

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38
УДК 532.5

НЕСТАЦИОНАРНАЯ СЛОИСТАЯ ТЕПЛОВАЯ И КОНЦЕНТРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ МАРАНГОНИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

С.Н. Аристов¹, Е.Ю. Просвирыков^{2,3}, Л.Ф. Спевак²

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

²Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация

³Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Российская Федерация

Построены и проанализированы точные стационарные и нестационарные решения задачи слоистой конвекции Марангони, которая является переопределенной краевой задачей, а также ее численное решение, принадлежащее к классу решений Бириха. Переопределенность разрешающей системы уравнений возникает вследствие равенства нулю скорости, параллельной оси аппликата. Рассмотрены случаи тепловой и концентрационной конвекции вязкой несжимаемой жидкости. Для разрешимости краевой задачи предложено использовать класс точных решений, в котором скорости одномерны по координатам, а поля давления и температуры являются трехмерными. Характерная особенность этого класса – тождественное обращение в нуль конвективной производной в уравнении сохранения импульса. При этом конвективная производная присутствует в калорическом уравнении состояния. Показано, что рассматриваемая краевая задача, в отличие от классического решения Бириха и его многочисленных обобщений, не может быть сведена к одномерной при задании градиента температуры на обеих границах слоя жидкости. Найденные в данной работе стационарные и нестационарные решения имеют в профиле скоростей застойную точку, что говорит о наличии противотечений при движении жидкости. Методами локализации корней полиномов стационарных решений продемонстрировано, что существует такое значение толщины слоя, при котором касательное напряжение может обратиться в нуль на нижней границе слоя жидкости только при тепловой конвекции Марангони. Полученные методом граничных элементов нестационарные решения, которые можно трактовать как точные, с течением времени выходят на стационарные решения. Применение метода граничных элементов существенно расширяет класс точных нестационарных решений, поскольку позволяет изучать и те из них, которые не обладают свойством инвариантности.

Ключевые слова: слоистая конвекция Марангони, тепловая конвекция, концентрационная конвекция, точное решение, метод граничных элементов, противотечения, граница встречных потоков

NONSTATIONARY LAMINAR THERMAL AND SOLUTAL MARANGONI CONVECTION OF A VISCOUS FLUID

S.N. Aristov¹, E.Yu. Prosviryakov^{2,3} and L.F. Spevak²

¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

²Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation

³Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russian Federation

We have determined and analyzed exact stationary and nonstationary solutions to the laminar Marangoni convection problem, which is an overdetermined boundary value problem. The numerical solution of this problem belongs to the class of Birikh solutions. The overdetermination of the resolving system of equations results from the zeroness of the velocity parallel to the applicate axis. Cases of thermal and solutal convection of a viscous incompressible fluid are considered. To make the boundary value problem solvable, the class of exact solutions is proposed for use, where velocities are one-dimensional in coordinates, the pressure and temperature fields are three-dimensional. Identical equality to zero of the convective derivative in the impulse conservation equation is typical of the class presented. The convective derivative remains in the caloric equation. The discussed boundary value problem is shown to be irreducible to the one-dimensional problem when the temperature gradient is specified on both boundaries of the fluid layer, as distinct from the classical Birikh solution and its numerous generalizations. The obtained stationary and nonstationary solutions have a stagnation point for velocities, thus suggesting the presence of counter flows in the moving fluid. It is demonstrated by localization of the polynomial roots of the stationary solutions that there exists such a value of layer thickness that the tangential stress can become zero on the lower boundary of the fluid layer only under thermal Marangoni convection. The nonstationary solutions obtained by the boundary element method, which can be treated as an exact method, tend to become stationary. The application of the boundary element method extends the class of exact nonstationary solutions considerably, since this method enables one to study not only invariant exact solutions.

Key words: laminar Marangoni convection, thermal convection, solutal convection, exact solution, boundary element method, counterflows, border of counter flows

1. Введение

При описании движения вязкой несжимаемой жидкости важную роль играет учет влияния на структуру потока температуры и концентрации. Оба процесса представляются одинаковыми уравнениями, как правило, в приближении Буссинеска [1]. Однако, краевые задачи, моделирующие конвекцию Марангони, не совпадают, поскольку физические механизмы генерации тепловой и концентрационной конвекции различны [1]. Отличие проявляется в граничных условиях, которые и определяют физический смысл обсуждаемой краевой задачи.

Если давать ретроспективную оценку экспериментальным исследованиям конвективных движений жидкости, то в последнее время наблюдается повышенный интерес к концентрационной конвекции [2, 3]. Это, вероятно, объясняется тем, что изучение конвекции началось с рассмотрения роли температуры в движении жидкостей. С кратким обзором пионерских работ, посвященных соответствующим экспериментам, можно ознакомиться в [1].

Теоретических работ, касающихся конвективных движений жидкости, существенно больше. Тем не менее, все еще не разработан достаточный математический аппарат для решения краевых задач конвекции, поскольку остается открытой проблема интегрирования уравнений Навье–Стокса в случае изотермической жидкости, а привнесение в постановку задач влияния температуры и концентрации только усложняет процесс реализации этих задач [4]. Дополнительные сложности возникают из-за существования конвективной производной не только в уравнениях импульса, но и в уравнении теплопроводности (диффузии). Вследствие этого уравнения Обербека–Буссинеска удается проинтегрировать только при тех физически содержательных постановках задач, в которых конвекция Марангони сводится к линейным или квазилинейным уравнениям в частных производных (линейным или нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям).

Первое точное конвективное решение, обобщающее изотермическое течение Куэтта, опубликовано в [5]. Большую известность получило решение Бириха задачи термокапиллярной конвекции в точной постановке [6]. Решение оказалось широко применяемым и цитируемым [7–16].

Другой плодотворный подход базируется на системах уравнений, к которым редуцируются уравнения Обербека–Буссинеска, записанные для течений вязкой несжимаемой жидкости с линейно растущими по координатам скоростями [17–25] и имеющие коэффициенты, зависящие от координат и времени. Используя такие представления гидродинамических полей, можно построить решения краевых задач с ненулевой конвективной производной [16, 19–25]. В работах [19–25] приведены точные решения для однородного, линейного и квадратичного распределений температуры на одной или обеих границах слоя вязкой жидкости. В данной работе исследуются точные решения, которые описывают слоистую конвекцию Марангони и обобщают решения, представленные в статьях [2–5, 7–20, 22–25] и монографиях [21, 22, 26].

2. Начально-краевая задача конвекции Марангони

Конвективное слоистое движение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной декартовой системе координат (предполагается нулевая вертикальная скорость жидкости) представляется системой уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= g\beta F, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + V_x \frac{\partial F}{\partial x} + V_y \frac{\partial F}{\partial y} &= \chi \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1) введены обозначения: V_x , V_y — скорости, параллельные осям, соответствующим нижним индексам; P — отклонение давления от гидростатического, отнесенное к постоянной средней плотности жидкости ρ ; F — отклонение от средней температуры T (концентрации C); ν , χ , β_1 и β_2 — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, теплового (при $F = T$) или концентрационного ($F = C$) расширения жидкости соответственно; g — ускорение свободного падения.

Для нахождения четырех неизвестных функций V_x , V_y , P и T имеется пять уравнений (1). Отметим, что пятой неизвестной функцией, строго говоря, является скорость V_z . В силу выбора рассматриваемого характера движения жидкости, решение, описывающее скорость V_z , является тривиальным (нулевым). Поэтому при изучении слоистого течения жидкости можно говорить, что система Обербека–Буссинеска (1) переопределена. Для построения решений, имеющих физический смысл, воспользуемся следующим представлением гидродинамических полей [13]:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z, t), & V_y &= V(z, t), \\ P &= P_0(z, t) + xP_1(z, t) + yP_2(z, t), \\ F &= F_0(z, t) + xF_1(z, t) + yF_2(z, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Класс решений (2) изображает нестационарные одномерные поля скоростей и трехмерные поля давления и температуры. Подставим решения (2) в систему (1) и получим линейную систему уравнений в частных производных типа уравнений теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}, & \frac{\partial F_2}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial P_1}{\partial z} &= g\beta F_1, & \frac{\partial P_2}{\partial z} &= g\beta F_2, \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= -P_1 + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, & \frac{\partial V}{\partial t} &= -P_2 + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial F_0}{\partial t} + UT_1 + VT_2 &= \chi \frac{\partial^2 F_0}{\partial z^2}, & \frac{\partial P_0}{\partial z} &= g\beta F_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Применение представления (2) помогло устранить в (1) «лишнее» уравнение. Теперь в системе (3) число неизвестных функций совпадает с количеством уравнений, и уравнения записаны в том порядке, в котором они интегрируются. Характерной особенностью системы (3) является равенство нулю конвективной производной в уравнении импульса, а в уравнении теплопроводности она присутствует благодаря структуре гидродинамических полей (2).

Сформулируем начально-краевую задачу для системы (3). Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ скорости, температура (концентрация) и градиент температуры (концентрации), входящие в эволюционные уравнения, равны нулю:

$$U = V = 0, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \quad (4)$$

На нижней границе бесконечного слоя жидкости, описываемого уравнением плоскости $z = 0$, зададим краевые условия вида:

$$U = V = 0, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = B. \quad (5)$$

Верхняя граница слоя жидкости является недеформируемой ($V_z = 0$). Коэффициент поверхностного натяжения связан с температурой или концентрацией примеси по линейному закону:

$$\alpha(F) = \alpha_0 - \sigma F.$$

Таким образом, на свободной границе справедливы условия:

$$P_0 = S, \quad P_1 = P_2 = 0, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = A, \quad F_2 = 0, \quad \eta \frac{\partial U}{\partial z} = -\sigma F_1, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Здесь σ и η — коэффициенты температурной (концентрационной) зависимости поверхностного натяжения и динамической вязкости соответственно. В работе [13] показано, что рассматриваемая краевая задача (4)–(6) является двумерной. Она не может быть сведена линейным преобразованием к одномерной задаче или к суперпозиции такого класса задач, но важно отметить, что при одинаковом направлении градиентов температуры или концентрации на границах слоя жидкости задача является одномерной.

3. Стационарное решение

Система (3), дополненная граничными условиями (5), (6), имеет точное стационарное решение, которое, будучи записанным в безразмерных переменных, выглядит так:

$$\begin{aligned} F_1 &= z, & F_2 &= \Delta(-z+1), & P_1 &= \frac{1}{2}(z^2-1), & P_2 &= -\frac{\Delta}{2}(z-1)^2, \\ U &= \delta \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^2}{4} + \frac{z}{3} \right) - zMg, & V &= \Delta \delta \left(-\frac{z^4}{24} + \frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4} + \frac{z}{6} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \text{Gr Pr} \left[\frac{z\delta}{12} \text{Mg} - \frac{z^4\delta}{12} \text{Mg} - \frac{41z\delta^2}{2520} + \frac{z^4\delta^2}{36} - \frac{z^5\delta^2}{80} + \frac{z^7\delta^2}{1008} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{z\delta^2\Delta^2}{126} + \frac{z^3\delta^2\Delta^2}{36} - \frac{5z^4\delta^2\Delta^2}{144} + \frac{z^5\delta^2\Delta^2}{48} - \frac{z^6\delta^2\Delta^2}{144} + \frac{z^7\delta^2\Delta^2}{1008} \right], \\
 P_0 &= 1 - \text{Gr Pr} \left[\frac{\delta}{40} \text{Mg} + \frac{z^2\delta}{24} \text{Mg} - \frac{z^5\delta}{60} \text{Mg} + \frac{61\delta^2}{13440} - \frac{41z^2\delta^2}{5040} + \frac{z^5\delta^2}{180} - \frac{z^6\delta^2}{480} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{z^8\delta^2}{8064} + \frac{11\delta^2\Delta^2}{8064} - \frac{z^2\delta^2\Delta^2}{252} + \frac{z^4\delta^2\Delta^2}{144} - \frac{z^5\delta^2\Delta^2}{144} + \frac{z^6\delta^2\Delta^2}{288} - \frac{z^7\delta^2\Delta^2}{1008} + \frac{z^8\delta^2\Delta^2}{8064} \right].
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь в качестве единиц измерения поперечного размера, горизонтального масштаба, времени, скорости, температуры и приведенного давления, соответственно, взяты h , l , h^2/ν , $g\beta Fh^2/\nu$, $F = Al$, $g\beta Fh$, $\Delta = B/A$. Для удобства анализа также введены безразмерные комплексы: $\delta = h/l$ — отношение характерных масштабов; $\text{Pr} = \nu/\chi$ и $\text{Gr} = g\beta\Theta h^3/\nu^2$ — числа Прандтля и Грасгофа; $\text{Mg} = \sigma/(\rho h^2 g\beta)$ — модифицированное число Марангони, которое находится делением классического критерия подобия Марангони на число Рэлея [1].

Поясним введение второго характерного размера бесконечного слоя жидкости — l . Формально он должен равняться бесконечности. Однако природные физические процессы происходят в областях конечных размеров (пусть даже очень больших). Введение конечного числа l , играющего роль характерного масштаба по координатам x и y , позволяет дать оценку горизонтального размера слоя жидкости, для которого можно не учитывать краевые условия на боковых границах и использовать для решения задачи абстрактный математический объект — бесконечный слой жидкости.

Градиенты функций F и P (7) ведут себя одинаково и не зависят от источника, индуцирующего конвективное движение жидкости, то есть от температуры (концентрации). При анализе же скоростей влияние конвекции, которая обуславливается числом Марангони, становится существенным. Дело в том, что при тепловой конвекции для подавляющего большинства жидкостей справедливо неравенство $\sigma > 0$, тогда как для концентрационной конвекции Марангони и конвективных движений аномальных жидкостей коэффициент поверхностного натяжения может быть отрицательным. Проанализируем в (7) скорость U . Для этого произведем факторизацию представляющего ее многочлена:

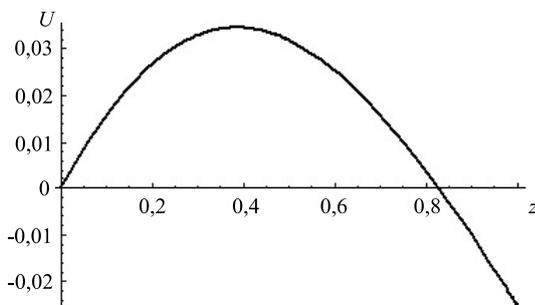


Рис. 1. График скорости U при противотечении жидкости

$$U = \delta z \left[\left(\frac{z^3}{24} - \frac{z}{4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{\text{Mg}}{\delta} \right].$$

В результате локализации его корней [22] получим, что при $\text{Mg} \in (\delta/8; \delta/3)$ скорость принимает максимальное значение во внутренней точке области определения и имеет разные знаки (Рис. 1). Это говорит о том, что в движущейся жидкости присутствуют встречные потоки. При других значениях числа Марангони противотечения не осуществимы.

Еще одна особенность, отличающая механизмы возникновения конвекции, проявляется в возможности существования толщины слоя, при которой будет равно нулю касательное напряжение как в каком-либо сечении плоскостью, параллельной нижней границе, так и на самой нижней границе. Касательные напряжения вычисляются по формулам:

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial U}{\partial z} = \delta \left(\frac{z^3}{6} - \frac{z}{2} + \frac{1}{3} \right) - \text{Mg}, \quad \tau_{yz} = \eta \frac{\partial V}{\partial z} = \Delta \delta \left(-\frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} - \frac{z}{2} + \frac{1}{6} \right).$$

Очевидно, что на нижней границе обратиться в нуль способно только τ_{xz} при $\text{Mg} = \delta/3$, и лишь в тех случаях, когда строго определена толщина слоя жидкости и конвекция является тепловой. Аналогично можно исследовать гидродинамические поля F_0 и P_0 .

4. Нестационарное течение жидкости

Ранее было показано, что решение стационарной задачи сводится к получению точного решения, которое принадлежит к классу полиномов. При рассмотрении нестационарных процессов одномерные

уравнения типа уравнения теплопроводности разрешаются с произвольной степенью точности. Согласно классификации, проведенной в работе [19], подобные решения также относятся к точным. Далее для анализа течений будет использован метод граничных элементов (МГЭ) [27].

Решение нестационарной задачи (3) при краевых условиях (4)–(6), записанной в безразмерном виде, сведем к решению последовательности краевых задач [27]:

$$\text{Задача 1. } \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}, \quad F_1(0,t) = 0, \quad F_1(1,t) = 1, \quad F_1(z,0) = 0;$$

$$\text{Задача 2. } \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}, \quad F_2(0,t) = \Delta, \quad F_2(1,t) = 0, \quad F_2(z,0) = 0;$$

$$\text{Задача 3. } \frac{\partial P_1}{\partial t} = F_1, \quad P_1(1,t) = 0, \quad P_1(z,0) = 0;$$

$$\text{Задача 4. } \frac{\partial P_2}{\partial t} = F_2, \quad P_2(1,t) = 0, \quad P_2(z,0) = 0;$$

Задача 5. $\frac{\partial U}{\partial t} = -\delta P_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, $U(0,t) = 0$, $q^U(1,t) = -\text{Mg}$, $U(z,0) = 0$, где $q^U(z,t) = \frac{\partial U}{\partial z} n(z)$ — производная по нормали к границе, $n(0) = -1$, $n(h) = 1$;

$$\text{Задача 6. } \frac{\partial V}{\partial t} = -\delta P_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad V(0,t) = 0, \quad q^V(1,t) = -\text{Mg}, \quad V(z,0) = 0, \quad \text{где } q^V(z,t) = \frac{\partial V}{\partial z} n(z);$$

$$\text{Задача 7. } \frac{\partial F_0}{\partial t} + \text{Gr} \delta(UF_1 + VF_2) = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 F_0}{\partial z^2}, \quad F_0(0,t) = 0, \quad F_0(1,t) = 0, \quad F_0(z,0) = 0;$$

$$\text{Задача 8. } \frac{\partial P_0}{\partial t} = F_0, \quad P_0(1,t) = 1, \quad P_0(z,0) = 0.$$

Задачи 1–8 последовательно проинтегрируем на заданном конечном отрезке времени $t \in [0, t_F]$.

В Задачах 1, 2, 5, 6, 7 с уравнениями параболического типа применим метод граничных элементов для области $z \in [0, h]$ [27] с учетом неоднородностей, найденных при реализации предыдущих задач. Задачи 3, 4, 8 разрешаются непосредственным интегрированием после подстановки в уравнения правых частей, установленных в предшествующих задачах.

В соответствии с МГЭ [27] решение Задачи 1 в момент наблюдения t_F имеет вид:

$$F_1(\xi, t_F) = k \int_0^{t_F} [q^{F_1}(0,t) u^*(\xi, 0, t_F, t) + q^{F_1}(h,t) u^*(\xi, 1, t_F, t) - q^*(\xi, 1, t_F, t)] dt,$$

где $\xi \in [0, 1]$; $t_F > 0$; $k = 1/\text{Pr}$; $q^{F_1}(z,t) = (\partial F_1 / \partial z) n(z)$ — производная по нормали к границе; $u^*(\xi, x, t_F, t)$ и $q^*(\xi, x, t_F, t)$ — функции влияния, которые для одномерной задачи вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} u^*(\xi, x, t_F, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t_F - t)}} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4k(t_F - t)}\right), \\ q^*(\xi, x, t_F, t) &= -\frac{(x - \xi)n(x)}{4\sqrt{\pi}(k(t_F - t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4k(t_F - t)}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Неизвестные значения $q^{F_1}(0,t)$ и $q^{F_1}(1,t)$ определяются из граничных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \int_0^{t_F} [q^{F_1}(0,t) u^*(0, 0, t_F, t) + q^{F_1}(1,t) u^*(0, 1, t_F, t) - q^*(0, 1, t_F, t)] dt &= 0, \\ \frac{1}{\text{Pr}} \int_0^{t_F} [q^{F_1}(0,t) u^*(1, 0, t_F, t) + q^{F_1}(1,t) u^*(1, 1, t_F, t) - q^*(1, 1, t_F, t)] dt &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение будем строить шагами по времени $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_N = t_F$ следующим образом. На отрезке $t \in [t_{n-1}, t_n]$ ($n = 1, \dots, N$) положим постоянными значения в граничных точках $q^{F_1}(0,t) = q_0^{F_1(n)}$, $q^{F_1}(1,t) = q_1^{F_1(n)}$. Обозначим

$$\begin{aligned}
I_i^{(n)}(\xi, x) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} u^*(\xi, x, t_n, t) dt, & I^{(n)}(\xi, x) &= \int_0^{t_n} u^*(\xi, x, t_n, t) dt, \\
J_i^{(n)}(\xi, x) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} q^*(\xi, x, t_n, t) dt, & J^{(n)}(\xi, x) &= \int_0^{t_n} q^*(\xi, x, t_n, t) dt.
\end{aligned} \tag{10}$$

Система уравнений (8) с учетом выражений (10) в момент времени $t = t_n$ примет вид:

$$\begin{aligned}
q_0^{F_1(n)} I_n^{(n)}(0,0) + q_1^{F_1(n)} I_n^{(n)}(0,1) &= - \sum_{i=1}^{n-1} [q_0^{F_1(i)} I_i^{(n)}(0,0) + q_1^{F_1(i)} I_i^{(n)}(0,1)] + J^{(n)}(0,1), \\
q_0^{F_1(n)} I_n^{(n)}(1,0) + q_1^{F_1(n)} I_n^{(n)}(1,1) &= - \sum_{i=1}^{n-1} [q_0^{F_1(i)} I_i^{(n)}(1,0) + q_1^{F_1(i)} I_i^{(n)}(1,1)] + J^{(n)}(1,1) + \frac{\text{Pr}}{2},
\end{aligned} \tag{11}$$

где значения $q_0^{F_1(n)}$ и $q_1^{F_1(n)}$ являются неизвестными, а $q_0^{F_1(i)}$, $q_1^{F_1(i)}$ ($i=1, \dots, n-1$) найдены на предыдущих шагах. Установив из системы (10) $q_0^{F_1(n)}$ и $q_1^{F_1(n)}$, получаем решение Задачи 1 в момент времени $t = t_n$:

$$F_1(z, t_n) = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\sum_{i=1}^n [q_0^{F_1(i)} I_i^{(n)}(z,0) + q_1^{F_1(i)} I_i^{(n)}(z,1)] - J^{(n)}(z,1) \right). \tag{12}$$

Задача 2 решается относительно функции $F_2(z, t)$. Из системы уравнений, аналогичной (11),

$$\begin{aligned}
q_0^{F_2(n)} I_n^{(n)}(0,0) + q_1^{F_2(n)} I_n^{(n)}(0,1) &= - \sum_{i=1}^{n-1} [q_0^{F_2(i)} I_i^{(n)}(0,0) + q_1^{F_2(i)} I_i^{(n)}(0,1)] + \Delta \left(J^{(n)}(0,0) + \frac{\text{Pr}}{2} \right), \\
q_0^{F_2(n)} I_n^{(n)}(h,0) + q_1^{F_2(n)} I_n^{(n)}(1,1) &= - \sum_{i=1}^{n-1} [q_0^{F_2(i)} I_i^{(n)}(1,0) + q_1^{F_2(i)} I_i^{(n)}(1,1)] + \Delta J^{(n)}(1,0)
\end{aligned}$$

отыскиваем значения $q_0^{F_2(n)} = q^{F_2}(0, t)$, $q_1^{F_2(n)} = q^{F_2}(1, t)$, постоянные на отрезке $t \in [t_{n-1}, t_n]$, и, наконец, решение

$$F_2(z, t_n) = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\sum_{i=1}^n [q_0^{F_2(i)} I_i^{(n)}(z,0) + q_1^{F_2(i)} I_i^{(n)}(z,1)] - \Delta J^{(n)}(z,0) \right). \tag{13}$$

Функции P_1 и P_2 на каждом шаге по времени вычисляются по известным функциям F_1 (12) и F_2 (13):

$$P_2(z, t_n) = - \int_z^1 F_2(z, t_n) dz, \quad P_1(z, t_n) = - \int_z^1 F_1(z, t_n) dz.$$

Далее на каждом шаге по времени решаются Задачи 5, 6 и 7, отличающиеся от Задач 1 и 2 видом граничных условий и наличием в уравнениях неоднородностей, определяемых на каждом шаге по времени из предшествующих задач. Алгоритм их решения с помощью МГЭ подобен использованному выше. Для Задачи 5 из системы

$$\begin{aligned}
q_0^{U(n)} I_n^{(n)}(0,0) - U_1^{(n)} J_n^{(n)}(0,1) &= \text{Mg} I^{(n)}(0,1) + \\
+ \sum_{i=1}^{n-1} (U_1^{(i)} J_i^{(n)}(0,1) - q_0^{U(i)} I_i^{(n)}(0,0)) &- \int_0^1 \int_0^{t_n} P_1(x, t) u^*(0, x, t_n, t) dt dx, \\
q_0^{U(n)} I_n^{(n)}(1,0) - U_1^{(n)} \left(\frac{1}{2} + J_n^{(n)}(1,1) \right) &= \text{Mg} I^{(n)}(1,1) + \\
+ \sum_{i=1}^{n-1} (U_1^{(i)} J_i^{(n)}(1,1) - q_0^{U(i)} I_i^{(n)}(1,0)) &- \int_0^1 \int_0^{t_n} P_1(x, t) u^*(1, x, t_n, t) dt dx
\end{aligned}$$

находим $q_0^{U(n)} = q^U(0, t)$, $U_h^{(n)} = U(h, t)$, постоянные на отрезке $t \in [t_{n-1}, t_n]$, и получаем решение

$$U(z, t_n) = \sum_{i=1}^n [q_0^{U(i)} I_i^{(n)}(z,0) - U_1^{(i)} J_i^{(n)}(z,1)] - \text{Mg} I^{(n)}(z,1) + \int_0^1 \int_0^{t_n} P_1(x, t) u^*(z, x, t_n, t) dt dx.$$

Аналогично, для Задачи 6 из системы

$$q_0^{V(n)} I_n^{(n)}(0,0) - V_1^{(n)} J_n^{(n)}(0,1) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(V_1^{(i)} J_i^{(n)}(0,1) - q_0^{V(i)} I_i^{(n)}(0,0) \right) - \int_0^1 \int_0^{t_n} P_2(x,t) u^*(0,x,t_n,t) dt dx,$$

$$q_0^{V(n)} I_n^{(n)}(1,0) - V_1^{(n)} \left(\frac{1}{2} + J_n^{(n)}(1,1) \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(V_1^{(i)} J_i^{(n)}(1,1) - q_0^{V(i)} I_i^{(n)}(1,0) \right) - \int_0^1 \int_0^{t_n} P_2(x,t) u^*(1,x,t_n,t) dt dx$$

определяем $q_0^{V(n)} = q^V(0,t)$, $V_h^{(n)} = V(h,t)$, постоянные на отрезке $t \in [t_{n-1}, t_n]$, и решение

$$V(z, t_n) = \sum_{i=1}^n \left[q_0^{V(i)} I_i^{(n)}(z,0) - V_1^{(i)} J_i^{(n)}(z,1) \right] + \int_0^1 \int_0^{t_n} P_2(x,t) u^*(z,x,t_n,t) dt dx.$$

Для Задачи 7 из системы

$$q_0^{F_0(n)} I_n^{(n)}(0,0) + q_1^{F_0(n)} I_n^{(n)}(0,1) = - \sum_{i=1}^{n-1} \left[q_0^{F_0(i)} I_i^{(n)}(0,0) + q_1^{F_0(i)} I_i^{(n)}(0,1) \right] -$$

$$- \text{Gr} \delta \int_0^1 \int_0^{t_n} (U(x,t) F_1(x,t) + V(x,t) F_2(x,t)) u^*(0,x,t_n,t) dt dx,$$

$$q_0^{F_0(n)} I_n^{(n)}(h,0) + q_1^{F_0(n)} I_n^{(n)}(1,1) = - \sum_{i=1}^{n-1} \left[q_0^{F_0(i)} I_i^{(n)}(1,0) + q_1^{F_0(i)} I_i^{(n)}(1,1) \right] -$$

$$- \text{Gr} \delta \int_0^1 \int_0^{t_n} (U(x,t) F_1(x,t) + V(x,t) F_2(x,t)) u^*(1,x,t_n,t) dt dx,$$

находим $q_0^{F_0(n)} = q^{F_0}(0,t)$, $q_1^{F_0(n)} = q^{F_0}(1,t)$, постоянные на отрезке $t \in [t_{n-1}, t_n]$, и решение

$$F_0(z, t_n) = \frac{1}{\text{Pr}} \sum_{i=1}^n \left[q_0^{F_0(i)} I_i^{(n)}(z,0) + q_1^{F_0(i)} I_i^{(n)}(z,1) \right] -$$

$$- \frac{\text{Gr} \delta}{\text{Pr}} \int_0^1 \int_0^{t_n} (U(x,t) F_0(x,t) + V(x,t) F_0(x,t)) u^*(z,x,t_n,t) dt dx.$$

Наконец, функция P_0 вычисляется на каждом шаге по формуле:

$$P_0(z, t_n) = 1 - \int_z^1 F_0(z, t_n) dz.$$

Описанная расчетная процедура позволяет отыскивать решение исходной задачи (3)–(6) на заданном отрезке времени. В каждый отдельный момент времени решение получается непрерывным по пространственной координате.

5. Примеры

Предложенный алгоритм был применен для расчета конвекции при следующих значениях параметров: $\text{Pr} = 6, 7$, $\text{Gr} = 70, 5$, $\delta = 0, 1$, $\Delta = 0, 5$. Результаты представлены на рисунках 2–4. На рисунке 2 приведены значения компонент градиента температуры (концентрации). Далее на рисунках кривые соответствуют двум значениям числа Марангони: $\text{Mg}_1 = 0, 04$ и $\text{Mg}_2 = -0, 02$. На рисунке 3 изображены графики значений компонент вектора скорости течения. Отметим, что компонента V не зависит от числа Марангони, поэтому в каждом из приведенных моментов времени линии совпадают. На рисунке 4 показаны кривые F_0 при различных значениях Mg .

Компоненты градиента температуры и концентрации качественно ведут себя одинаково, поскольку они связаны только с безразмерным числом Прандтля, характеризующим отношение диссипативных коэффициентов жидкости [1]. Количественные характеристики температурной и концентрационной конвекции могут отличаться между собой на несколько порядков для произвольного числа Прандтля

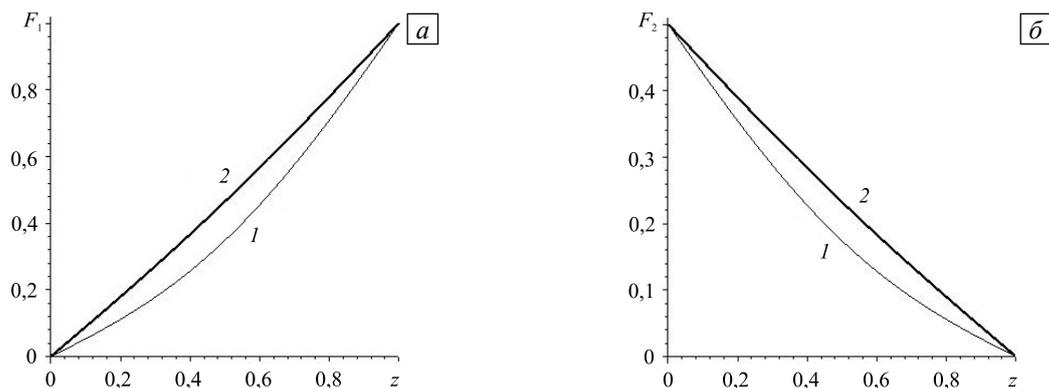


Рис. 2. Компоненты F_1 (а) и F_2 (б) градиента температуры (концентрации) в различные моменты времени t : 1 (кривая 1), 2 (2)

(Шмидта) при условии существования решения. Нестационарные решения, моделирующие поведение потоков температуры и концентрации, стремятся в пределе к линейному стационарному решению (см. (7)). Другие параметры, определяемые из Задач 1–8, также с течением времени приближаются к стационарному решению (7), что показано на рисунке 4.

При описании конвективных движений различия проявляются в характере компоненты вектора скорости U , в граничных условиях для которой содержится число Марангони. При движении неизотермической жидкости профили скоростей подобны, а при концентрационной слоистой конвекции они существенно зависят от знака числа Марангони (от растворенного вещества в жидкости) [2, 3]. На рисунке 3 видно, что при возрастании коэффициента поверхностного натяжения скорость может сменить направление по всей толщине слоя. При этом ее поведение никак не связано с физическим механизмом возникновения конвекции.

Однородная компонента температуры и концентрации обуславливается скоростью, а следовательно, и числом Марангони. Профиль концентрации имеет экстремальные значения и согласуется со знаком числа Марангони. Так, при $Mg > 0$ у функции F_0 наблюдается максимум (T_0 и C_0), а при противоположном значении — минимум (только C_0). При равенстве нулю числа Марангони глобальный экстремум в пределах области определения не достигается.

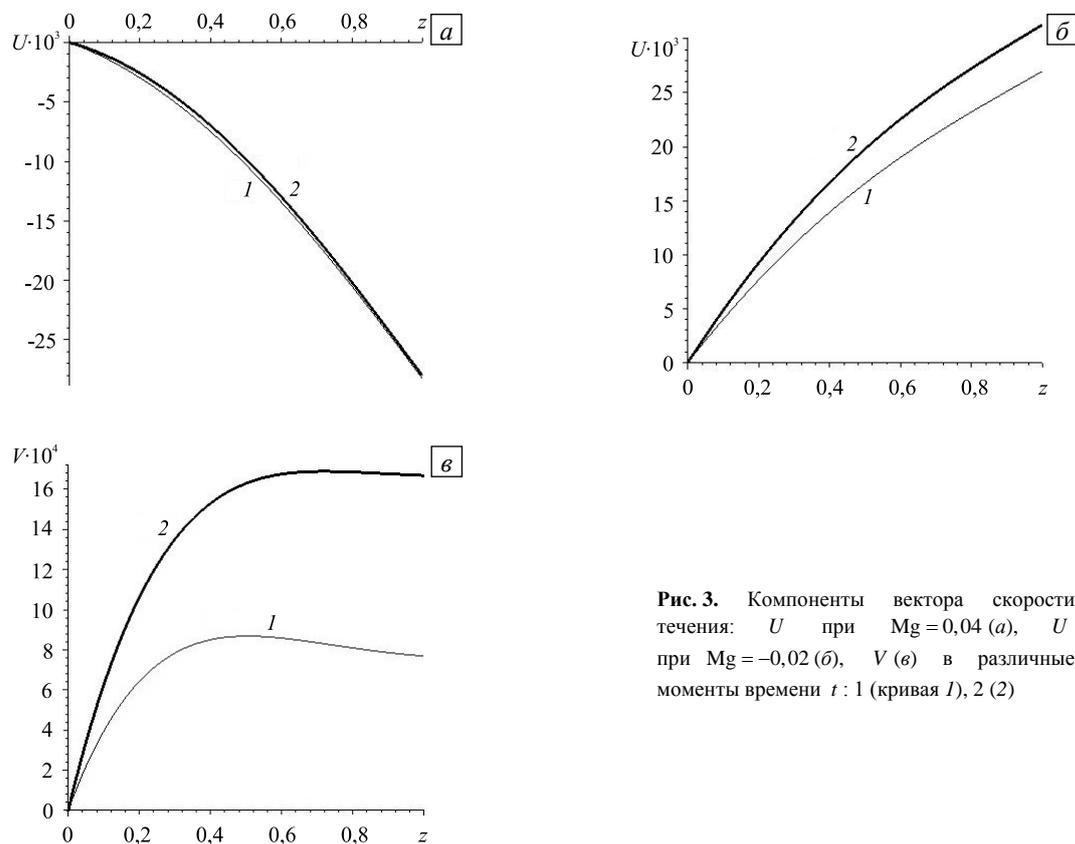


Рис. 3. Компоненты вектора скорости течения: U при $Mg = 0,04$ (а), U при $Mg = -0,02$ (б), V (в) в различные моменты времени t : 1 (кривая 1), 2 (2)

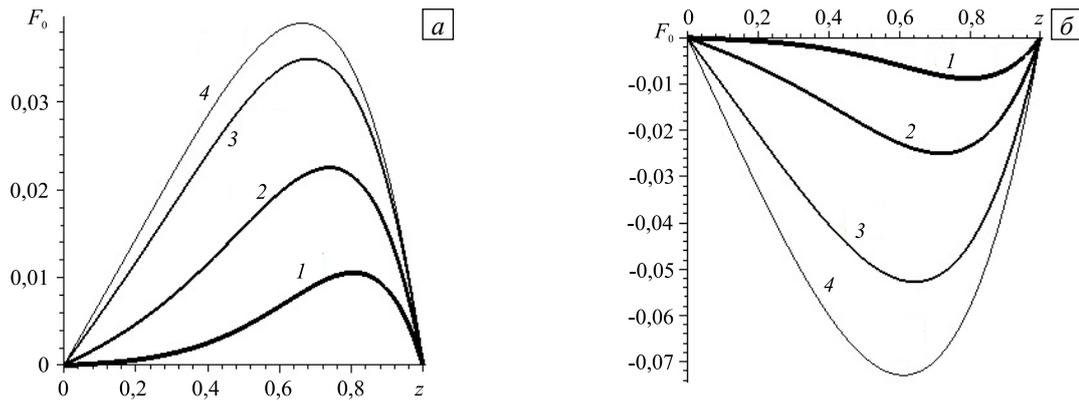


Рис. 4. Расчетные распределения температуры (концентрации) по высоте слоя жидкости при различных числах Марангони: $Mg = 0,04$ (а), $Mg = -0,02$ (б) в моменты времени t : 0,5 (кривая 1), 1 (2), 2 (3); кривая 4 отвечает стационарным значениям $F_0^{ст}$ (7) при $x = y = 0$

6. Заключение

В настоящей работе с единых позиций рассмотрены точные решения, описывающие течения вязкой несжимаемой жидкости с разными механизмами возникновения конвекции. Приведено решение существенно двумерной краевой задачи, обобщающей известное течение Бириха. Показано, что концентрационная слоистая конвекция Марангони отличается от тепловых конвективных потоков из-за наличия в жидкости растворенных поверхностно-инактивных веществ. При концентрационной конвекции в жидкости могут иметь место противотечения и смена типа глобальных экстремумов в области определения гидродинамических полей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Инвестиционно-венчурного фонда Республики Татарстан.

Соавторы с благодарностью вспоминают профессора Аристова Сергея Николаевича. Статья была задумана по его инициативе и, к глубокому сожалению, закончена уже без него.

Литература

1. Гериуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
2. Бирих Р.В., Денисова М.О., Костарев К.Г. Возникновение конвекции Марангони, вызванной локальным внесением поверхностно-активного вещества // МЖГ. – 2011. – № 6. – С. 56-68. (English version DOI).
3. Бирих Р.В., Денисова М.О., Костарев К.Г. Развитие концентрационно-капиллярной конвекции на межфазной поверхности // МЖГ. – 2015. – № 3. – С. 56-67. (English version DOI).
4. Юдович В.И. О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики // Успехи механики. – 2002. – Т. 1, № 1. – 61-102.
5. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – М.: Гостехтеориздат, 1952. – 286 с.
6. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. – 1966. – № 3. – С. 69-72. (English version DOI).
7. Napolitano L.G. Plane Marangoni–Poiseuille flow of two immiscible fluids // Acta Astronaut. – 1980. – Vol. 7, no. 4-5. – P. 461-478. DOI
8. Goncharova O.N., Kabov O.A. Gas flow and thermocapillary effects on fluid flow dynamics in a horizontal layer // Microgravity Sci. Tec. – 2009. – Vol. 21, no. 1. – P. 129-137. DOI
9. Андреев В.К. Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: Препринт №1-10 / ИВМ СО РАН. – Красноярск, 2010. – 68 с.
10. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь: Изд-во ПГУ, 2006. – 154 с.
11. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. – Киров: ВятГУ, 2011. – 207 с.
12. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (Обзор) // ПМТФ. – 2013. – № 2. – С. 3-20. (English version DOI).
13. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9, № 4. – С. 651-657.
14. Пухначев В.В. Нестационарные аналоги решения Бириха // Известия АлтГУ. – 2011. – №1-2. – С. 62-69.
15. Никитин Н.В., Никитин С.А., Полежаев В.И. Конвективные неустойчивости в гидродинамической модели роста кристаллов методом Чохральского // Успехи механики. – 2003. – Т. 2, № 4. – С. 63-105.
16. Шварц К.Г. Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // МЖГ. – 2014. – № 4. – С. 26-30. (English version DOI).
17. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Ration. Mech. An. – 1957. – Vol. 1, no. 1. – P. 391-395. DOI

18. Сидоров А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ. – 1989. – № 2. – С. 34-40. (English version DOI).
19. Аристов С.Н., Князев Д.Е., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // ТОХТ. – 2009. – Т. 43, № 5. – С. 547-566. (English version DOI).
20. Аристов С.Н., Зимин В.Д. Адвективные волны во вращающемся шаровом слое: Препринт № 145 / ИМСС, Уральский научный центр, АН СССР. – Свердловск, 1986. – 50 с.
21. Аристов С.Н., Фрик П.Г. Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препринт № 146 / ИМСС, Уральский научный центр, АН СССР. – Свердловск, 1987. – 48 с.
22. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Конвективный теплообмен при локализованном нагреве плоского слоя несжимаемой жидкости // МЖГ. – 2013. – № 3. – С. 53-58. (English version DOI).
23. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2013. – № 3(32). – С. 110-118.
24. Аристов С.Н., Князев Д.В. Локализованные конвективные течения в слое неоднородно нагретой жидкости // МЖГ. – 2014. – № 5. – С. 5-16. (English version DOI).
25. Аристов С.Н., Фрик П.Г. Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизотермической вращающейся жидкости // МЖГ. – 1988. – № 4. – С. 48-55. (English version DOI).
26. Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. – М.: Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2012. – 200 с.
27. Брeббия К., Теллес Ж., Врoубел Л. Метод граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

References

1. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective stability of incompressible liquid*. Jerusalem: Wiley, Keter Press, 1976.
2. Birikh R.V. Denisova M.O. Kostarev K.G. The development of Marangoni convection induced by local addition of a surfactant. *Fluid Dynamics*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 890-900. DOI
3. Birikh R.V. Denisova M.O. Kostarev K.G. Development of concentration-capillary convection on an interfacial surface. *Fluid Dynamics*, 2015, vol. 50, no. 3, pp. 361-370. DOI
4. Yudovich V.I. O problemakh i perspektivakh sovremennoj matematicheskoy gidrodinamiki [On the problems and future trends of modern mathematical hydrodynamics]. *Uspekhi mekhaniki – Advances in Mechanics*, 2002, vol. 1, no. 1, pp. 61-102.
5. Ostroumov G.A. *Free convection under the condition of the internal problem*. NASA TM, 1958.
6. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43-47. DOI
7. Napolitano L.G. Plane Marangoni–Poiseuille flow of two immiscible fluids. *Acta Astronaut.*, 1980, vol. 7, no. 4-5, pp. 461-478. DOI
8. Goncharova O.N., Kabov O.A. Gas flow and thermocapillary effects on fluid flow dynamics in a horizontal layer. *Microgravity Sci. Tec.*, 2009, vol. 21, no. 1, pp. 129-137. DOI
9. Andreev V.K. *Reshenie Birikha uravnenij konveksii i nekotorye ego obobshcheniya* [Birikh solution of convection equations and some of its generalizations]. Preprint No 1-10, Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, 2010. 68 p.
10. Aristov S.N., Schwarz K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortices flows of the advective nature in a rotated layer]. Perm: Perm State University, 2006. 154 p.
11. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortex flow in thin liquid layers]. Kirov: Vyatka State University, 2011. 207 p.
12. Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Stability of non-isothermal fluids (Review). *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 171-184. DOI
13. Aristov S.N. Prosviryakov E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651-657.
14. Pukhnachev V.V. Non-stationary analogies of the Birikh Solution. The News of Altai State University, 2011, no. 1-2, pp. 62-69.
15. Nikitin N.V., Nikitin S.A., Polezhaev V.I. Konvektivnye neustojchivosti v gidrodinamicheskoy modeli rosta kristallov metodom Chokhrals'kogo [Convective instabilities in a Czochralski hydrodynamic model]. *Uspekhi mekhaniki – Advances in Mechanics*, 2003, vol. 2, no. 4, pp. 63-105.
16. Shvarz K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 4, no. 4, pp. 438-442. DOI
17. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Ration. Mech. An.*, 1957, vol. 1, no. 1, pp. 391-395. DOI
18. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197-203. DOI
19. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyaniin A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642-662. DOI
20. Aristov S.N., Zimin V.D. *Advektivnye volny vo vrashchayushchemsya sharovom sloe* [Advective waves in a rotating spherical layer]. Preprint No. 145, Institute of Continuous Media Mechanics, Academy of Sciences USSR, Sverdlovsk, 1986. 50 p.

21. Aristov S.N., Frick P.G. *Dinamika krupnomasshtabnykh techenij v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Dynamics of large-scale flows in thin liquid layers]. Preprint No. 146, Institute of Continuous Media Mechanics, Academy of Sciences USSR, Sverdlovsk, 1987. 48 p.
22. Aristov S.N., Shvarts K.G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer. *Fluid Dynamics*, 2013, vol. 48, no. 3, pp. 330-335.
23. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On one class of analytic solutions of the stationary axisymmetric convection Bénard–Marangoni viscous incompressible fluid. *Vestnik SamGTU. Seriya: Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2013, no. 3(32), pp. 110-118.
24. Aristov S.N., Knyazev D.V. Localized convective flows in a nonuniformly heated liquid layer. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 565-575.
25. Aristov S.N., Frick P.G. Large-scale turbulence in thin layer of non-isothermal rotating fluid. *Fluid Dynamics*, 1988, vol. 23, no. 4, pp. 522-528. [DOI](#)
26. Ryzhkov I.I. *Termodiffuziya v smesyakh: uravneniya, simmetrii, resheniya i ikh ustojchivost'* [Thermal diffusion in mixtures: equations, symmetries, solutions and their stability]. – Krasnoyarsk: Institute of Computational Modelling SB RAS, 2014. 200 p.
27. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. *Boundary element techniques*. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

Поступила в редакцию 10.09.2015; опубликована в электронном виде 30.12.2015

Сведения об авторах

Аристов Сергей Николаевич дфмн, проф., гнс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1.

Просвиряков Евгений Юрьевич, кфмн, внс, Институт машиноведения УрО РАН (ИМАШ УрО РАН), 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34; e-mail: evgen_pros@mail.ru

Спевак Лев Фридрихович, ктн, доц., зав. лаб., ИМАШ УрО РАН; e-mail: lfs@imach.uran.ru