

DOI: [10.7242/1999-6691/2016.9.1.10](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.1.10)
УДК 532.5

УПРАВЛЕНИЕ ТЕРМО- И КОНЦЕНТРАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫМИ ТЕЧЕНИЯМИ ПРИ ВЫРАЩИВАНИИ КРИСТАЛЛОВ МЕТОДОМ ЖИДКОЙ ЗОНЫ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ВИБРАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Т.П. Любимова, Р.В. Скуридин

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

В работе численно исследуются возможности управления конвективными течениями в жидком мостике в условиях нулевой гравитации при помощи осевых вибраций. Поверхностное натяжение полагается зависящим и от температуры, и от концентрации примеси. Деформации свободной поверхности в среднем и кривизны поверхностей фазового перехода не принимаются во внимание, но учитываются пульсационные деформации свободной поверхности. В первой части статьи изучаются осесимметричные стационарные течения. Вычисления показывают, что эволюция конвективного течения с изменением теплового числа Марангони при фиксированном значении концентрационного числа Марангони сопровождается явлением гистерезиса, что связано с существованием двух устойчивых стационарных режимов в некотором диапазоне параметров. Один из этих режимов характеризуется доминированием термокапиллярного механизма и соответствует двухвихревому течению, а в другом преобладает концентрационно-капиллярный механизм, и режим соответствует одновихревому течению. В результате воздействия вибраций диапазон гистерезиса тепловых чисел Марангони сужается и смещается в область их больших значений. Во второй части статьи рассматривается устойчивость термо- и концентрационно-капиллярных течений и переход к трехмерным режимам. Выявлено значительное взаимное влияние течений, генерируемых каждым из механизмов, на устойчивость друг друга. Для различных значений вибрационных параметров получены карты устойчивости в параметрической плоскости «тепловое число Марангони – концентрационное число Марангони». Продемонстрировано, что вибрации стабилизируют течение за счет повышения критических чисел Марангони для всех мод неустойчивости. Однако для разных мод характер стабилизации различен, а при высокой интенсивности вибраций возможна и дестабилизация. Таким образом, вибрации могут изменить сценарий перехода к трехмерным режимам.

Ключевые слова: течение Марангони, высокочастотные вибрации, жидкий мостик, линейная устойчивость

CONTROL OF THERMO- AND SOLUTOCAPILLARY FLOWS IN FZ CRYSTAL GROWTH BY HIGH-FREQUENCY VIBRATIONS

T.P. Lyubimova and R.V. Skuridin

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The paper deals with the numerical investigation of the possibilities to control convective flows in the liquid bridge in zero gravity conditions by applying axial vibrations. The surface tension is assumed to be dependent on both the temperature and solute concentration. The free surface deformations and the curvature of phase change surfaces are neglected but pulsating deformation of free surface are accounted for. The first part of the paper concerns axisymmetric steady flows. The calculations show that the evolution of convective flow with the variation of thermal Marangoni number at fixed value of the solutal Marangoni number is accompanied by the hysteresis phenomenon, which is related to the existence of two stable steady regimes in certain parameter range. One of these regimes is thermocapillary dominated, it corresponds to the two-vortex flow, and the other is solutocapillary dominated, it corresponds to the single-vortex flow. Under vibrational influence the range of hysteresis becomes narrower and is shifted to the area of larger Marangoni numbers. The second part of the paper concerns the stability of axisymmetric thermo- and solutocapillary flows and the transition to three-dimensional regimes. Significant mutual influence of flows generated by each of mechanisms on the stability of each other is discovered. Stability maps in the parameter plane thermal Marangoni number - solutal Marangoni number are obtained for different values of vibration parameters. It is shown, that vibrations exert a stabilizing effect due to increasing critical Marangoni numbers for all modes of instability. However, the character of this influence is different for different modes and at high intensity of vibrations destabilization is possible. Consequently, vibrations can modify a scenario of transition to three-dimensional modes.

Key words: Marangoni flow, high-frequency vibrations, liquid bridge, linear stability

1. Введение

Многообещающим способом подавления конвективных течений или управления ими является воздействие стационарным или переменным внешним полем, таким как магнитное или вибрационное, на выращиваемый кристалл и/или поликристаллическую заготовку для него. Теоретическое, численное и экспериментальное исследование течений в изотермической жидкости вблизи вибрирующей поверхности проведено в [1], где предложен метод осреднения вибрационного потока при теоретическом анализе, получено решение осредненных уравнений движения, осуществлено сравнение с экспериментом. В [2] изучалось экспериментальное течение, вызываемое вибрациями; проведено сравнение с результатами численного моделирования; выполнен эксперимент по выращиванию кристалла методом Чохральского в условиях вибрационного воздействия.

Экспериментальному исследованию влияния стационарных и вращающихся магнитных полей на течения в жидком мостике посвящены работы [3, 4]; демонстрируется улучшение качества получаемых кристаллов. Результаты эксперимента по управлению течением в модельной цилиндрической жидкой

полузоне при помощи вибраций одного из торцов обсуждаются в [5]. Численное моделирование течений и теплопереноса в недеформируемом в среднем жидком мостике при высокочастотной вибрации обоих торцов с использованием обобщенного приближения Буссинеска выполнено в [6]. В работе [7] проведено численное моделирование течений и теплопереноса с учетом деформаций свободной поверхности, плавления и кристаллизации при наличии высокочастотных вибраций растущего кристалла. Влияние постоянного осевого магнитного поля на стационарные осесимметричные режимы термо- и концентрационно-капиллярной конвекции в жидком мостике и их линейную устойчивость по отношению к возмущениям, периодическим в азимутальном направлении, рассмотрено в [8]; показывается, что магнитное поле приводит к сужению области гистерезиса тепловых чисел Марангони — Ma_T , и ее сдвигу в область их больших значений. Численное моделирование стационарных осесимметричных течений в жидком мостике и исследование их линейной устойчивости по отношению к периодическим в азимутальном направлении возмущениям проведено в [9].

В данной статье численно изучаются конвективные течения в расплаве при выращивании кристаллов методом плавающей зоны при вибрациях кристалла. Работа состоит из двух частей, в первой части предметом обсуждения являются стационарные осесимметричные режимы, во второй — воздействие вибраций на устойчивость термо- и концентрационно-капиллярных течений по отношению к трехмерным возмущениям, периодическим в азимутальном направлении.

2. Уравнения движения

Рассмотрим конвективные течения в жидком мостике, который в отсутствие вибраций имеет форму кругового цилиндра высотой H и радиусом R (Рис. 1) и удерживается между фронтом кристаллизации растущего кристалла ($z=0$) и фронтом плавления поликристаллической заготовки ($z=L$) при выращивании его методом плавающей зоны в условиях невесомости. Расплав нагревается с помощью кольцевого нагревателя с гауссовым

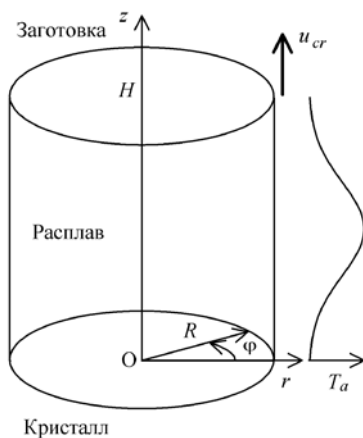


Рис. 1. Схематическое изображение жидкого мостика

распределением температуры $T_a = e^{-((z-L/2)/A_h)^2}$ (см. Рис. 1, график справа) посредством радиационного переноса энергии (A_h — характерный размер нагревателя, $L = H/R$).

Растущий кристалл совершает монохроматические вибрации вдоль оси симметрии (оси z цилиндрической системы координат $O\varphi z$) с частотой ω и амплитудой a . Поверхностное натяжение жидкости на свободной поверхности полагаем зависящим от температуры и концентрации примеси. Радиус кристалла считаем одинаковым с радиусом заготовки и равным R . Деформациями свободной поверхности в среднем и кривизной фронтов раздела фаз пренебрегаем, пульсационные деформации свободной поверхности будем учитывать.

Для задачи характерны следующие безразмерные параметры: число Прандтля $Pr = \nu/\chi$, где ν и χ — кинематическая вязкость и температуропроводность расплава; число Шмидта $Sc = \nu/D$, где D — коэффициент диффузии примеси в расплаве; безразмерная скорость протяжки $V_g = u_{cr}R/\nu$, где u_{cr} — скорость протяжки кристалла; число Био $Bi = \varepsilon\sigma^*T_1^3R/\chi$, где ε — эффективный коэффициент теплопередачи, σ^* — постоянная Стефана–Больцмана, T_1 — максимальная температура нагревателя; тепловое ($Ma_T = |\sigma'_T| \Delta T R / (\rho\nu\chi)$) и концентрационное ($Ma_C = |\sigma'_C| C_f R / (\rho\nu D)$) числа Марангони, где $\sigma'_T = \partial\sigma/\partial T$ и $\sigma'_C = \partial\sigma/\partial C$ — коэффициенты зависимости поверхностного натяжения σ от температуры и концентрации примеси, $\Delta T = T_1 - T_0$ — характерная разность температур (при этом T_0 — температура плавления), C_f — концентрация примеси в расплаве, ρ — плотность расплава; пульсационное число Рейнольдса $Re_p = a^2\omega/\nu$; вибрационное ($Ra_v = \beta\Delta T(a\omega R)^2/(4\nu\chi)$) и вибрационно-концентрационное ($Ra_{vc} = \beta_c C_f(a\omega R)^2/(4\nu D)$) числа Рэлея, где β и β_c — коэффициенты теплового и концентрационного расширения; $We = \rho\omega^2 R^3/\sigma$ — число Вебера; $\Omega = \omega R^2/\nu$ и $a_d = a/R$ — безразмерные частота и амплитуда вибраций.

Предположим, что частота вибраций велика, а амплитуда мала, так что выполняются следующие соотношения:

$$(\nu/\omega)^{1/2} \ll R, \quad a \ll R. \quad (1)$$

В этом случае все поля удобно разделить на медленно меняющиеся (осредненные) и быстро осциллирующие (пульсационные) компоненты:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}_p, \quad \bar{\mathbf{v}}_p = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = (u, v, w) = \bar{\mathbf{v}}, \quad p = \bar{p} + P, \quad \theta = T + T_p, \quad (2)$$

где \mathbf{v} и \mathbf{u} — скорости, p и P — давления полное и пульсационное, θ и T — полная и осредненная температура соответственно; черта над символом означает осреднение по периоду пульсаций.

Теоретическая модель термовибрационной конвекции слабо-неизотермической жидкости с деформируемой свободной поверхностью, включающая замкнутую систему уравнений и эффективных граничных условий для осредненных и пульсационных компонент, получена Д.В. Любимовым [9] с помощью метода многих масштабов. В рамках этой модели уравнения для пульсационной компоненты скорости имеют вид:

$$\text{rot } \mathbf{v}_p = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{v}_p = 0, \quad (3)$$

а уравнения для безразмерных осредненных компонент гидродинамических полей, температуры и концентрации в условиях слабой неизотермичности ($\beta \Delta T \ll 1$) выглядят так:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\mathbf{u} + \mathbf{S} - V_g \mathbf{e}_z) \times \text{rot } \mathbf{u} - |\mathbf{V}|^2 \left(\frac{\text{Ra}_v}{\text{Pr}} \nabla T + \frac{\text{Ra}_{vc}}{\text{Sc}} \nabla C \right) = -\nabla p + \Delta \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{S} - V_g \mathbf{e}_z) \nabla T = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T, \quad (5)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} + \mathbf{S} - V_g \mathbf{e}_z) \nabla C = \frac{1}{\text{Sc}} \Delta C, \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (7)$$

где \mathbf{e}_z — единичный вектор, направленный вдоль оси z ; \mathbf{V} — вектор безразмерной комплексной амплитуды пульсационной скорости, связанный с пульсационной скоростью, выраженной в единицах $a\omega$, соотношением $\mathbf{v}_p = \text{Re}\{\mathbf{V} \exp(i\Omega t)\}$; $\mathbf{S} = \overline{(\mathbf{q}\nabla)} \mathbf{v}_p$ (где $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathbf{v}_p$, $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) — вектор пульсационного транспорта Стокса, который в терминах амплитуды пульсационной скорости вектора пульсационного транспорта представляется соотношением $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}_p \text{Im}\{(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}^*\}$ (здесь и далее символ «*» означает комплексное сопряжение). Уравнения (4)–(7) отличаются от обычных уравнений конвекции наличием добавочных слагаемых: $-\mathbf{S} \times \text{rot } \mathbf{u}$ и $-|\mathbf{V}|^2 \left(\frac{\text{Ra}_v}{\text{Pr}} \nabla T + \frac{\text{Ra}_{vc}}{\text{Sc}} \nabla C \right)$, в уравнении Навье–Стокса и $\mathbf{S} \cdot \nabla T$ и $\mathbf{S} \cdot \nabla C$ — в уравнениях переноса тепла и массы. Эти слагаемые описывают, соответственно, осредненный перенос завихренности пульсационными компонентами течения, осредненную объемную вибрационную силу, осредненный перенос тепла и примеси пульсационными компонентами течения.

Граничные условия для осредненных полей, согласно модели [10], имеют следующий вид:

– для нормальной компоненты осредненной скорости на твердых стенках и свободной поверхности в силу необходимости равенства нулю полного потока массы через границы

$$\mathbf{u}_n = -\mathbf{S}_n; \quad (8)$$

– касательные компоненты осредненной скорости на границе динамических скин-слоев у твердых поверхностей, где происходит генерация осредненной завихренности, могут быть отличными от нуля. Для монохроматических вибраций с неоднородной фазой [10] касательная компонента осредненной скорости \mathbf{u}_τ

$$\mathbf{u}_\tau = -\frac{\text{Re}_p}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{V}_\tau \cdot \nabla) \mathbf{V}_\tau^* + \left(1 + \frac{3}{2} i \right) \mathbf{V}_\tau \text{div } \mathbf{V}_\tau^* \right\}, \quad (9)$$

здесь \mathbf{V}_τ — касательная компонента амплитуды пульсационной скорости;

– по свободной поверхности жидкости от вибрирующего торца распространяются капиллярные волны. Диссипация волновой энергии ведет к генерации осредненной завихренности в тонком пограничном слое вблизи свободной поверхности. Это явление, впервые изученное Лонге-Хиггинсом в [11]), принимаем

во внимание при помощи эффективного граничного условия для касательной компоненты тензора сдвига на свободной поверхности (с учетом термокапиллярного эффекта) [9]:

$$\Pi = \text{Re}_p \text{Re} \left\{ \nabla_{\zeta} \text{div} \mathbf{V}^* + \nabla_{\zeta} \cdot \nabla \mathbf{V}^* + \nabla \text{div} (\zeta \mathbf{V}^*) \right\} + \frac{\text{Ma}_r}{\text{Pr}} \nabla_{\tau} T - \frac{\text{Ma}_c}{\text{Sc}} \nabla_{\tau} C. \quad (10)$$

Здесь: ζ — безразмерная комплексная амплитуда отклонения свободной поверхности от ее среднего положения, выраженная в единицах амплитуды вибраций a ; ∇_{τ} — касательная компонента оператора «набла»;

– отклонениями свободной поверхности от цилиндрической формы в среднем в настоящей работе пренебрегаем (как показано в [12], при высокочастотных малоамплитудных вибрациях они незначительны), поэтому условие баланса нормальных напряжений не требуется.

Граничные условия для температуры имеют вид:

– на фронтах кристаллизации и плавления

$$T|_{z=0} = 0, \quad T|_{z=L} = 0; \quad (11)$$

– на свободной поверхности

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\text{Bi}(T - T_a), \quad (12)$$

где n — нормаль к поверхности, Bi — число Био.

Граничные условия для концентрации на фронтах кристаллизации и плавления, соответственно, представим следующим образом:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=0} = -\text{Sc} V_g (C - 1), \quad \left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{z=L} = -\text{Sc} V_g (1 - k_0) C. \quad (13)$$

Здесь k_0 — коэффициент сегрегации.

Поток примеси через свободную поверхность равен нулю:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (14)$$

Для использования граничного условия (10) необходимо знать структуру как пульсационных отклонений свободной поверхности от осредненного положения, так и тангенциальных компонент пульсационной скорости у свободной поверхности. В случае, когда глубина проникновения вихревой компоненты $\delta = (\nu/\omega)^{1/2}$ мала, можно прибегнуть к квазипотенциальному приближению [13]. Вводя для пульсационной компоненты скорости $\mathbf{V} = \nabla \Phi$ комплексный потенциал Φ такой, что $\Delta \Phi = 0$, вследствие (3) получим кинематическое условие и условие баланса нормальных напряжений [4]:

$$-\zeta - i \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{2}{\Omega} \Delta_{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad i \Phi = \text{We}^{-1} \Delta_{\tau} \zeta + 2 \Omega^{-1} \Delta_{\tau} \Phi, \quad (15)$$

где $\Delta_{\tau} = \text{div} \nabla_{\tau}$ — двумерный аналог оператора Лапласа или тангенциальная часть оператора Δ .

На твердых торцах для нормальных компонент пульсационной скорости поставим условия непроницаемости, то есть в выражении через комплексный потенциал это

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{z=0} = 1, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{z=L} = 0. \quad (16)$$

Условия для касательных компонент пульсационной скорости не требуются, поскольку разложение на осредненную и пульсационную компоненты (2) и последующее осреднение понижают порядок уравнений для пульсационной части течения.

В качестве единиц измерения скорости, давления, концентрации примеси, температуры, времени и расстояния воспользуемся величинами: $[V] = \nu/R$, $[p] = \rho \nu^2/R^2$, $[C] = C_f$, $[T] = \Delta T$, $[t] = R^2/\nu$, $[r] = R$.

Вычисления были проведены при фиксированных значениях параметров: $Sc = 22,5$, $Pr = 0,00771$, $Bi = 2,0$, $L = 2$, $A_n = 0,5$, $We = 7500$. Безразмерная скорость протяжки V_g имела значения 0,00412 и 0,1. Значения теплового и концентрационного чисел Марангони варьировались в диапазонах, соответственно, $0 \leq Ma_T \leq 30$ и $-10^5 \leq Ma_C \leq 10^5$. Безразмерная амплитуда не выходила за границы диапазона от 0 до $8,5 \cdot 10^{-4}$. Вибрационное и вибрационно-концентрационное числа Рэлея считались зависимыми параметрами и находились по формулам: $Ra_v = (\beta\sigma/(4\sigma'_T)) Ma_T a_d^2 We$, $Ra_{vC} = (\beta_C\sigma/(4\sigma'_C)) Ma_C a_d^2 We$. Параметры $\beta\sigma/(4\sigma'_T)$ и $\beta_C\sigma/(4\sigma'_C)$ могут рассматриваться как обезразмеренные (и домноженные на 1/4) коэффициенты теплового и концентрационного расширения; для них были приняты значения 7,93 и 0,48 соответственно.

3. Свойства основного состояния

Уравнения (3)–(16) допускают стационарное осесимметричное решение задачи течения в плоскости Orz (поскольку $\partial/\partial\varphi = 0$ для пульсационного и $\partial/\partial t = \partial/\partial\varphi = v = 0$ для осредненных течений), и ее можно разделить на задачу для пульсационных полей и задачу для осредненных полей. В обсуждаемом в настоящей работе случае недеформируемой в среднем свободной поверхности задача для пульсационных полей может быть решена независимо методом разложения в ряды по функциям Бесселя. Потенциал пульсационной скорости представляется в виде:

$$\Phi = \frac{1}{4L}r^2 - \frac{1}{2L}z^2 + z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0(k_n r) \cos k_n z + \alpha. \quad (17)$$

Здесь: $k_n = n\pi/L$; I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; a_n — коэффициенты разложения; α — постоянная. При этом удовлетворяются граничные условия на твердых торцах и условие симметрии на оси z . Подстановка разложения в динамическое и кинематическое условия (15) позволяет получить в явном виде коэффициенты a_n и поля потенциала пульсационной скорости и пульсационной деформации свободной поверхности. Соответствующие выражения не приводятся из-за их громоздкости.

Поиск стационарных осесимметричных решений для осредненных полей удобно вести с использованием функции тока ψ_0 и завихренности ϕ_0 :

$$u_0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial z}, \quad w_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \quad \phi_0 = \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial r}. \quad (18)$$

В терминах ψ_0 и ϕ_0 уравнения термо-концентрационно-вибрационной конвекции принимают вид:

$$\frac{1}{r} \left(\left(\frac{\partial \psi_L}{\partial r} - V_g \right) \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \frac{\partial \psi_L}{\partial z} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_L}{\partial z} \phi_0 \right) + \frac{Ra_v}{Pr} \left(\frac{\partial E}{\partial r} \frac{\partial T_0}{\partial z} - \frac{\partial E}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \phi_0 + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2}, \quad (19)$$

$$\phi_0 = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} \right), \quad (20)$$

$$\frac{1}{r} \left(\left(\frac{\partial \psi_L}{\partial r} - V_g \right) \frac{\partial T_0}{\partial z} - \frac{\partial \psi_L}{\partial z} \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) = \frac{1}{Pr} \Delta T_0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{r} \left(\left(\frac{\partial \psi_L}{\partial r} - V_g \right) \frac{\partial C_0}{\partial z} - \frac{\partial \psi_L}{\partial z} \frac{\partial C_0}{\partial r} \right) = \frac{1}{Sc} \Delta C_0. \quad (22)$$

Здесь: $\psi_L = \psi_0 + \psi_S$ — лагранжева функция тока; ΔT_0 и ΔC_0 — лапласианы полей температуры и концентрации; ψ_S — функция тока для векторного поля S , выражающаяся через потенциал пульсационной скорости

$$\psi_S = \frac{1}{2} \operatorname{Re}_p \operatorname{Im} \left\{ r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right\}; \quad (23)$$

$E = |\mathbf{V}|^2$ — плотность энергии пульсационной скорости.

Граничные условия для осредненных полей выглядят следующим образом:

– при $r = 0$

$$\psi_0 = \phi_0 = \frac{\partial T_0}{\partial r} = \frac{\partial C_0}{\partial r} = 0; \quad (24)$$

– при $r = 1$

$$\psi_0 + \psi_s = \frac{\partial C_0}{\partial r} = 0, \quad \phi_0 = 2\text{Re}_p \text{Re} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial z^2} \right\} + \frac{\text{Ma}_T}{\text{Pr}} \frac{\partial T_0}{\partial z} - \frac{\text{Ma}_C}{\text{Sc}} \frac{\partial C_0}{\partial z}, \quad \frac{\partial T_0}{\partial r} = -\text{Bi}(T_0 - T_a); \quad (25)$$

– при $z = 0$

$$\psi_0 + \psi_s = T_0 = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = \text{Re}_p r \left[\frac{3}{4} \text{Re} \left\{ (1+i) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r^2} \right\} + \frac{1}{2r} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 \right], \quad \frac{\partial C_0}{\partial z} = -\text{Sc} V_g (1 - k_0) C_0; \quad (26)$$

– при $z = L$

$$\psi_0 + \psi_s = T_0 = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = \text{Re}_p r \left[\frac{3}{4} \text{Re} \left\{ (1+i) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial r^2} \right\} + \frac{1}{2r} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|^2 \right], \quad \frac{\partial C_0}{\partial z} = -\text{Sc} V_g (C_0 - 1). \quad (27)$$

Для нахождения стационарных решений для осредненных полей система уравнений (19)–(27) дискретизировалась методом конечных разностей на неравномерной сетке, сгущающейся у свободной поверхности, фронтов плавления и кристаллизации и на середине высоты мостика, и решалась методом Ньютона. Основные результаты получены на сетке 41×81 , для анализа сходимости результатов при измельчении шага сетки использовались и сетки других размеров.

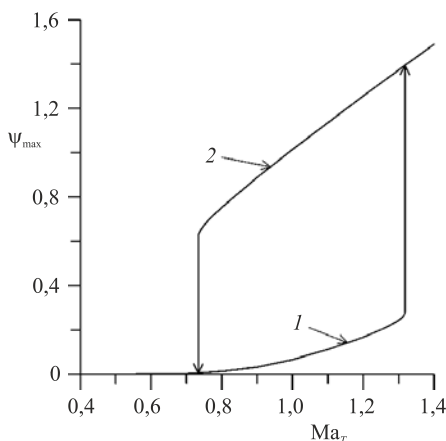


Рис. 2. Гистерезис между ТК (линия 1) и КК (линия 2) режимами

Вычисления, выполненные для параметров, соответствующих выращиванию кристалла GeSi в отсутствие вибраций (характерный размер жидкого мостика порядка одного сантиметра), показывают, что эволюция конвективного течения с изменением теплового числа Марангони при фиксированном значении концентрационного числа Марангони сопровождается явлением гистерезиса, связанным с существованием двух устойчивых стационарных режимов — ТК и КК, в некотором диапазоне параметров (Рис. 2, $V_g = 0,00412$, $\text{Ma}_C = 5 \cdot 10^4$).

Один из режимов — (ТК), характеризуется преобладанием термокапиллярного механизма генерации движения; он реализуется при малых значениях Ma_T и соответствует двухвихревому течению (см. Рис. 3, где изолинии функции тока и концентрации приведены для случая $\text{Ma}_T = 0,7335$). При этом вблизи свободной

поверхности жидкость движется от горячей области в середине мостика к холодным торцам. Двухвихревая структура течения слегка искажается под влиянием концентрационно-капиллярного механизма.

Другой режим — КК, характеризуется преобладанием концентрационно-капиллярного механизма; он реализуется при больших Ma_T и соответствует одновихревому течению (Рис. 4, случай $\text{Ma}_T = 0,318$). Теперь течение у свободной поверхности направлено от области с минимальной концентрацией примеси ($z = 0$) к области с максимальной концентрацией ($z = L$). Одновихревая структура течения на рисунке слегка нарушается, из-за чего появляется малый термокапиллярный вихрь.

При увеличении теплового числа Марангони ТК-режим теряет устойчивость, и происходит резкий переход к КК-режиму. Наоборот, при уменьшении Ma_T становится неустойчивым КК-режим, и происходит резкий переход к ТК режиму. При $0,73 < \text{Ma}_T < 1,33$ имеет место неоднозначность: существуют два устойчивых стационарных решения, и какое из них реализуется, зависит от начального состояния. Наличие двух устойчивых осесимметричных стационарных режимов в жидком мостике при поверхностном натяжении, зависящем как от температуры, так и от концентрации примеси, отмечается также в [14], где численно изучались конвективные течения в жидком мостике под воздействием сильных магнитных полей и поля силы тяжести. Экспериментально переход наблюдался в [15].

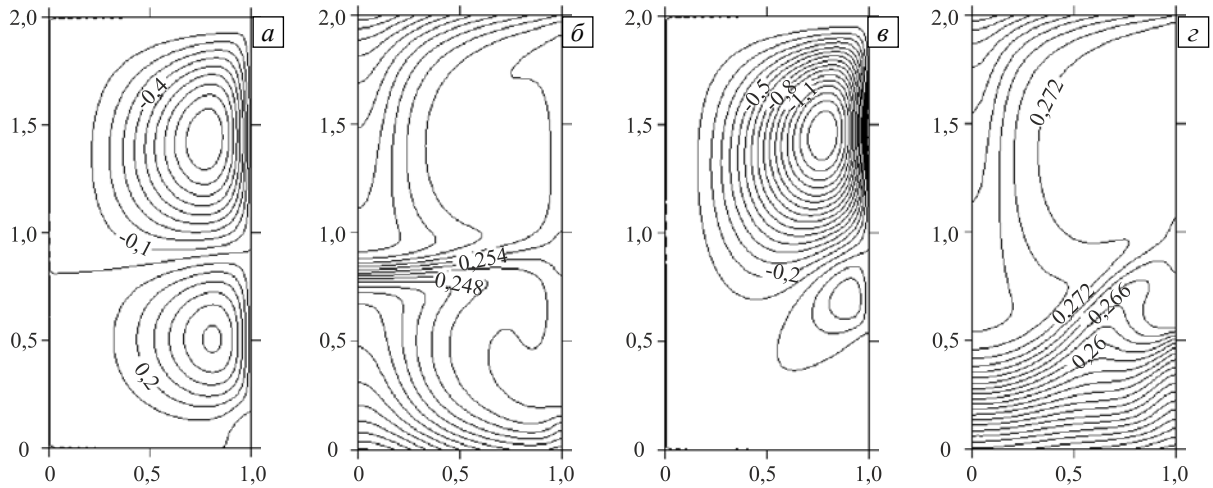


Рис. 3. Двухвихревой ТК-режим при $Ma_T = 0,7335$ (а, б) и одновихревой КК-режим при $Ma_T = 0,318$ (в, з); изолинии функций тока (а, в) и концентраций (б, з)

Рисунок 4 иллюстрирует влияние вибраций кристалла на области существования устойчивых ТК (выше нижней границы) и КК (ниже верхней границы) режимов при $We = 7500$, $a_d = 0,0006$ (значение числа Вебера $We = 7500$ выбрано из соображений несовпадения частоты вибраций с какой-либо из собственных частот колебаний жидкого мостика и удаленности параметров рассматриваемой системы от параметров резонанса). Как видно, под действием вибраций диапазон характеристик, в котором устойчивы и ТК-, и КК-режимы, сдвигается в область больших значений чисел Марангони. При этом смещение вверх границы области существования ТК-режима превышает смещение таковой для КК режима, то есть диапазон сосуществования двух устойчивых стационарных режимов становится уже. Кроме того, точка пересечения границ бистабильности при наличии вибраций смещается влево, в сторону больших Ma_C .

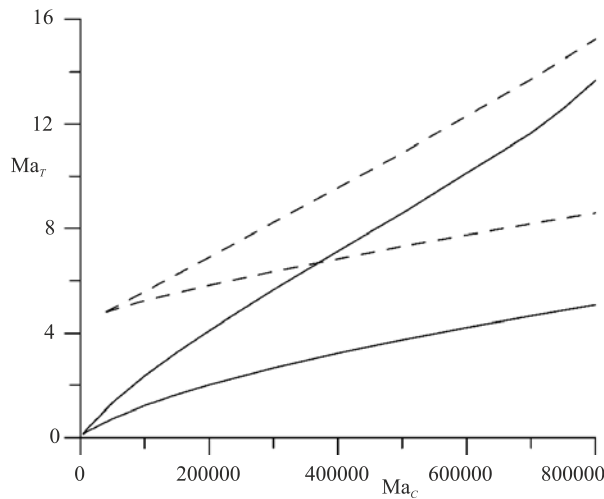


Рис. 4. Области существования устойчивых ТК (выше границы $z = 0$) и КК (ниже границы $z = L$) режимов при отсутствии (сплошные линии) и наличии (штриховые линии) вибраций при $We = 7500$, $a_d = 0,0006$, $V_g = 0,00412$

Зависимость границ областей существования от вибраций связано с тем, что вибрации сами генерируют одновихревое течение с направлением движения жидкости вблизи свободной поверхности от колеблющегося торца к неподвижному. Это течение противодействует нижнему на рисунках ТК вихрю и усиливает верхний ТК вихрь и, при положительных Ma_C , КК вихрь.

4. Задача линейной устойчивости

Теперь рассмотрим линейную устойчивость осесимметричных стационарных состояний по отношению к трехмерным возмущениям, периодическим в азимутальном направлении. Представим решение полной трехмерной задачи в виде $(u, p, T, C) = (u_0 + u', p_0 + p', T_0 + T', C_0 + C')$ (уравнения для пульсационных полей, в силу линейности, имеют единственное решение, и для них возмущения отсутствуют).

Возмущения (u', p', T') удовлетворяют следующим линеаризованным уравнениям (для упрощения записи опустим штрихи):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (u_0 + S - V_g e_z) \times \text{rot } u - u \times \text{rot } u_0 - |V|^2 \left(\frac{Ra_v}{Pr} \nabla T + \frac{Ra_{vC}}{Sc} \nabla C \right) = -\nabla p + \Delta u, \quad (28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u_0 + S - V_g e_z) \nabla T + u \nabla T_0 = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad (29)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{S} - V_g \mathbf{e}_z) \nabla C + \mathbf{u} \nabla C_0 = \frac{1}{Sc} \Delta C, \quad (30)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (31)$$

Граничные условия для возмущений представим в виде:

– на фронте кристаллизации $z = 0$:

$$u = v = w = T = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -ScV_g(1 - k_0)C; \quad (32)$$

– на фронте плавления $z = L$:

$$u = v = w = T = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} = -ScV_g C; \quad (33)$$

– на свободной поверхности ($r = 1$):

$$u = \frac{\partial C}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{Ma_T}{Pr} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{Ma_c}{Sc} \frac{\partial C}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} - v = \frac{Ma_c}{Sc} \frac{\partial C}{\partial \varphi} - \frac{Ma_T}{Pr} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -BiT. \quad (34)$$

Граничные условия для давления на твердых торцах и свободной поверхности получим путем проектирования аналога уравнения Навье–Стокса для возмущений на нормаль к границам:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = (\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}_0 + \mathbf{S}) \times \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}_0)_n + \frac{Ra_v}{Pr} |\mathbf{V}|^2 \frac{\partial T}{\partial n} - \frac{Ra_{vC}}{Sc} |\mathbf{V}|^2 \frac{\partial C}{\partial n}. \quad (35)$$

Общим решением системы (28)–(35) является комбинация нормальных мод $\mathbf{u}, p, T \sim e^{(\lambda+i\omega)t+ik\varphi}$, где λ — инкремент, ω — частота, k — целое азимутальное волновое число.

Для замыкания постановки задачи систему уравнений для возмущений необходимо дополнить граничными условиями на оси симметрии ($r = 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = iw, \quad w = p = T = C = 0, \quad k = 1; \quad (36)$$

$$u = v = w = p = T = C = 0, \quad k \geq 2. \quad (37)$$

Поскольку потеря стационарным осесимметричным решением устойчивости по отношению к возмущениям, обладающим такой же симметрией, приводит к смене режима течения (ТК или КК), специальное исследование устойчивости при $k = 0$ не требуется: границы такой устойчивости совпадают с границами гистерезисного перехода.

Система уравнений и граничных условий для возмущений, частоты и инкремента решалась методом конечных разностей на той же сетке, которая применялась для получения основного состояния. Аппроксимация пространственных производных также осуществлялась центральными разностями второго порядка точности во внутренних узлах и односторонними разностями второго порядка точности в узлах на границах. Линейная устойчивость по отношению к возмущениям, не обладающим осевой симметрией, определялась при помощи вычислительного пакета, описанного в [16].

5. Линейная устойчивость стационарного осесимметричного режима в отсутствие вибраций

Известно, что в отсутствие зависимости поверхностного натяжения от концентрации (течение чисто термокапиллярное) для малых значений числа Прандтля и отношения высоты мостика к радиусу, равной 2, наиболее существенное влияние на устойчивость системы оказывают монотонные возмущения с азимутальным волновым числом $k = 2$ [17]. В случае же, когда отсутствует температурная зависимость поверхностного натяжения (течение чисто концентрационно-капиллярное), полученные в настоящей работе данные показывают, что для рассматриваемых значений параметров наиболее опасны возмущения с азимутальным волновым числом $k = 1$. Это согласуется с выводом, сделанным в [3].

На рисунке 5 приведены численные результаты, характеризующие устойчивость осесимметричных стационарных режимов для случая, когда отсутствуют вибрации и учтены как термокапиллярный, так и концентрационно-капиллярный эффекты. Показаны границы устойчивости по отношению

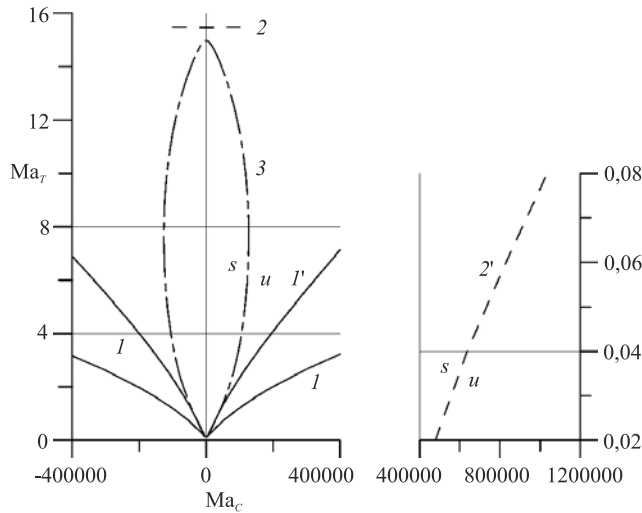


Рис. 5. Карта устойчивости при $V_g = 0,00412$ в отсутствие вибраций и справа ее фрагмент при больших по величине положительных Ma_c

к возмущениям с азимутальным волновым числом k , принимающим значения 0, 1, 2. Безразмерная высота мостика также составляет 2, безразмерная скорость протяжки — $V_g = 0,00412$. Сплошные линии 1 и $1'$ соответствуют возмущениям с азимутальным волновым числом $k=0$, штриховые линии 2 и $2'$ — возмущениям с $k=1$, и штрихпунктирная линия 3 — возмущениям с $k=2$. Граница устойчивости (s) по отношению к моде с $k=3$ расположена выше границ для мод 1 и 2 и не показана на рисунке 5. Область неустойчивости ТК режима по отношению к моде с $k=2$ располагается за пределами «пузыря» 3 (область u), причем, как видно, вблизи границ смены режимов имеет место наступление неустойчивости при уменьшении Ma_T . Над «пузырем» проходит граница неустойчивости (линия 2) по моде с $k=1$. Область неустойчивости

по отношению к возмущениям с $k=1$ наблюдается также при больших по величине положительных Ma_c и очень малых Ma_T . Эта область изображена на рисунке 5 справа. Из анализа рисунка 5 следует, что в присутствии даже слабого концентрационно-термокапиллярного эффекта значительно меняется устойчивость термокапиллярного течения и, наоборот, даже слабый термокапиллярный эффект сказывается на устойчивости концентрационно-капиллярного течения.

6. Влияние вибраций на линейную устойчивость

Вначале рассматривалось влияние осевых вибраций на устойчивость чисто термокапиллярного течения. Карта устойчивости для случая $Ma_c = 0$, $V_g = 0,00412$ приведена на рисунке 6. Штриховая линия соответствует моде с $k=1$, штрихпунктирная линия — моде с $k=2$. Как видно, менее опасная мода $k=1$

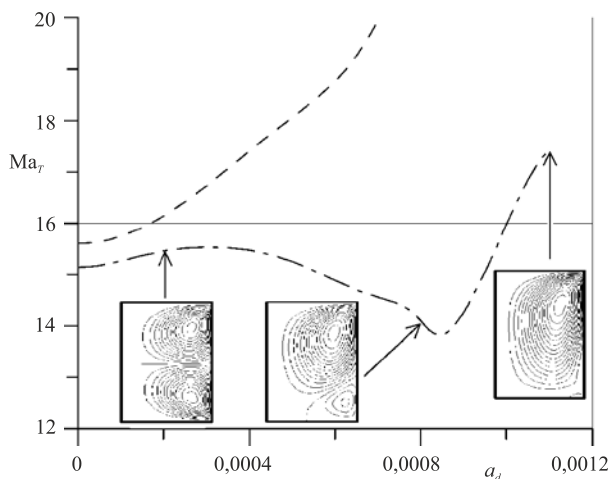


Рис. 6. Карта устойчивости для $Ma_c = 0$ при наличии вибраций; в точках, на которые указывают стрелки, приводится соответствующая структура основного течения

стабилизируется вибрациями. Реакция на вибрации более опасной моды $k=2$ определяется интенсивностью их воздействия: при амплитудах, меньших 0,0004, имеет место слабая стабилизация; в диапазоне амплитуд вибраций $0,0004 < a_d < 0,0008$ наблюдается дестабилизация основного решения; при амплитудах, больших 0,0008, стабилизирующее действие оказывается сильным. Течение при этом перестраивается из двухвихревого ТК в одновихревое вибрационное.

Затем было исследовано влияние вибраций на устойчивость комбинационных термо-концентрационно-капиллярных течений. На рисунке 7а приведены зависимости критического значения Ma_T от безразмерной амплитуды вибраций для $V_g = 0,00412$, $Ma_c = 10^5$.

Сплошные линии 1 , $1'$ соответствуют $k=0$, штрихпунктирные линии 2 , $2'$ — $k=2$. Области неустойчивости ТК-режима находятся выше кривой $2'$ и ниже кривой 2 . При положительных значениях концентрационного числа Марангони концентрационно-капиллярное и вибрационное течения накладываются друг на друга. Это приводит к тому, что при амплитудах, меньших 0,0004, верхняя граница области устойчивости по отношению к возмущениям с $k=2$ сдвигается в область больших Ma_T ,

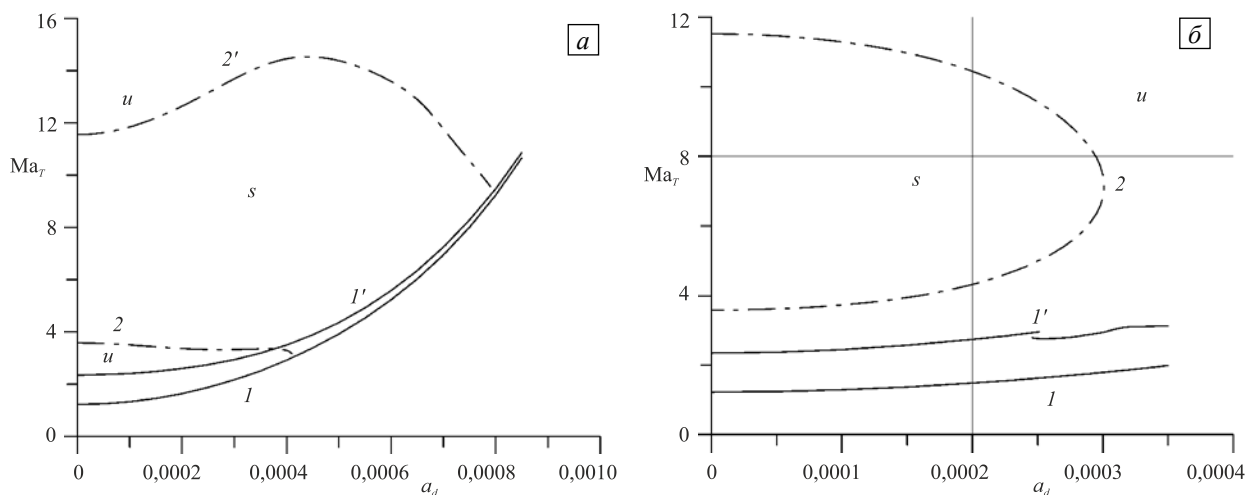


Рис. 7. Карта устойчивости при положительных ($Ma_c = 10^5$) (а) и отрицательных ($Ma_c = -10^5$) (б) концентрационных числах Марангони

а нижняя граница — в область меньших Ma_T , то есть область устойчивости относительно этой моды (площади «пузыря») расширяется. При амплитудах вибраций, больших 0,0004, нижняя граница упирается в границу существования ТК режима, а верхняя граница начинает понижаться и в итоге тоже наталкивается на границу существования ТК режима (или границу устойчивости относительно моды $k = 0$). Рисунок 7а иллюстрирует также уже обсуждавшиеся выше сужение и сдвиг в область больших значений Ma_T области сосуществования двух устойчивых стационарных режимов (области неустойчивости по отношению к возмущениям с $k = 0$).

На рисунке 7б показана карта устойчивости при $V_g = 0,00412$ для числа $Ma_c = -10^5$. Сплошные линии l, l' соответствуют границам смены режимов с $k = 0$, штрихпунктирная линия 2 — $k = 2$. Область устойчивости (s) занимает часть координатной плоскости (a_d, Ma_T), ограниченную кривой 2 , область неустойчивости (u) располагается вне ее. В противоположность случаю с $Ma_c = 10^5$ вибрационное течение с отрицательным концентрационным числом Марангони противодействует концентрационно-капиллярному. Как видно из рисунка 7б, вибрации ведут к сдвигу верхней границы области устойчивости по отношению к возмущениям с $k = 2$ в область меньших Ma_T и смещению нижней границы в область больших Ma_T . Следовательно, диапазон значений Ma_T , в котором стационарное течение устойчиво по отношению к этой моде при $Ma_c = -10^5$, уменьшается. При амплитуде около 0,0003 он исчезает, стационарное термокапиллярное течение оказывается полностью неустойчивым.

Таким образом, анализ результатов, приведенных на рисунках 6, 7, позволяет сделать вывод о том, что показанная на рисунке 5 область устойчивости по отношению к моде с $k = 2$ — «пузырь», на плоскости (Ma_c, Ma_T) смещается вправо-вверх.

7. Выводы

Рассмотрено влияние вибраций на конвективные течения в жидком мостике, удерживаемом между фронтом плавления поликристаллической заготовки и фронтом кристаллизации растущего кристалла, при его выращивании методом плавающей зоны в условиях невесомости. Поверхностное натяжение полагалось зависящим и от температуры, и от концентрации примеси. Осредненные деформации свободной поверхности и кривизны фронтов фазовых переходов не учитывались.

Расчет осесимметричных стационарных режимов в отсутствие вибраций показал, что эволюция конвективного течения при изменении теплового числа Марангони при фиксированном значении концентрационного числа Марангони сопровождается явлением гистерезиса, который связан с существованием двух стационарных режимов в некотором диапазоне параметров. В одном из этих режимов преобладает термокапиллярный механизм, и режим характеризуется двухвихревым течением, а в другом, с преобладанием концентрационно-капиллярного механизма, имеет место одновихревое течение. Вибрационное воздействие усиливает концентрационно-капиллярный вихрь при положительных значениях концентрационного числа Марангони и ослабляет при отрицательных, диапазон существования гистерезиса сужается и смещается в область больших тепловых чисел Марангони.

Исследовалась линейная устойчивость осесимметричных стационарных режимов по отношению к трехмерным возмущениям, периодическим в азимутальном направлении. Получены карты устойчивости

в плоскости параметров «тепловое число Марангони — концентрационное число Марангони» для различных значений скорости протяжки и отношения высоты жидкого мостика к радиусу. Показано, что при наличии даже слабого концентрационно-капиллярного эффекта ощутимо меняется устойчивость термокапиллярного течения, и наоборот, в присутствии даже слабого термокапиллярного эффекта сказывается сильное влияние на устойчивость концентрационно-капиллярного течения.

Выявлено, что при умеренной интенсивности вибрации кристалла оказывают стабилизирующее действие: они ведут к повышению критических чисел Марангони, определяющих положение порога устойчивости для всех мод. Однако характер этого роста различен для разных мод, а при больших амплитудах вибрации возможна дестабилизация. Из этого следует, что вибрации могут изменить сценарий перехода к трехмерным режимам. Полученные новые теоретические результаты могут найти применение в физическом моделировании, либо в технологии плавающей зоны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-0906-а).

Литература

1. Авдонин Н.А., Жариков Е.В., Калис Х.Э., Сторожев Н.Р. Анализ вторичных течений в жидкости вблизи вибрирующей поверхности: Препринт № 90 / ИОФ АН СССР. – Москва, 1989. – 17 с.
2. Zharikov E.V., Prihod'ko L.V., Storozhev N.R. Fluid flow formation resulting from forced vibration of a growing crystal // *J. Cryst. Growth*. – 1990. – Vol. 99, no. 1-4, part 2. – P. 910-914. DOI
3. Dold P., Cröll A., Benz K.W. Floating-zone growth of silicon in magnetic fields. I. Weak static axial fields // *J. Cryst. Growth*. – 1998. – Vol. 183, no. 4. – P. 545-553. DOI
4. Dold P., Cröll A., Lichtensteiger M., Kaiser Th., Benz K.W. Floating-zone growth of silicon in magnetic fields. IV. Rotating magnetic fields // *J. Cryst. Growth*. – 2001. – Vol. 231, no. 1-2. – P. 95-106. DOI
5. Anilkumar A.V., Grugel R.N., Shen X.F., Lee C.P., Wang T.G. Control of thermocapillary convection in a liquid bridge by vibration // *J. Appl. Phys.* – 1993. – Vol. 73, no. 9. – P. 4165-4170. DOI
6. Lyubimov D., Lyubimova T., Roux B. Mechanisms of vibrational control of heat transfer in a liquid bridge // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1997. – Vol. 40, no. 17. – P. 4031-4042. DOI
7. Lyubimova T.P., Scuridin R.V., Cröll A., Dold P. Influence of high frequency vibrations on fluid flow and heat transfer in a floating zone // *Cryst. Res. Technol.* – 2003. – Vol. 38, no. 7-8. – P. 635-653. DOI
8. Любимова Т.П., Скуридин Р.В., Файзрахманова И.С. Влияние магнитного поля на гистерезисные переходы при выращивании кристаллов методом плавающей зоны // ПЖТФ. – 2007. – Т. 33, № 17. – С. 61-68. (English version DOI).
9. Lyubimova T.P., Skuridin R.V., Faizrahmanova I.S. Thermo- and soluto-capillary convection in the floating zone process in zero gravity conditions // *J. Cryst. Growth*. – 2007. – Vol. 303, no. 1. – P. 274-278. DOI
10. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. Thermal vibrational convection. – New York: John Wiley & Sons, 1998. – 358 p.
11. Longuet-Higgins M.S. Mass transport in water waves // *Philos. T. Roy. Soc. A.* – 1953. – Vol. 245. – P. 535-581. DOI
12. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Skuridin R.V., Chen G., Roux B. Numerical investigation of meniscus deformation and flow in an isothermal liquid bridge subject to high-frequency vibrations under zero gravity conditions // *Comput. Fluids*. – 2002. – Vol. 31, no. 4-7. – P. 663-682. DOI
13. Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in non-uniform systems // *Microgravity Quarterly*. – 1994. – Vol. 4, no. 2. – P. 221-225.
14. Walker J.S., Dold P., Cröll A., Volz M.P., Szofran, F.R. Solutocapillary convection in the float-zone process with a strong magnetic field // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 2002. – Vol. 45, no. 23. – P. 4695-4702. DOI
15. Campbell T.A., Schweizer M., Dold P., Cröll A., Benz K.W. Float zone growth and characterization of Ge_{1-x}Si_x (x ≤ 10 at%) single crystals // *J. Cryst. Growth*. – 2001. – Vol. 226, no. 2-3. – P. 231-239. DOI
16. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Morozov V.A. Software package for numerical investigation of linear stability of multi-dimensional flows // *Bulletin of Perm University. Information Systems and Technologies*. – 2001. – No. 5. – P. 74-81.
17. Witkowski L.M., Walker J.S. Solutocapillary instabilities in liquid bridges // *Phys. Fluids*. – 2002. – Vol. 14, no. 8. – P. 2647. DOI

References

1. Avdonin N.A., Zharikov E.V., Kalis Kh.E., Storozhev N.R. *Analiz vtorichnykh techenij v zhidkosti vblizi vibriruyushchej poverkhnosti* [Analysis of secondary flow in a liquid near a vibrating surface]. Preprint No. 90, General Physics Institute, Academy of Sciences USSR, Moscow, 1989. 17 p.
2. Zharikov E.V., Prihod'ko L.V., Storozhev N.R. Fluid flow formation resulting from forced vibration of a growing crystal. *J. Cryst. Growth*, 1990, vol. 99, no. 1-4, part 2, pp. 910-914. DOI
3. Dold P., Cröll A., Benz K.W. Floating-zone growth of silicon in magnetic fields. I. Weak static axial fields. *J. Cryst. Growth*, 1998, vol. 183, no. 4, pp. 545-553. DOI
4. Dold P., Cröll A., Lichtensteiger M., Kaiser Th., Benz K.W. Floating-zone growth of silicon in magnetic fields. I. Rotating magnetic fields. *J. Cryst. Growth*, 2001, vol. 231, no. 1-2, pp. 95-106. DOI
5. Anilkumar A.V., Grugel R.N., Shen X.F., Lee C.P., Wang T.G. Control of thermocapillary convection in a liquid bridge by vibration. *J. Appl. Phys.*, 1993, vol. 73, no. 9, 4165-4170. DOI
6. Lyubimov D., Lyubimova T., Roux B. Mechanisms of vibrational control of heat transfer in a liquid bridge. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1997, vol. 40, no. 17, pp. 4031-4042. DOI

7. Lyubimova T.P., Scuridin R.V., Cröll A., Dold P. Influence of high frequency vibrations on fluid flow and heat transfer in a floating zone. *Cryst. Res. Technol.*, 2003, vol. 38, no. 7-8, pp. 635-653. [DOI](#)
8. Lyubimova T.P., Skuridin R.V., Faizrakhmanova I.S. Effect of a magnetic field on the hysteresis transitions during floating-zone crystal growth. *Tech. Phys. Lett.*, 2007, vol. 33, no. 9, pp. 744-747. [DOI](#)
9. Lyubimova T.P., Skuridin R.V., Faizrakhmanova I.S. Thermo- and soluto-capillary convection in the floating zone process in zero gravity conditions. *J. Cryst. Growth*, 2007, vol. 303, no. 1, pp. 274-278. [DOI](#)
10. Gershuni G.Z., Lyubimov D.V. *Thermal vibrational convection*. New York: John Wiley & Sons, 1998. 358 p.
11. Longuet-Higgins M.S. Mass transport in water waves. *Philos. T. Roy. Soc. A*, 1953, vol. 245, pp. 535-581. [DOI](#)
12. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Skuridin R.V., Chen G., Roux B. Numerical investigation of meniscus deformation and flow in an isothermal liquid bridge subject to high-frequency vibrations under zero gravity conditions. *Comput. Fluids*, 2002, vol. 31, no. 4-7, pp. 663-682. [DOI](#)
13. Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in non-uniform systems. *Microgravity Quarterly*, 1994, vol. 4, no. 2, pp. 221-225.
14. Walker J.S., Dold P., Cröll A., Volz M.P., Szofran F.R. Solutocapillary convection in the float-zone process with a strong magnetic field. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2002, vol. 45, no. 23, pp. 4695-4702. [DOI](#)
15. Campbell T.A., Schweizer M., Dold P., Cröll A., Benz K.W. Float zone growth and characterization of $\text{Ge}_{1-x}\text{Si}_x$ ($x \leq 10$ at%) single crystals. *J. Cryst. Growth*, 2001, vol. 226, no. 2-3, pp. 231-239. [DOI](#)
16. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Morozov V.A. Software package for numerical investigation of linear stability of multi-dimensional flows. *Bulletin of Perm University. Information Systems and Technologies*, 2001, no. 5, pp. 74-81.
17. Witkowski L.M., Walker J.S. Solutocapillary instabilities in liquid bridges. *Phys. Fluids*, 2002, vol. 14, no. 8, pp. 2647. [DOI](#)

Поступила в редакцию 27.11.2015; опубликована в электронном виде 30.03.2016

Сведения об авторах

Любимова Татьяна Петровна, дфмн, проф., зав. лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: Tatyana.Lyubimova@psu.ru

Скуридин Роберт Владиславович, кфмн, снс, ИМСС УрО РАН; e-mail: skuridin@rambler.ru