлемой точности расчетов установившейся ползучести слоистых металлокомпозитных тонкостенных элементов конструкций регулярной структуры.

Вид кривых на рисунке 3б свидетельствует о том, что в окрестности центрального сечения $x_1 = L/2$ в балке малой высоты ($2h = 1\text{ см}$) возникает напряженное состояние, близкое к вязко-ползучему шарниру [7]. Характер же кривых на рисунках 2б и 3а показывает, что для относительно высоких балок вязко-ползучий шарнир в окрестности центрального сечения не возникает, а скорость прогиба установившейся ползучести определяется в основном скоростями деформаций поперечного сдвига, активно развивающимися в окрестности опорных сечений $x_1 \approx 0$, $x_1 \approx L$ (см. ниже).

Наглядное представление о распределении скоростей деформаций установившейся ползучести в материалах слоев балки из Al–У8А-композиции, предсказываемых различными теориями, дают изображенные на фасаде балки-стенки высотой $2h = 10\text{ см}$ изолинии (Рис. 4), на которых $H_m = \text{const}$, $m = 1, 2$ (см. (6)). Расчеты были проведены при $q = 3\text{ МПа}$. В силу симметрии закрепления и нагружения рассматриваемой балки (Рис. 1), изолинии в материалах разных слоев симметричны относительно сечения $x_1 = L/2$, поэтому на левых половинах рисунка 4 кривые соответствуют $H_1 = \text{const}$ (изолинии скоростей в алюминиевых слоях), а на правых — $H_2 = \text{const}$ (изолинии скоростей в стальных слоях). Так как отсутствует нагружение балки в осевом направлении ($F_{11} = 0$), и материалы слоев одинаково

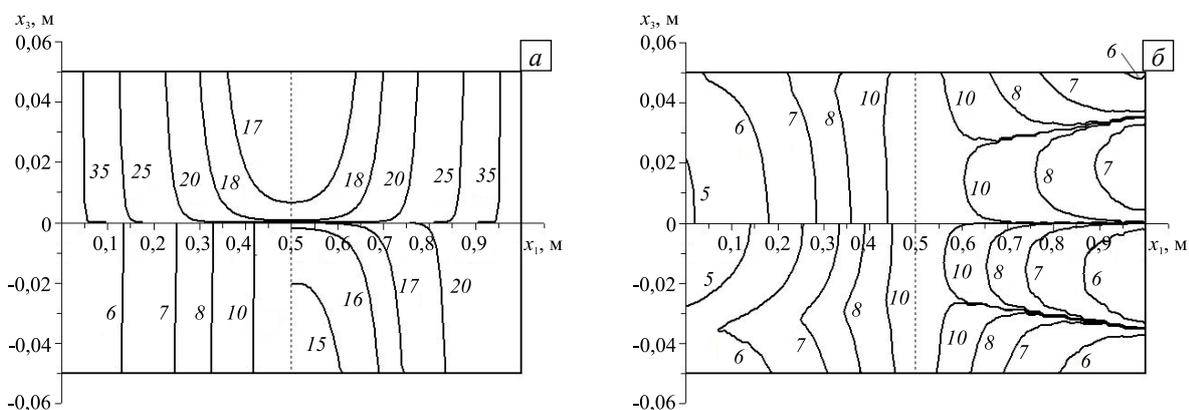


Рис. 4. Характерные зоны вязко-ползучего течения в алюминиевых (левые части рисунков) и стальных (правые части рисунков) слоях балки высотой 10 см: расчеты по теории Бернулли (верхняя половина) и первому варианту теории Тимошенко (нижняя половина) (а); расчет по второму варианту теории Тимошенко (верхняя половина) и «эталонный» расчет (нижняя половина) (б)

сопротивляются растяжению и сжатию, то изолинии симметричны и относительно срединного слоя ($x_3 = 0$). Поэтому в верхней части рисунка 4а изображены кривые $H_m = \text{const}$, определенные по классической теории, а в нижней части — по первому варианту теории Тимошенко; в верхней части рисунка 4б приведены изолинии, рассчитанные по второму варианту теории Тимошенко, а в нижней части — результаты «эталонного» расчета ($K = 6$, см. (1)). Номер n -й кривой на рисунке 4 означает, что на этой изолинии $H_m = 10^{-n}$ час⁻¹ ($m = 1, 2$).

Сопоставление линий равного уровня $H_m = \text{const}$ с рисунка 4а с линиями «эталонного» случая (см. нижнюю часть рисунка 4б), показывает, что ни теория Бернулли, ни первый вариант теории Тимошенко не отслеживают картину вязко-ползучего течения материалов слоев А1–У8А-композиции ни качественно, ни количественно. Именно поэтому эти теории неадекватно предсказывают податливость в условиях ползучести рассматриваемых балок-стенок (ср. кривые 1, 2 с кривой б на рисунках 2 и 3а). Сравнение же изолиний H_m с верхней части рисунка 4б с «эталонными» свидетельствует о том, что второй вариант теории Тимошенко дает ту же качественную картину деформированного состояния слоев композиции, однако в этом случае в зонах локализованных эффектов (в окрестности опорных сечений $x_1 \approx 0$, $x_1 \approx L$) и второй вариант теории Тимошенко значительно (в пять и более раз) занижает значения H_m ($m = 1, 2$). Это обстоятельство и приводит к существенному занижению по модулю функции $v_3(x_1)$ (см. кривые 3, б на рисунках 2б и 3а).

4. Заключение

Сравнительный анализ моделей деформирования в условиях установившейся ползучести изгибаемых слоистых металлокомпозитных балок-стенок регулярной структуры показывает, что из двух теорий типа Тимошенко второй вариант лучше описывает поведение тонкостенных конструкций по сравнению с первым. Теория же Бернулли, как правило, дает вообще неприемлемые результаты расчетов таких конструкций. Встречаются ситуации, когда и теория Бернулли, и обе теории типа Тимошенко не гарантируют получения адекватных результатов расчетов механического поведения слоистых балок-стенок регулярной структуры при их изгибном деформировании в условиях установившейся ползучести. Лишь в расчетах балок малой относительной высоты (порядка 0,01 и менее) эти теории обеспечивают вполне приемлемые результаты. В силу этих обстоятельств для достижения адекватных результатов расчетов изгибного деформирования слоистых металлокомпозитных балок регулярной структуры, работающих в условиях ползучести, следует использовать уточненные теории, основанные на соотношениях (1)–(8) при $K \geq 4$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00102-а).

Литература

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
3. Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С. Оптимальное проектирование слоистых конструкций. – Новосибирск: Наука, 1989. – 176 с.
4. Трыков Ю.П., Покатаев Е.П., Шморгунов В.Г., Храпов А.А. Остаточные напряжения в слоистых композитах. – М.: Металлургиздат, 2010. – 240 с.
5. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. – М.: Научный мир, 2011. – 231 с.
6. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. – М.: МГИУ, 2007. – 264 с.
7. Качанов Л.М. Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
8. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
9. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. Энергетический вариант теории ползучести. – Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, 1986. – 96 с.
10. Янковский А.П. Расчёт установившейся ползучести металлокомпозитных пологих оболочек слоисто-волоконистой структуры // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – № 1 (20). – С. 71-83. DOI
11. Мищенко А.В., Немировский Ю.В. Ползучесть однородных и слоистых рам на основе трехкомпонентной модели // Известия вузов. Строительство. – 2009. – № 5. – С. 16-24.
12. Янковский А.П. Исследование установившейся анизотропной ползучести слоистых металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 2. Модель деформирования // Механика композитных материалов. – 2012. – Т. 48, № 2. – С. 279-302. (English version DOI).
13. Янковский А.П. Исследование установившейся ползучести армированных металлокомпозитных балок-стенок с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т. 18, № 3. – С. 301-319.
14. Янковский А.П. Установившаяся ползучесть изгибаемых армированных металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 1. Модель деформирования // ПМТФ. – 2014. – Т. 55, № 3. – С. 154-163. (English version DOI).

15. Янковский А.П. Установившаяся ползучесть изгибаемых армированных металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 2. Анализ результатов расчетов // ПМТФ. – 2014. – Т. 55, № 4. – С. 174-183. (English version [DOI](#)).
16. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
17. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.
18. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
19. Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов. – М.: Физматлит, 2014. – 196.
20. Янковский А.П. Исследование установившейся анизотропной ползучести слоистых металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 1. Структурные модели // Механика композитных материалов. – 2012. – Т. 48, № 1. – С. 3-22. (English version [DOI](#)).
21. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1981. – 496 с.
22. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
23. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: НГАСУ, 1997. – 278 с.

References

1. Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [The general theory of anisotropic shells]. Moscow: Nauka, 1974. 446 p.
2. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny: izgib, ustojchivost' i kolebaniya* [Multilayered anisotropic shells and plates. Bending, stability and vibration]. Novosibirsk: Nauka, 2001. 287 p.
3. Kanibolotskii M.A., Urzhumtsev Yu.S. *Optimalnoe proektirovanie sloistykh konstruksij* [Optimal design of layered structures]. Novosibirsk: Nauka, 1989. 176 p.
4. Trykov Yu.P., Pokataev E.P., Shmorgun V.G., Khrapov A.A. *Ostatocnyye napryazheniya v sloistykh kompozitakh* [Residual stresses in laminated composites]. Moscow: Metallgizdat, 2010. 240 p.
5. Khazhinskii G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov* [Models of deformation and fracture of metals]. Moscow: Nauchny mir, 2011. 231 p.
6. Lokoshchenko A.M. *Modelirovanie protsessa polzuchesti i dlitel'noj prochnosti metallov* [Simulation of creep process and creep rupture strength of metals]. Moscow: Moscow State Industrial University, 2007. 264 p.
7. Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti* [The theory of creep]. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 456 p.
8. Rabotnov Yu.N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam: North-Holland, 1969. 836 p.
9. Sosnin O.V., Gorev B.V., Nikitenko A.F. *Energeticheskij variant teorii polzuchesti* [Energy version of the theory of creep]. Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, 1986. 96 p.
10. Yankovskii A.P. Calculation of steady creepage of metal-composite flat shells of layers-fibrous structure. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010, no. 1 (20), pp. 71-83. [DOI](#)
11. Mishchenko A.V., Nemirovskii Yu.V. Creep of homogeneous and layered frames based on three-component model. *News of higher educational institutions. Construction*, 2009, no. 5, pp. 16-24.
12. Yankovskii A.P. Analysis of the secondary anisotropic creep of layered metal-composite plates with account of their weakened resistance to the transverse shear. 2. Model of deformation. *Mech. Compos. Mater.*, 2012, vol. 48, no. 2, pp. 193-208. [DOI](#)
13. Yankovskii A.P. Analysis of the established creep of reinforced metalocomposite wall-beams in view of the weakened resistance to in-plane shear. *Mechanics of Composite Materials and Design*, 2012, vol. 18, no 3, pp. 301-319.
14. Yankovskii A.P. Steady-state creep of bent reinforced metal-composite plates with consideration of their reduced resistance to transverse shear. 1. Deformation model. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no 3, pp. 506-514. [DOI](#)
15. Yankovskii A.P. Steady-state creep of bent reinforced metal-composite plates with consideration of their reduced resistance to transverse shear. 2. Analysis of calculated results. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no 4, pp. 701-708. [DOI](#)
16. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruksij iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite structures]. Moscow: Mashinostroenie, 1988. 272 p.
17. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernykh i kompozitnykh materialov* [Resistance of polymeric and composite materials]. Riga: Zinatne, 1980. 571 p.
18. Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Oxford-New York: Pergamon Press, 1982.
19. Kaledin V.O., Aul'chenko S.M., Mitkevich A.B., Reshetnikova E.V., Sedova E.A., Shpakova Yu.V. *Modelirovanie statiki i dinamiki obolochechnykh konstruksij iz kompozitsionnykh materialov* [Modeling of statics and dynamics of shell structures made of composite materials]. Moscow: Fizmatlit, 2014. 196 p.
20. Yankovskii A.P. Analysis of the secondary anisotropic creep of layered metal-composite plates with account of their weakened resistance to the transverse shear. 1. Structural models. *Mech. Compos. Mater.*, 2012, vol. 48, no. 1, pp. 1-14. [DOI](#)
21. Pisarenko G.S., Mozharovskii N.S. Equations and boundary value problems in the theory of plasticity and creep. Kiev: Naukova dumka, 1981. 496 p.
22. Composite materials: Handbook, ed. by D.M. Karpinos. Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p.
23. Nikitemko A.F. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskiykh materialov* [Creep and long-term strength of metallic materials]. Novosibirsk: Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, 1997. 278 p.

Поступила в редакцию 01.07.2015; опубликована в электронном виде 30.03.2016

Сведения об авторе

Янковский Андрей Петрович, дфмн, внс, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1; E-mail: lab4nemir@rambler.ru