

DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.35

УДК 551.511.32; 551.513; 551.515; 519.63

ГЕНЕРАЦИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СТРУКТУР И СИСТЕМ ВИХРЕЙ В ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ

А.Е. Гледзер

Институт физики атмосферы им. А.М.Обухова РАН, Москва, Российская Федерация

Рассмотрены методы решения уравнений мелкой воды, описывающих течение в кольцевых вращающихся каналах, и приведены результаты численных расчетов при изучении на их основе возможности генерации в лабораторных экспериментах глобальных крупномасштабных течений, узких струйных потоков и многочисленных мелкомасштабных вихрей. Возбуждение течений производится источниками–стоками массы, а также МГД-методом – взаимодействием радиального электрического тока с полем постоянных магнитов. В численной схеме используется метод central-upwind с модификациями под особенности геофизической гидродинамики. Изначально он применялся для решения уравнений мелкой воды в чисто гидравлических задачах: в течениях через плотины, в каналах, реках, озерах. Геофизическая гидродинамика (помимо свободной поверхности и рельефа) требует учета вращения системы как целого, что сопровождается появлением в жидкости сложной системы вихрей, струйных потоков и турбулентности, которые следует принимать во внимание при постановке задачи. Соответственно меняются стандарты метода central-upwind. Модификации касаются вопросов хорошей сбалансированности и выбора методов интерполяции искомого величин. Обсуждается вопрос структуры численной схемы с выделением слагаемых, отвечающих за численную вязкость. Основным результатом модификаций можно считать контроль за вычислительной вязкостью, ограничивающей разнообразие движений жидкости. Активная динамика большого количества вихрей, переходящих в струи или формирующих единый крупномасштабный поток, является общим результатом модификаций, отвечающим содержанию геофизической гидродинамики. Поскольку создание лабораторной установки для моделирования геофизических течений с помощью многочисленных источников–стоков сопряжено с техническими проблемами, то аналогичный вычислительный эксперимент является эффективным способом изучить движения, генерируемые этим методом. В отличие от него, МГД-метод реализуется в условиях лаборатории достаточно просто и позволяет создать большой спектр потоков и вихревых течений в кювете с не очень большим числом постоянных магнитов. В частности, с помощью этого метода получены крупномасштабные круговые течения по всей площади кюветы, струйные потоки и системы взаимодействующих вихрей. Для целей экспериментов численно определены местоположения источников–стоков и систем постоянных магнитов на дне кольцевых каналов.

Ключевые слова: кольцевой канал, уравнения мелкой воды, глобальные течения, струйные потоки, источники–стоки, МГД-метод, искусственная вязкость

GENERATION OF LARGE-SCALE STRUCTURES AND VORTEX SYSTEMS IN NUMERICAL EXPERIMENTS FOR ROTATING ANNULAR CHANNELS

A.E. Gledzer

A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics RAS, Moscow, Russian Federation

Numerical methods for shallow-water equations describing flows in rotating annular channels and the results of numerical calculations are considered. The possibility of generation of global large scale flows, narrow jets and numerous small-scale vortices in laboratory experiments is analyzed. Methods for inducing external effects in fluids involve a source-sink method and an MHD-method of interaction of electric current with magnetic field generated by a system of permanent magnets. A central-upwind method adopted to geophysical hydrodynamics is used in the numerical scheme. Initially the method was applied to shallow water equations in hydraulic problems: channels, dam break, rivers, and lakes. In geophysical hydrodynamics (in addition to free water surface and bottom elevation) the main effects arise when external rotation is taken into account with appearance of numerous vortices, jets and turbulence. So the basic foundations of the central-upwind method should be changed. Modifications concern the well-balanced scheme and interpolation method. In the numerical scheme the structure of artificial viscosity is considered. The main achievement of the modification is the possibility of controlling the numerical dissipation affecting the fluid motion variety. Hence, we obtain the active dynamics of vortices transformed into jets or large scale streams, which is more preferable for geophysical hydrodynamics. The numerical experiment provides opportunities for studying flows generated by numerous source-sinks, because the creation of an appropriate laboratory experimental setup presents some difficulties. The MHD-method can readily be realized in experiments to generate a large variety of flows and vortex currents in the channel by means of a relatively small number of magnets. Specifically, large scale circular flows, narrow jets and system of interacted vortices were obtained in numerical experiments. For the purpose of experiments, the distribution of source-sinks and systems of permanent magnets over the bottom of annular channels is defined.

Key words: annular channel, shallow-water equations, large scale flows, jets, sources-sinks, MHD-method, artificial viscosity

1. Введение

Для теоретического объяснения явлений планетарного масштаба в рамках геофизической гидродинамики привлекается ряд физических и гидродинамических механизмов. Часть из них связана с квазидвумерностью геофизических течений. Формирование крупномасштабных структур может быть следствием приближенного сохранения энергии и завихренности в квазидвумерных течениях, что согласно теореме Фьортфта (1953) (см. [1]) является условием возникновения потока энергии от малых масштабов к большим с образованием крупномасштабных мод.

Солнечная радиация, как причина движения атмосферного воздуха, приводит к бароклинной неустойчивости, трансформирующей доступную потенциальную энергию от разности температур между экватором и полюсом в кинетическую энергию движения воздуха. Таким образом порождаются вихри различных размеров, струи, пограничные течения, которые представляют собой когерентные образования, содержащие развитую мелкомасштабную турбулентность. К ним относят крупные вихри на планетах-гигантах (Юпитер — Большое Красное пятно, Сатурн — Белое пятно, Нептун — Темное пятно), зональные потоки на восток в атмосфере Земли на средних широтах, а также струйные течения в атмосфере и связанные с крупными течениями в океане (например с Гольфстримом) меандрирования и океанские кольца. В атмосферах Земли и планет подобного рода структуры известны давно, а в океане их обнаружение, по причине узости и слабости по сравнению с окружающими вихрями, было затруднено. Кроме этого, следует особо сказать о блокирующих образованиях, то есть стационарных обширных областях повышенного давления, которые препятствуют зональному переносу (на Земле часто наблюдаются в средних широтах) [2, 3]. К этому же типу движений относятся системы встречных зональных струйных течений в планетных атмосферах. Образование струйных течений связывается с анизотропизацией потока энергии в поле возмущений [4], к которой во вращающемся потоке приводит широтное изменение параметра Кориолиса (β -эффект). Этот процесс, названный *zonation* (см., например, [6]), и формирует зональные струи в потоке (в частности, такие как на Юпитере).

Большое значение для выделения какого-либо из указанных механизмов в качестве основного имеют численные расчеты по соответствующим моделям. Однако работ с осуществленными на практике расчетами оказалось очень мало. В основном они проделаны на основе уравнения для потенциального вихря в однослойной баротропной модели описания волн Россби [7–10]. Уравнения мелкой воды рассматривались в работах [3, 5, 10] в связи с моделированием соответствующих экспериментов. При этом в [3, 5] использовались уравнения для описания лабораторных экспериментов в тонких слоях жидкости, в том числе и записанные в сферических координатах. В [10] имеющие место в экспериментах эффекты трения параметризовались с помощью так называемого придонного (линейного) трения.

Между тем вычисления на основе уравнений мелкой воды важны для моделирования во вращающихся установках β -эффекта. В ряде работ [4, 5, 11, 12] β -эффект учитывается в цилиндрическом сосуде с коническим дном, то есть с линейным наклоном дна. Потоки в круговых сосудах со свободной поверхностью вызываются либо методом источников-стоков, либо силой Ампера при взаимодействии в проводящей жидкости радиального электрического тока с полем, инициируемым системой постоянных магнитов под дном сосуда (МГД-метод). При этом возникали как циклон-антициклонические вихри различных размеров, так и флуктуирующие струи разных направлений.

Для вращающихся лабораторных систем вопрос создания крупномасштабного течения посредством мелкомасштабной турбулентности, возбуждаемой МГД-методом или многочисленными источниками-стоками, требует изучения. Для невращающейся установки МГД-генерация подобного течения описана, например, в [13] (так называемый конденсат, по терминологии этой работы).

В методе источников-стоков притоки и оттоки массы инициируют движения жидкости от источников к стокам, а затем эти движения под действием силы Кориолиса переходят в азимутальные, вызывая встречные сдвиговые течения. Последние вследствие неустойчивости приводят к образованию циклонических и антициклонических движущихся в потоке вихрей. Такой механизм аналогичен атмосферному, в котором роль источников-стоков играет термический нагрев атмосферы у экватора и охлаждение у полюсов с образованием известных ячеек Хэдли и Ферреля.

В МГД-методе при действии на проводящую жидкость в круговом сосуде силы Ампера $(1/c)\mathbf{j} \times \mathbf{H}$ (здесь j — плотность электрического тока, \mathbf{H} — напряженность магнитного поля, c — скорость света) радиально направленный ток и вертикальная компонента поля постоянных магнитов создают азимутальные потоки, приводящие к уже упомянутым вихревым структурам.

В связи со сказанным регулярные численные исследования на основе уравнений мелкой воды с применением двух методов возбуждения потоков жидкости и сопоставлением результатов представляют интерес. Численное моделирование ряда лабораторных экспериментов, описанных в работах [8, 9, 11], проведено автором данной статьи, и в [14] рассмотрены результаты вычислений. При этом возбуждение потоков жидкости осуществляется источниками-стоками, располагающимися по концентрическим окружностям на дне кольцевого канала, и вращением самого канала, что приводит к образованию встречных сдвиговых течений и возникновению вихрей с циклоническим и антициклоническим вращением. Величины скоростей перемещения этих вихрей в сравнении с экспериментальными значениями из работ [8, 9, 11] и изучались в [14]. При указанном расположении источников-стоков никаких глобальных (соразмеримых с круговым сосудом) или узких струйных течений в расчетах не наблюдалось.

Целью данной работы является численное исследование возможностей генерации указанного вида структур обоими методами: источниками-стоками с их изменяемым по площади сосуда расположением и МГД-методом с разной силой воздействия на жидкость. Такие численные эксперименты представляют интерес в связи с лабораторными опытами по созданию квазидвумерных течений и турбулентности.

В последующих разделах описываются конфигурации размещения инициаторов течений, используемых при вычислениях, а также приводится система уравнений и методы их численного решения. В разделе 5 анализируются результаты.

2. Основные уравнения

Кольцевой контейнер (кувета), ограниченный цилиндрическими поверхностями радиуса R_{out} (внешний) и R_{in} (внутренний), заполнен жидкостью и вращается на горизонтальной платформе с угловой частотой Ω_0 . Наклон дна отсчитывается от уровня платформы, и дно представляет собой усеченный конус $B_0 \cdot (1 - r/R_{out})$ (где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$), спадающий от B_0 при $r = R_{in}$ до уровня платформы на внешнем крае кольца при $r = R_{out}$ (Рис. 1). Поверхность жидкости в состоянии равновесия при отсутствии внешнего

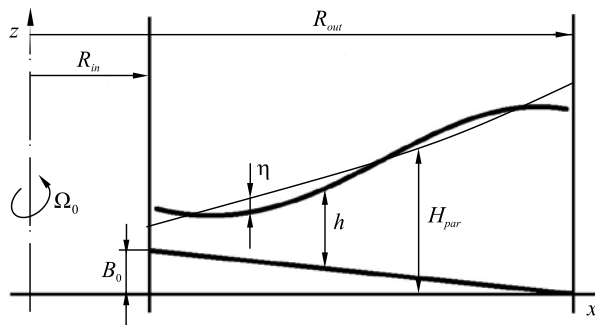


Рис. 1. Схематическое представление экспериментальной установки

воздействия принимает форму параболоида $H_{par}(x, y) = H_0 + \Omega_0^2(x^2 + y^2)/(2g) - \Omega_0^2(R_{out}^2 + R_{in}^2)/(4g)$, где H_0 — отсчитываемая от платформы высота слоя жидкости в состоянии покоя, g — ускорение силы тяжести. Поверхность жидкости является свободной, по ней переносятся поверхностные гравитационные волны. Толщина жидкости $h(x, y, t)$ и отклонение свободной поверхности от параболоида $\eta(x, y, t)$ связаны соотношением: $h(x, y, t) + B(x, y) = H_{par}(x, y) + \eta(x, y, t) \doteq Z(x, y, t)$.

Рельеф дна $B(x, y)$ представляется суммой наклонного дна (для создания и имитации

β -эффекта при генерации волн Россби в системе с постоянной по пространству частотой вращения) и собственно горы как изолированного отклонения подстилающей твердой поверхности от дна (для возможной инициации блокирования зонального переноса).

Гидростатическое приближение вместе с динамическим граничным условием на свободной поверхности (равенством давления постоянному атмосферному давлению $\Pi|_{z=z} = \Pi_{atm}$) приводят к выражению для редуцированного давления

$$\Pi^*(x, y, z, t) = \Pi(x, y, z, t) - \Lambda \Omega_0^2(x^2 + y^2)/2 = \Pi_{atm} + \Lambda g(H_{par}(x, y) + \eta(x, y, t) - z) - \Lambda \Omega_0^2(x^2 + y^2)/2,$$

которое находится в гидростатическом балансе с центробежным ускорением, то есть $\nabla \Pi^* = \Lambda g \nabla \eta$, где Λ — плотность жидкости.

Уравнения Эйлера для горизонтальных компонент скорости жидкости и уравнение сохранения массы можно записать в виде [10, 14]:

$$\frac{\partial \{u, v\}}{\partial t} + \frac{\partial (u\{u, v\})}{\partial x} + \frac{\partial (v\{u, v\})}{\partial y} + \frac{\partial (w\{u, v\})}{\partial z} + 2\Omega_0 \{-v, +u\} = -g \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} \eta = -g \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} (h + B - H_{par}); \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (h\{u, v\}) = 0.$$

Из них стандартно (см. [15]) получаются уравнения мелкой воды в дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{Q})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{Q})}{\partial y} = \mathbf{C}(\mathbf{Q}), \quad (2)$$

$$U(x, y, t) = uh, \quad V(x, y, t) = vh;$$

$$\mathbf{Q}(x, y, t) = \{h, U, V\}, \quad \mathbf{f} = (U, U^2/h + gh^2/2, VU/h), \quad \mathbf{g} = (V, UV/h, V^2/h + gh^2/2).$$

Поскольку наклон дна и гора не меняются со временем, в точном решении в качестве первой компоненты вектора \mathbf{Q} можно взять как толщину жидкости h , так и отклонение свободной поверхности η от ее равновесного уровня. Если ввести функцию $R(x, y) = B(x, y) - \Omega_0^2(x^2 + y^2)/(2g)$, содержащую все зависящие от координат величины, то есть параболоид, наклон дна и, возможно, изолированную гору,

тогда толщина жидкости запишется как $h(x, y, t) = H_{par}(x, y) - B(x, y) + \eta(x, y, t) = H_* - R(x, y) + \eta$ с постоянной $H_* = H_0 - \Omega_0^2 (R_{out}^2 + R_{in}^2) / (4g) \approx H_0$.

Правая часть $\mathbf{C}(\mathbf{Q})$ представлена неконсервативными членами, а именно внешней силой (F_h, F_u, F_v) , индуцирующей движение, кориолисовым ускорением, градиентом введенной функции $R(x, y)$:

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}) = \left\{ F_h, + F_u + F_h \frac{U}{h} + 2\Omega_0 V - gh \frac{\partial R}{\partial x}, + F_v + F_h \frac{V}{h} - 2\Omega_0 U - gh \frac{\partial R}{\partial y} \right\}. \quad (3)$$

В вычислительных экспериментах с возбуждением течения источниками–стоками внешняя сила есть $(F_h, F_u, F_v) = \{S^s(x, y), 0, 0\}$, где $S^s(x, y)$ определяется источником массы воды. При этом внешнее воздействие учитывается в уравнении эволюции свободной поверхности. В случае МГД-генерации $(F_h, F_u, F_v) = \{0, +hS^m(x, y)y/r^2, -hS^m(x, y)x/r^2\}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, то есть внешнее воздействие осуществляется силой Ампера $(1/c)\mathbf{j} \times \mathbf{H}$, включается в уравнения для поля скорости и зависит от величины напряженности магнитного поля \mathbf{H} .

С целью обезрамеривания уравнений вводятся следующие переменные: $\hat{x} = x/R_{out}$, $\hat{y} = y/R_{out}$, $\hat{r}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$; $\hat{t} = t \cdot \Omega_0$; $\tilde{U} = U/(R_{out} \Omega_0 H_0)$, $\tilde{V} = V/(R_{out} \Omega_0 H_0)$; $\tilde{h} = h/H_0$, $\tilde{B} = B/H_0$; $r_{in} = R_{in}/R_{out}$, $r_{out} = R_{out}/R_{out} = 1$; $\tilde{H}_{par} = H_{par}/H_0 = 1 + (\hat{r}^2 - 1/2)/(2\tilde{g})$, где гравитация входит в безразмерный параметр $\tilde{g} \doteq g \cdot H_0 / (R_{out}^2 \cdot \Omega_0^2)$. Внешний радиус Обухова–Россби R_E определяет масштаб распространения поверхностных гравитационных волн за время одного оборота кюветы: $R_E = \sqrt{g \cdot H_0} / (2\Omega_0)$. Отсюда функции приобретают следующий безразмерный вид: ускорение силы тяжести — $\tilde{g} = 4 \cdot (R_E/R_{out})^2$; форма конического дна — $\tilde{B} = (B_0/H_0) \cdot (1 - \hat{r})$; силы для источников–стоков — $\tilde{S}^s = S^s / (H_0 \cdot \Omega_0)$, для постоянных магнитов — $\tilde{S}^m = S^m / (R_{out}^2 \cdot \Omega_0^2)$. Характерный вид функций $S^s(x, y)$ и $S^m(x, y)$ зависит от расположения по дну кювет источников–стоков и постоянных магнитов при условии сохранения осевой симметрии и соответствующим чередованием знаков и полярности.

3. Численный метод central-upwind

В статье [14] приведена схема метода central-upwind, фундамент которого был создан в конце 90-х при усовершенствовании ряда схем (Lax–Friedrichs, Nessyahu–Tadmor) для решения уравнений адвекции, мелкой воды, газовой динамики, Гамильтона–Якоби [16–18]. Метод central-upwind описан в более приемлемой для решения уравнений мелкой воды форме в работах [19, 20]. По-видимому, его можно отнести к разновидности одномерного метода HLL (Harten–Lax–van Leer, [21]), так как он дает аналогичную формулу для численных потоков, а обобщение на случай двух и трех измерений происходит тривиально. Авторское название метода говорит (см. [20]), что он сочетает в себе стратегию методов типа метода Годунова и преимущества и простоту методов центральных разностей, то есть обходит проблемы, связанные с точным определением структуры решения задачи Римана [15].

В работах [22, 23] для дискретизации расчетной области применяется простейшая структурированная прямоугольная сетка с положениями центров $x_i = i\delta x$, $y_j = j\delta y$ элементарных прямоугольников $P_{ij} \doteq [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$, где δx и δy есть шаги сетки по осям x и y , которые, вообще говоря, различны, но постоянны. Прибегать к неравномерному шагу по любой из осей не следует по причине возможного появления неустойчивости процесса решения.

Численная схема, используемая для решения задачи в работах [22, 23], записывается в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_{ij} = - \frac{\mathbf{F}_{i+1/2j} - \mathbf{F}_{i-1/2j}}{\delta x} - \frac{\mathbf{G}_{ij+1/2} - \mathbf{G}_{ij-1/2}}{\delta y} + \mathbf{C}(\mathbf{Q}_{ij}), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+1/2j} &= \mathbf{F}_{i+1/2j}^I + \mathbf{F}_{i+1/2j}^{II}, & \mathbf{G}_{ij+1/2} &= \mathbf{G}_{ij+1/2}^I + \mathbf{G}_{ij+1/2}^{II}, \\ \mathbf{F}_{i+1/2j}^I &= \frac{a_{i+1/2j}^+ \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{ij}^E, R_{i+1/2j}) - a_{i+1/2j}^- \mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i+1j}^W, R_{i+1/2j})}{a_{i+1/2j}^+ - a_{i+1/2j}^-}, & \mathbf{F}_{i+1/2j}^{II} &= \frac{a_{i+1/2j}^+ a_{i+1/2j}^-}{a_{i+1/2j}^+ - a_{i+1/2j}^-} \cdot [\mathbf{Q}_{i+1j}^W - \mathbf{Q}_{ij}^E], \\ \mathbf{G}_{ij+1/2}^I &= \frac{b_{ij+1/2}^+ \mathbf{g}(\mathbf{Q}_{ij}^N, R_{ij+1/2}) - b_{ij+1/2}^- \mathbf{g}(\mathbf{Q}_{ij+1}^S, R_{ij+1/2})}{b_{ij+1/2}^+ - b_{ij+1/2}^-}, & \mathbf{G}_{ij+1/2}^{II} &= \frac{b_{ij+1/2}^+ b_{ij+1/2}^-}{b_{ij+1/2}^+ - b_{ij+1/2}^-} \cdot [\mathbf{Q}_{ij+1}^S - \mathbf{Q}_{ij}^N]. \end{aligned} \quad (5)$$

Вектор \mathbf{Q} вычисляется в точке C с координатами (x_i, y_j) — центре каждого элементарного

прямоугольника P_{ij} , а также на серединах его границ E, W, N, S (соответственно, восточной, западной, северной, южной). Значения на границах являются результатом полиномиального представления (интерполяции) по подобным значениям в соседних с элементом P_{ij} прямоугольниках сетки по правилу minmod [20, 22, 24]. Для определения наклонов компонент численного решения в методе minmod используется самое маленькое по модулю значение характерной производной, то есть из разностей вперед, назад и центральной при условии, что все они одинакового знака. В противном случае величина наклона обнуляется.

Дискретные аналоги потоков \mathbf{F} и \mathbf{G} отличаются от физических \mathbf{f} и \mathbf{g} в (2) и складываются на границе прямоугольника P_{ij} (как по оси x , так и по оси y) из двух частей. Первые части $\mathbf{F}_{i+1/2j}^I$ и $\mathbf{G}_{ij+1/2}^I$ есть некое усреднение физических потоков на обеих сторонах границы, причем веса в этой суперпозиции определяются отношением скоростей распространения сигналов (a^+ и a^- по оси x , b^+ и b^- по оси y). Последние величины, чисто численные по своей природе, задаются, согласно [22, 25, 26], формулами

$$a_{i+1/2j}^+ \doteq \max \left\{ \lambda_+|_{i+1j}^W, \lambda_+|_{ij}^E, +\frac{U}{h}|_{i+1j}^W, +\frac{U}{h}|_{ij}^E, 0 \right\}, \quad a_{i+1/2j}^- \doteq \min \left\{ \lambda_-|_{i+1j}^W, \lambda_-|_{ij}^E, -\frac{U}{h}|_{i+1j}^W, -\frac{U}{h}|_{ij}^E, 0 \right\},$$

$$b_{ij+1/2}^+ \doteq \max \left\{ \mu_+|_{ij+1}^S, \mu_+|_{ij}^N, +\frac{V}{h}|_{ij+1}^S, +\frac{V}{h}|_{ij}^N, 0 \right\}, \quad b_{ij+1/2}^- \doteq \min \left\{ \mu_-|_{ij+1}^S, \mu_-|_{ij}^N, -\frac{V}{h}|_{ij+1}^S, -\frac{V}{h}|_{ij}^N, 0 \right\}$$

с участием собственных значений $\lambda_+ = U/h + \sqrt{gh}$, $\lambda_- = U/h - \sqrt{gh}$ якобиана $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{Q}$ (для a^+ , a^-), собственных значений $\mu_+ = V/h + \sqrt{gh}$, $\mu_- = V/h - \sqrt{gh}$ якобиана $\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{Q}$ (для b^+ , b^-) и компонент скорости жидкости U/h , V/h в соответствующих направлениях. Скорость распространения поверхностных гравитационных волн вносит главный вклад, так как она значительно больше скорости жидкости в процессах, рассматриваемых в данной работе. Вторые части $\mathbf{F}_{i+1/2j}^{II}$ и $\mathbf{G}_{ij+1/2}^{II}$ в выражениях дискретных аналогов потоков отвечают за искусственное сглаживание и подавляют неустойчивость процесса вычислений. Физически сглаживание проявляется как некий вычет (уменьшение величины рассчитываемого потока), пропорциональный разности значений искомой величины по обе стороны границы прямоугольника, а коэффициент пропорциональности определяется модулем скорости сигнала. Таким образом, вторая часть препятствует неконтрольному росту рассчитываемого потока. Это разделение аппроксимирующего выражения для потока на часть усреднения и часть искусственного сглаживания сыграет существенную роль в дальнейшем.

Как следует из формул (4), (5), в выражении для потока $\mathbf{F}_{i+1/2j}$ (для другого направления все рассуждения аналогичны) часть искусственного сглаживания $\mathbf{F}_{i+1/2j}^{II}$ в целом дает величину $a_{ij} \cdot (\mathbf{Q}_{i+1j}^W - \mathbf{Q}_{ij}^E - \mathbf{Q}_{ij}^W + \mathbf{Q}_{i-1j}^E)$ в разности потоков $\mathbf{F}_{i+1/2j} - \mathbf{F}_{i-1/2j}$ на противоположных сторонах элементарного прямоугольника P_{ij} сетки при некоторой характерной для этого элемента величине скорости a распространения сигнала по направлению x . Полученное выражение разности непосредственно входит как член в формулу производной по времени вектора неизвестных \mathbf{Q} и соответствует выражению второй производной вектора \mathbf{Q} , а это и есть вязкое слагаемое.

Искусственная (вычислительная) вязкость может возникнуть в результате приближенной аппроксимации частных производных конечными разностями. Классическим и самым известным примером служит схема против потока (upwind) для одномерного линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом a . Легко показать, что схема при $a > 0$ аппроксимирует его с невязкой (residual) в правой части:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\delta x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a \delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(1 - \frac{a \delta t}{\delta x} \right) + O[(\delta x)^2].$$

Первый член в правой части последнего равенства и есть искусственная вязкость, когда $a \delta t / \delta x < 1$; она будет подавлять неустойчивость и сглаживать решение задачи. Следующий за ним член является вычислительной дисперсией, ответственной за искажение фазовой скорости распространения волн. В выражение, представляющее искусственное трение, вклад вносят аппроксимации по пространству и времени. В данной работе используется метод Рунге–Кутты третьего порядка для решения (дискретизации по времени) системы (4), (5), поэтому для записи выражения невязки с точностью до величины шага по пространству во второй степени требуется анализ лишь ошибок аппроксимации производных по пространству. Однако для нелинейного уравнения даже проведенная процедура записи

выражения невязки не дает гарантии, что удастся выявить составляющую, ответственную в нем именно за искусственное трение.

Для пояснения можно рассмотреть нелинейное уравнение $\partial u/\partial t + \partial f(u)/\partial x = 0$, если $\partial f(u)/\partial x > 0$. Схема central-upwind выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{H_{i+1/2} - H_{i-1/2}}{\delta x} = 0, \quad H_{i+1/2} = \frac{f(u_{i+1}^W) + f(u_i^E)}{2} - \frac{u_{i+1}^W - u_i^E}{2} \max\left(\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|_i^E, \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{i+1}^W\right), \\ H_{i-1/2} = \frac{f(u_i^W) + f(u_{i-1}^E)}{2} - \frac{u_i^W - u_{i-1}^E}{2} \max\left(\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{i-1}^E, \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|_i^W\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее сохраняются введенные здесь обозначения.

Согласно интерполяции по правилу minmod величина $u_i^E = u_i + u_{x,i}(\delta x/2)$ в (6) включает наклон искомой функции, определяемый по формуле $u_{x,i} \delta x = \gamma_i^- \theta(u_i - u_{i-1}) + \gamma_i^C (u_{i+1} - u_{i-1})/2 + \gamma_i^+ \theta(u_{i+1} - u_i)$ с коэффициентами $\gamma_i^-, \gamma_i^C, \gamma_i^+$, из которых, в соответствии с правилом minmod, только один равен 1, остальные обнуляются, и θ , который изменяется в пределах $1 \leq \theta \leq 2$ [19]. В результате получается, что

$$u_{x,i} \approx A_i^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x} + A_i^{(2)} \frac{\delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_i^{(3)} \frac{(\delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = (\gamma_i^- \theta + \gamma_i^C + \gamma_i^+ \theta) \frac{\partial u}{\partial x} + (-\gamma_i^- \theta + \gamma_i^+ \theta) \frac{\delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\gamma_i^- \theta + \gamma_i^C + \gamma_i^+ \theta) \frac{(\delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Если $\theta = 1$, то при любом выборе коэффициентов $\gamma_i^-, \gamma_i^C, \gamma_i^+$ множители при производных составляют: $A_i^{(1)} = \gamma_i^- \theta + \gamma_i^C + \gamma_i^+ \theta = 1$; $A_i^{(2)} = -\gamma_i^- \theta + \gamma_i^+ \theta$. Аналогичные выражения следует записать и для величин $u_i^W, u_{i+1}^W, u_{i-1}^E$. Отсюда следует:

$$A_{i-1}^{(1)} = \gamma_{i-1}^- \theta + \gamma_{i-1}^C + \gamma_{i-1}^+ \theta, \quad A_{i-1}^{(2)} = -3\gamma_{i-1}^- \theta - 2\gamma_{i-1}^C - \gamma_{i-1}^+ \theta, \quad A_{i+1}^{(1)} = \gamma_{i+1}^- \theta + \gamma_{i+1}^C + \gamma_{i+1}^+ \theta, \quad A_{i+1}^{(2)} = \gamma_{i+1}^- \theta + 2\gamma_{i+1}^C + 3\gamma_{i+1}^+ \theta.$$

В результате первые члены в аппроксимации нелинейного уравнения переноса на основе схемы central-upwind будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\delta x}{2} \frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(1 - \frac{A_i^{(2)} - A_{i-1}^{(2)}}{2}\right) + O(\delta x) \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dots$$

Многоточие в конце означает непоказанные члены, содержащие шаг сетки во второй и третьей степени. Первый член правой части — это искусственное трение, и зависящий от параметров интерполяции коэффициент при нем описывает затухание. В формуле присутствует еще член такого же порядка малости — второй, но он не связан с искусственной вязкостью.

Если теперь в выражении для $H_{i+1/2}$ отбросить последний член, то коэффициент перед первым слагаемым правой части уравнения станет другим, даже знак изменится на противоположный. Это будет уже не сглаживающее слагаемое, а слагаемое привносящее возбуждение. Поэтому в $H_{i+1/2}$ как раз последнее слагаемое и создает затухание возмущений. В принципе можно попытаться путем подбора коэффициентов $A_i^{(2)}, A_{i-1}^{(2)}$ добиться обнуления множителя при искусственной вязкости в правой части, а подбором других соответствующих коэффициентов — ликвидации и прочих членов. Таким образом, получится схема высокого порядка точности. Однако в целом искусственная вязкость оценивается как величина порядка $\delta x (\partial f(u)/\partial u)$, то есть она равняется шагу по пространству, умноженному на скорость переноса.

Для уравнений мелкой воды в одномерном случае (при отсутствии вращения платформы) в кювете с плоским дном при малых (по сравнению с толщиной жидкости) отклонениях свободной поверхности и малой (по сравнению со скоростью поверхностных гравитационных волн $\sqrt{g h_0}$) скорости жидкости получается следующий вид аппроксимаций уравнений (2) методом central-upwind:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g h_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = \sqrt{g h_0} \frac{\delta x}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = \sqrt{g h_0} \frac{\delta x}{2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

Последние члены как раз и определяют искусственную вязкость.

В работе [19] обсуждению подвергалась вычислительная вязкость для различных схем одномерного линейного уравнения переноса: Lax–Friedrichs, Русанова, Nessyahu–Tadmor, а также некоторые частичные выражения для метода central-upwind. Основная же цель работы состояла в строгом доказательстве выполнения принципа максимума при условии применения метода central-upwind, чем и диктовалось использование правила minmod и варианта метода Рунге–Кутты.

В работах [22, 23] были приняты следующие стандарты:

- а) первой компонентой вектора \mathbf{Q} является отклонение свободной поверхности η ;
- б) интерполяция вектора \mathbf{Q} в обеих частях выражений для численных потоков — $\mathbf{F}^I, \mathbf{F}^II; \mathbf{G}^I, \mathbf{G}^II$, имеет один и тот же вид;
- в) соблюдение условия сбалансированности (well balanced), то есть тождественное сохранение нулевых значений компонент скорости и нулевого отклонения свободной поверхности при их нулевых значениях в начальный момент [22, 25, 26] (для рассматриваемых в работах течений в реках и озерах это настолько важно, что в англоязычной литературе имеется даже образное название этого принципа — the lake at rest [27]).

Для удовлетворения требованиям принципа хорошей сбалансированности необходимо провести некоторую дискретизацию связанного с рельефом неконсервативного члена правой части $\mathbf{C}(\mathbf{Q})$. С этой целью в работах [20, 22, 24] исследователи, пуская в ход уравнения мелкой воды, ограничились чисто гидравлическими расчетами модельных (без вращения системы отсчета и внешнего привода, с учетом рельефа и трения) речных русел и каналов и взяли в качестве первой компоненты вектора \mathbf{Q} отклонение свободной поверхности η и по нему находили толщину жидкости: $h = H_0 - B(x, y) + \eta(x, y, t)$, $R \equiv B$.

Авторы статей [22, 23, 26] аппроксимацию функции $R(x, y)$ представляли на каждом элементарном прямоугольнике P_{ij} билинейной формой. Результатом стал ее численный вид в угловых точках $(i \pm 1/2, j \pm 1/2)$ и на границах $(i + 1/2, j; i, j + 1/2)$:

$$R_{i \pm 1/2, j \pm 1/2} \doteq R(x_{i \pm 1/2}, y_{j \pm 1/2}), \quad R_{i+1/2, j} \doteq \frac{R_{i+1/2, j+1/2} + R_{i+1/2, j-1/2}}{2}, \quad R_{i, j+1/2} \doteq \frac{R_{i+1/2, j+1/2} + R_{i-1/2, j+1/2}}{2}. \quad (7)$$

Формулы (7) напрямую связаны с принципом хорошей сбалансированности, используемым в работах [22, 25, 26]. Принцип требует, чтобы члены с градиентом рельефа $-gh\nabla R$ в уравнениях мелкой воды (2) были представлены определенным образом:

$$\begin{aligned} & -g \frac{R_{i+1/2, j} - R_{i-1/2, j}}{\delta x} \frac{H_* - R_{ij}^{kE} + \eta_{ij}^E + H_* - R_{ij}^{kW} + \eta_{ij}^W}{2}, & 1 \\ & -g \frac{R_{i, j+1/2} - R_{i, j-1/2}}{\delta y} \frac{H_* - R_{ij}^{kN} + \eta_{ij}^N + H_* - R_{ij}^{kS} + \eta_{ij}^S}{2}, & 2 \end{aligned} \quad (8)$$

где верхние индексы kE, kW, kN, kS таковы, что $R_{ij}^{kE} = R_{i+1/2, j}$, $R_{ij}^{kW} = R_{i-1/2, j}$, $R_{ij}^{kN} = R_{i+1/2, j}$, $R_{ij}^{kS} = R_{i-1/2, j}$. Таким образом, в (8) входит рельефная функция, устанавливаемая согласно (7) на соответствующих границах элементарного прямоугольника сетки P_{ij} . Существенным является, что величины $R_{i+1/2, j}$ и $R_{i, j+1/2}$ вычисляются именно по формуле (7), а не как чисто формальные значения на сторонах элемента P_{ij} .

В соответствии с [22, 23] потоки $\mathbf{F}_{ij}^E, \mathbf{F}_{i+1, j}^W$ в (4), (5) аппроксимируются с использованием значений $R_{i+1/2, j}$, а потоки $\mathbf{G}_{ij}^N, \mathbf{G}_{i, j+1}^S$ — с $R_{i, j+1/2}$. Тогда при нулевом векторе $\mathbf{Q}(x, y, t) = \{\eta, U, V\} = \{0, 0, 0\}$ разность потоков, входящая в (4), (5), есть $\mathbf{F}_{i+1/2, j} - \mathbf{F}_{i-1/2, j} = (g/2)\{0, (H_* - R_{i+1/2, j})^2 - (H_* - R_{i-1/2, j})^2, 0\}$, что, как видно, согласуется с (8)₁ при $\eta_{ij}^E = \eta_{ij}^W = 0$. Аналогично получается формула и для разности потоков $\mathbf{G}_{i+1/2, j} - \mathbf{G}_{i-1/2, j} = (g/2)\{0, 0, (H_* - R_{i+1/2, j})^2 - (H_* - R_{i-1/2, j})^2\}$, которая согласуется с (8)₂ при $\eta_{ij}^N = \eta_{ij}^S = 0$. Поэтому численная аппроксимация (4), (5), (7), (8) уравнений мелкой воды (2), (3) при нулевом векторе \mathbf{Q} не привносит в систему движение, то есть состояние покоя сохраняется.

4. Модификации метода central-upwind

Геофизическая гидродинамика характеризуется более сложными процессами, чем те, что изучаются в рамках гидравлики речных русел. Крупномасштабная геофизическая динамика далека от состояния покоя, возникают циклоны и антициклоны, происходит взаимодействие со струями. Также ситуация осложняется из-за наличия трения, которое не так легко, как это делается в гидравлике, параметризовать. Для крупномасштабных геофизических течений можно ожидать появления в численных расчетах уже

сформировавшейся картины струйного течения, то есть длинного ветвящегося через всю кювету узкого потока, на который накладываются циклоны и антициклоны. Подобные вихревые образования способны появляться, исчезать, сливаться в один вихрь. Самому струйному течению свойственно переживать сложную динамику. Важно отметить, что в рассматриваемых геофизических течениях нет разрывов первого рода у динамических величин, их поля гладкие. Этим течения отличаются от обсуждаемых в статьях [22, 23, 26], где наблюдались боры, гидравлические прыжки.

В отличие от [20, 22, 24], в настоящей работе проводятся некоторые модификации. Неизвестный вектор представляется в виде $\mathbf{Q}(x, y, t) = \{(1 - m_h)\eta + m_h h, U, V\}$ с индикатором m_h , принимающим значения 1 или 0, позволяющим выбирать в качестве неизвестного как отклонение свободной поверхности η , так и толщину жидкости h .

Существенной доработке в уравнениях мелкой воды (2), (3) подвергаются члены с градиентом рельефа $-gh\nabla R$. В отличие от метода хорошей сбалансированности из [22, 23], где специфически — согласно (7) — находились выражения для численного вида рельефной функции $R(x, y)$, теперь в формулах для градиента рельефа (8) индексы kE, kW, kN, kS указывают на точки, в которых вычисляются величины $R_{ij}^{kE}, R_{ij}^{kW}, R_{ij}^{kN}, R_{ij}^{kS}$ как значения функции $R(x, y)$, то есть на точки E, W, N, S (на серединах соответствующих границ элементарного прямоугольника P_{ij}) и C (в центре P_{ij}).

Кроме того, компонента η (или h) вектора \mathbf{Q} отыскивается по правилу `minmod`, а интерполяция компонент U, V осуществляется с использованием не только самой меньшей по модулю производной, как в методе `minmod`, но и самой большей согласно следующей цепочке формул:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^E &= \mathbf{Q}_{ij} + \mathbf{Q}'\delta x/2, & \mathbf{Q}' &= \mathbf{Q}'_{\min} + p(\mathbf{Q}'_{\max} - \mathbf{Q}'_{\min}), \\ \mathbf{Q}'_{\min} &= \min(\mathbf{Q}'_{LR}, \mathbf{Q}'_C), & \mathbf{Q}'_{\max} &= \max(\mathbf{Q}'_{LR}, \mathbf{Q}'_C), \\ \mathbf{Q}'_{LR} &= (\mathbf{Q}_{ij} - \mathbf{Q}_{i-1j})/\delta x, & \mathbf{Q}_{ij} &> 0; \\ \mathbf{Q}'_{LR} &= (\mathbf{Q}_{i+1j} - \mathbf{Q}_{ij})/\delta x, & \mathbf{Q}_{ij} &< 0, \\ \mathbf{Q}'_C &= (\mathbf{Q}_{i+1j} - \mathbf{Q}_{i-1j})/(2\delta x). \end{aligned} \tag{9}$$

Эти формулы для определения величины наклона \mathbf{Q}' применяются тогда, когда \mathbf{Q}'_{LR} и \mathbf{Q}'_C одного знака, то есть в случае монотонного поведения на двух соседних ячейках. В противном случае \mathbf{Q}' обнуляется. Для \mathbf{Q}^W формула аналогична: производится сдвиг на одну ячейку. Выражения для точек N, S записываются так же, но с учетом переобозначения.

После прояснения роли интерполяции (9) в схеме вычислений и формирования алгоритма вычисления наклонов численных переменных можно начать подбирать значения параметра p так, чтобы выполнялись некоторые критерии, в целом ориентированные на ограничение влияния на процесс расчета искусственной вязкости. Таких критериев рассмотрено три:

- а) близость наклона к максимуму/минимуму на каждой границе элементарного прямоугольника P_{ij} ;
- б) минимизация $\mathbf{Q}_{i+1j}^W - \mathbf{Q}_{ij}^E$ по направлению оси x (аналогично по y), что соответствует ослаблению влияния искусственной вязкости в численном выражении для потока;
- в) минимизация искусственной вязкости $\mathbf{Q}_{i+1j}^W - \mathbf{Q}_{ij}^E - \mathbf{Q}_{ij}^W + \mathbf{Q}_{i-1j}^E$ (выражение для другого направления подобно) на каждом элементе сетки, приводящая к общему ослаблению сглаживания.

5. Основные результаты и выводы

Уравнения мелкой воды используются в геофизической гидродинамике для описания баротропных процессов. В экспериментах с возбуждением течения по методу источников–стоков (ИС) в начальное время направленные от источников к стокам потоки отклоняются кориолисовой силой и закручиваются. В экспериментах с постоянными магнитами (ПМ) радиальный ток и вертикальное магнитное поле индуцируют азимутальные потоки, на которые тоже действует сила Кориолиса. Движения будут квазигоризонтальными, и вертикальная относительная завихренность $\zeta = +\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ — отличной от нуля.

Для уравнений мелкой воды (1) известен закон лагранжевой инвариантности потенциальной завихренности $(\zeta + 2\Omega_0)/h$, налагающий определенные ограничения на изменения относительной завихренности по причине изменения толщины жидкости h (главным образом вследствие рельефа), то есть на топографический β -эффект.

Расчеты проводились при параметрах, которые имели место в реальных экспериментах (см. Табл. 1).

Таблица 1. Параметры задачи

Способ генерации течения	Радиус кюветы, см		H_0 , см	B_0 , см	Период вращения кюветы $T_0 = 2\pi/\Omega_0$, с	Радиус Обухова–Россби R_E , см	Параметр гравитации \tilde{g}	Шаг по времени, с	Коэффициент интерполяции по правилу minmod θ
	R_{out}	R_{in}							
ИС	35	7	9	3	6	44,86	6,57	$5 \cdot 10^{-4}$	1,8
ПМ	14,5	1,5	1	0,4	3	7,48	1,06	$6 \cdot 10^{-4}$	1,2

На рисунке 2 внизу и рисунках 3–9 справа внизу показаны распределения чередующихся источников–стоков и постоянных магнитов, сохраняющие симметрию относительно оси вращения кольцевой кюветы. Поскольку основной целью данных численных экспериментов было выяснение условий возникновения крупномасштабных структур, узких протяженных струй и мелкомасштабных турбулентных возмущений, основными внешними изменяемыми параметрами, соответствующими экспериментальным, были интенсивности источников–стоков на различных расстояниях от центра вдоль радиуса, а также величины постоянного магнитного поля и электрического тока, подводимого к кольцевым электродам при возбуждении течения жидкости МГД-методом. Следует заметить, что один и тот же тип течений может наблюдаться при существенно отличающихся распределениях на дне кюветы как источников–стоков (ИС), так и системы постоянных магнитов (ПМ). Основной проблемой экспериментального создания указанных структур является именно выбор места для каждого из инициаторов течения, поскольку при их произвольном расположении крупномасштабные структуры, как правило, не возникают, и все движение сводится к мелкомасштабной динамике в поле скорости (к квазидвумерной турбулентности). Найденные в численных экспериментах распределения возбуждающих элементов в кювете могут помочь обнаружению глобальных крупномасштабных структур в лабораторных экспериментах.

Рисунок 2 носит технический характер, на нем приводятся результаты применения численных схем с модификациями, проделанными в данной работе, и без модификаций, согласно [22, 23, 26]. На рисунках 2а, б показаны поля скоростей при генерации ИС сдвиговых течений, аналогичных изученным в работе [14]. Соответствующая конфигурация (два кольца со стоками у внешней и внутренней границ кюветы и кольцо источников в средней части) создает два противоположно направленных потока жидкости, которые распадаются на вихри вследствие сдвиговой гидродинамической неустойчивости. Расчеты без последних членов (без искусственной вязкости) в выражениях для численных потоков немедленно приводят к численной неустойчивости, в то время как по схемам без какой-либо интерполяции дают полное отсутствие вихрей и тривиальное течение: наблюдаются два противоположно направленных потока, которые по причине искусственной вязкости не могут разрушиться на вихри. Также имеет место постоянно нарастающая скорость, что неверно. Это пример излишней численной вязкости. Можно не проводить интерполяцию для отклонения свободной поверхности (или толщины), не делать интерполяцию в части усреднения потоков, но обязательна интерполяция искусственного сглаживания. На рисунке 2а, фрагмент слева, показаны скорости течения жидкости как раз для этого способа интерполяции при параметрах $m_n = 0$ и $p = 0,5$ на сетке из 150×150 элементов, на фрагменте справа — скорости при тех же условиях, но с модификацией (9) и на сетке 200×200 .

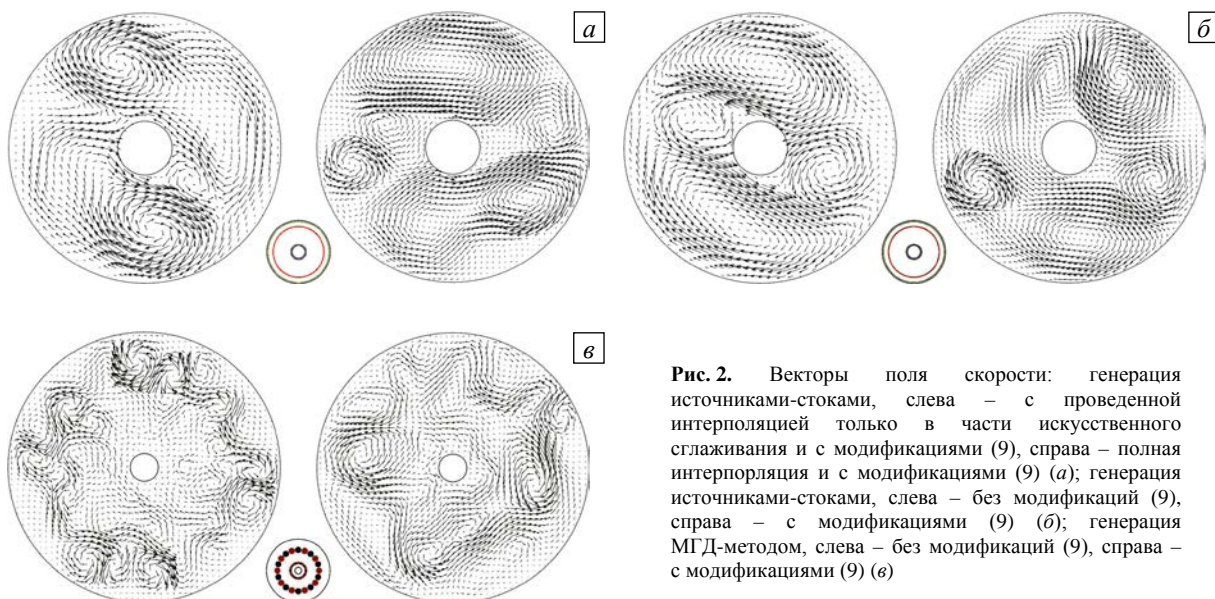


Рис. 2. Векторы поля скорости: генерация источниками–стоками, слева – с проведенной интерполяцией только в части искусственного сглаживания и с модификациями (9), справа – полная интерполяция и с модификациями (9) (а); генерация источниками–стоками, слева – без модификаций (9), справа – с модификациями (9) (б); генерация МГД-методом, слева – без модификаций (9), справа – с модификациями (9) (в)

Применение интерполяции minmod заметно сдерживает взаимодействие вихрей и ограничивает скорость жидкости (Рис. 2б, фрагмент слева), также несколько уменьшает и количество вихрей (4 вихря) по сравнению с найденными по алгоритму (9) (Рис. 2б, фрагмент справа, при параметрах $m_h = 1$ и $p = 0,5$ на сетке 200×200). Использование модификаций (9) метода central-upwind (доработка рельефной функции и интерполяция (9)) позволяет в первую очередь заметно изменить разнообразие масштабов крупных вихрей, интенсивность их перемешивания, повлиять на объединение и разъединение вихрей. Заметно меняется общая тенденция движения центров вихрей: модификации приводят к остановкам некоторых из них, хотя отдельные вихри продолжают смещаться. Картина движения становится богаче с учетом модификаций, сделанных в данной работе. Так, при сравнении фрагментов рисунка 2в, отвечающего МГД-генерации, видно, что результаты, полученные методом central-upwind без модификации (слева на Рис. 2в) и с модификациями (9) (справа), существенно отличаются. Рисунок 2в на фрагменте справа содержит струйный поток, а на фрагменте слева — вихревую структуру, в некоторых частях, возможно, излишне выраженную.

Следует отметить, что не только искусственная вязкость присутствует в схеме метода central-upwind, а также и другие, более сложные, слагаемые. Поэтому воздействовать явно на искусственную вязкость с помощью модификаций, не затрагивая остальные важные члены схемы, в том числе и отвечающие за перенос в поле скорости, невозможно.

Далее в таблице 2 представлены параметры, при которых в численных экспериментах генерировались поля скорости, изображенные на рисунках 3–9. Распределения инициаторов течения показаны внизу справа. Для источников–стоков суммарный приток массы равняется нулю. На рисунках 4б, 6а, б, 7б, 8а, б, 9 постоянные магниты изображаются кружками, причем кружки имеют разный диаметр, такой, что создаваемое магнитное поле пропорционально площади кружка. Например, на рисунке 7б магниты на внешней границе канала являются более крупными по величине и обладают более мощным полем. Источники–стоки на рисунках 3а, б, 4а, 5а, б, 7а имеют вид узких щелей. Именно так они и задавались при вычислениях.

Итак, в первом столбце таблицы 2 дается номер рисунка, который демонстрирует результаты соотносящегося с ним расчета, во втором — способ генерации течения (ИС — источники–стоки, ПМ — постоянные магниты), в третьем указано количество колец, образуемых инициаторами течения, в четвертом приведены безразмерные величины магнитного поля для постоянных магнитов в узлах сетки — \tilde{S}^m , или мощности насоса для источников–стоков — \tilde{S}^s , с указанием в индексе порядкового

Таблица 2. Параметры вычислений

№ рисунок а	Способ генерации	Число колец инициаторов течения	Силы	m_h	Индексы kE, kW, kN, kS	Интерполяция	Сетка	Тип создаваемого течения
3а	ИС	6	$\tilde{S}_{1-3}^s = 0,2$, $\tilde{S}_{4-6}^s = 0,3$	1	EWNS	minmod	150×150	вихрь
3б	ИС	6	$\tilde{S}_{1-3}^s = 0,2$, $\tilde{S}_{4-6}^s = 0,3$	1	CWCS	minmod	150×150	вихрь
4а	ИС	6	$\tilde{S}_{1-6}^s = 0,3$	0	EWNS	(9), $p = 0,0$	150×150	вихрь
4б	ПМ	2	$\tilde{S}_1^m = 0,01$, $\tilde{S}_2^m = 0,03$	1	ECNC	minmod	200×200	вихрь
5а	ИС	6	$\tilde{S}_{1-6}^s = 0,3$	1	EWNS	(9), $p = 0,8$	150×150	струи
5б	ИС	2	$\tilde{S}_1^s = 0,3$, $\tilde{S}_2^s = 0,2$	0	well balanced	minmod	150×150	струи
6а	ПМ	2	$\tilde{S}_{1-2}^m = 0,07$	1	EWNS	(9), $p = 0,7$	200×200	струи
6б	ПМ	6	$\tilde{S}_{1-6}^m = 0,01$	1	EWNS	(9), $p = 0,7$	200×200	струи
7а	ИС	2	$\tilde{S}_{1-2}^s = 0,3$	0	EWNS	(9), $p = 0,8$	200×200	вихри
7б	ПМ	3	$\tilde{S}_{1-3}^m = 0,07$	1	EWNS	(9), $p = 0,7$	200×200	вихри
8а	ПМ	2	$\tilde{S}_{1-2}^m = 0,01$	1	CWCS	minmod	200×200	струи
8б	ПМ	3	$\tilde{S}_{1-3}^m = 0,07$	1	CWCS	minmod	200×200	вихри
9	ПМ	2	$\tilde{S}_1^m = 0,07$, $\tilde{S}_2^m = 0,028$	1	EWNS	(9), $p = 0,7$	200×200	вихри

номера кольца, которому они соответствуют. Полная величина постоянного магнитного поля определяется количеством узлов сетки, попадающих внутрь круга, образуемого магнитом. Шестой столбец — столбец с набором индексов kE, kW, kN, kS , указывающих на точки, в которых вычисляются значения функции $R(x, y)$, участвующие в описании ее градиента. Например, запись ECNC означает, что находятся R_{ij}^{kE} , R_{ij}^{kW} , R_{ij}^{kN} , R_{ij}^{kS} , соответственно, в точках E (восточная точка), C (центр), N (северная точка), S (южная точка) элементарного прямоугольника P_{ij} . При отметке well balanced следует обратиться к формулам (7), (8). Во всех расчетах интерполяция проводится по правилу minmod для переменных отклонения свободной поверхности η или толщины h в обеих частях потоков $\mathbf{F}^I, \mathbf{F}^{II}; \mathbf{G}^I, \mathbf{G}^{II}$ и в первой части $\mathbf{F}^I, \mathbf{G}^I$ для потоков вектора скорости U, V . При интерполяции величин U, V в первой части потоков $\mathbf{F}^I, \mathbf{G}^I$ (в усреднении) и во второй части потоков $\mathbf{F}^{II}, \mathbf{G}^{II}$ (в искусственной вязкости) наряду со стандартным правилом minmod используется аппроксимация по формулам (9). В следующем, восьмом, столбце указано число элементов сетки. В последнем столбце описаны типы генерируемых течений.

Далее на рисунках 3–8 вверху справа представлены зависимости безразмерной зональной скорости от текущего радиуса на отрезке $[R_{in}, R_{out}]$ (положительные значения скорости соответствуют вращению против часовой стрелки). Размерные значения величин скорости определяются умножением на $(R_{out} \Omega_0)$. Для экспериментов с источниками–стоками это число равняется 36,65 см/с, для МГД-экспериментов — 30,37 см/с, поэтому характерные значения скоростей в первом случае 1 см/с, а во втором — 2 см/с. Число Россби и есть амплитуда безразмерной средней зональной скорости в данном эксперименте. Видно, что эта величина достаточно мала, что согласуется с глобальными атмосферными течениями.

На рисунках 3, 4 показаны поля скорости, которые отвечают образованию крупномасштабного вихря, вращающегося вокруг центральной части кюветы, в те моменты времени, когда вихри полностью сформировались. В подписях указаны способы инициации течений. На рисунках 3а, 4а при ИС-генерации и рисунке 4б при МГД-генерации вихри достаточно близки к круговым, а в эксперименте,

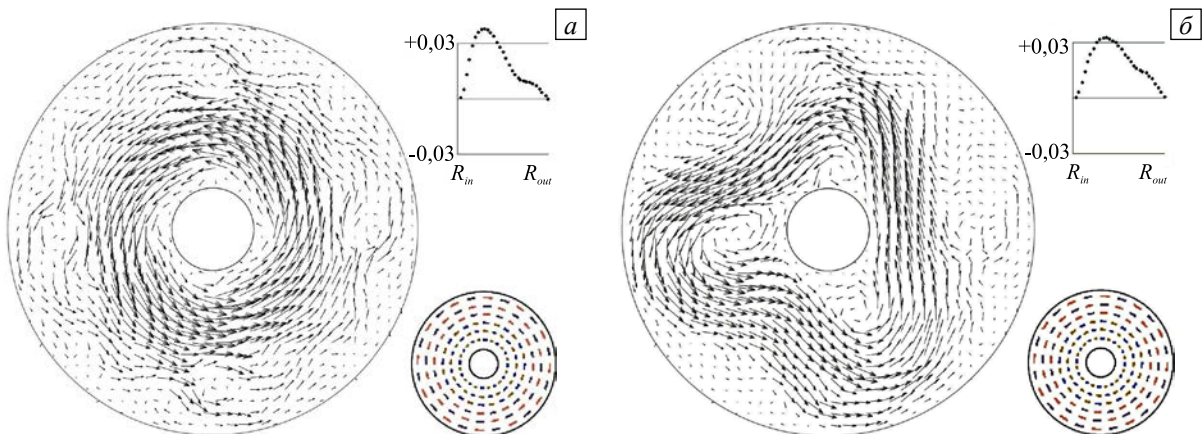


Рис. 3. Поля скорости при ИС-генерации течения и разной интерполяции градиентной функции: EWNS(a); CWCS(b)

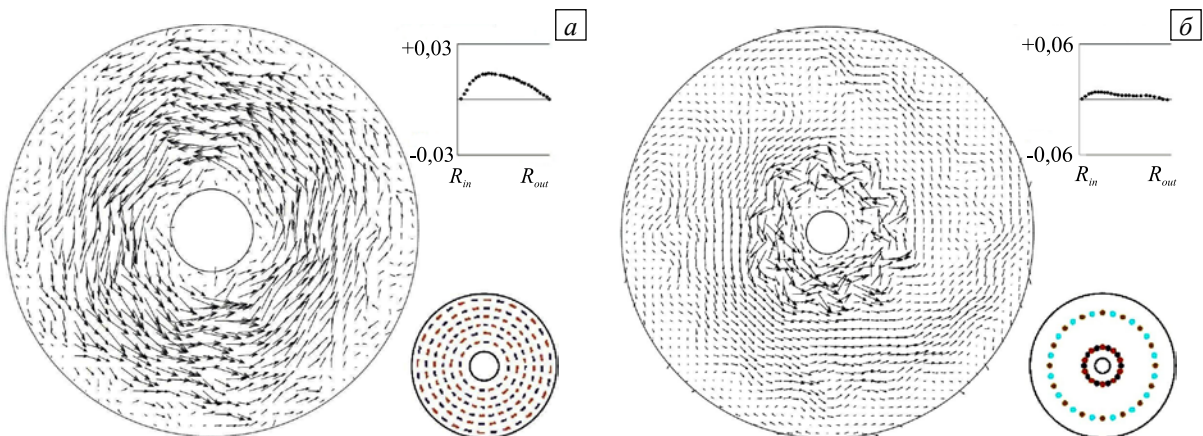


Рис. 4. Поля скорости при разных способах генерации течения и интерполяции градиентной функции: источники–стоки, EWNS (a); постоянные магниты, ECNC (b)

соответствующем рисунку 3б (при ИС-генерации), формируется вихрь с треугольным очертанием. При этом отклонение свободной поверхности тоже похоже на треугольник. Вихри на рисунках 3а, 4а, б напоминают, согласно терминологии статьи [13], так называемый конденсат, который имеет место в лабораторных экспериментах в квадратной кювете без общего вращения при МГД-генерации с решеткой постоянных магнитов. Поле скорости для МГД-генерации, показанное на рисунке 4б, отличается от поля, соответствующего ИС-генерации, более широким вихрем с уменьшенной амплитудой скорости и распределением по всей площади кюветы. При этом около центра кюветы наблюдается хаотическое поле скорости с большой амплитудой. Распределение источников–стоков в рассмотренных примерах характеризовалось их большим количеством (показаны внизу справа), хотя при МГД-генерации достаточно было всего двух колец с чередующимися постоянными магнитами.

На рисунках 5 а, б показаны струйные потоки при генерации источниками–стоками, в первом случае — с большим их числом, во втором — всего при двух кольцах их распределения, причем в последнем случае ширина струи оказалась даже меньше, чем на рисунке 5а.

Струйные потоки, генерируемые МГД-методом, приведенные на рисунках 6 а, б, свидетельствуют, что их форма фактически не зависит от количества магнитов (в эксперименте, соответствующем рисунку 6б, их было достаточно много).

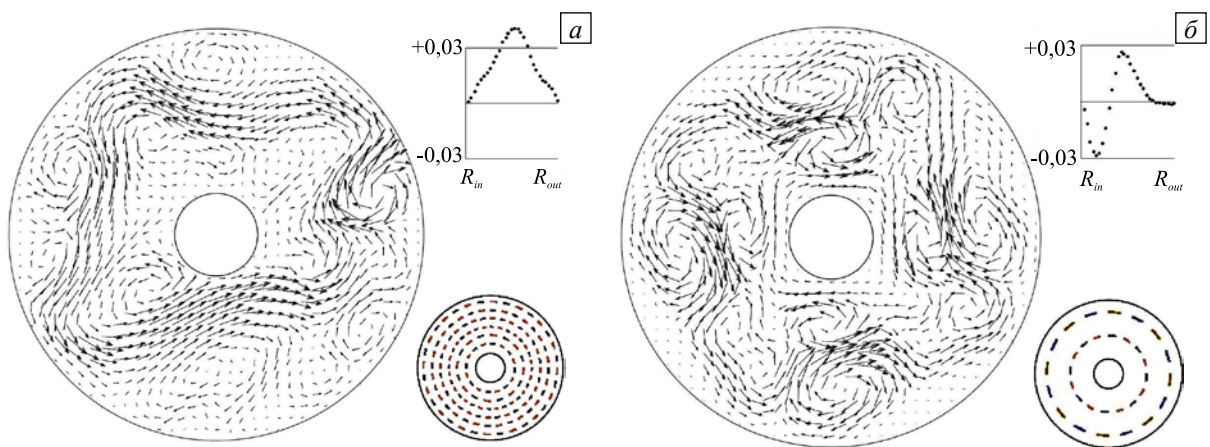


Рис. 5. Векторы поля скорости при ИС-генерации с разным числом колец инициирующих элементов: 6 (а);2 (б)

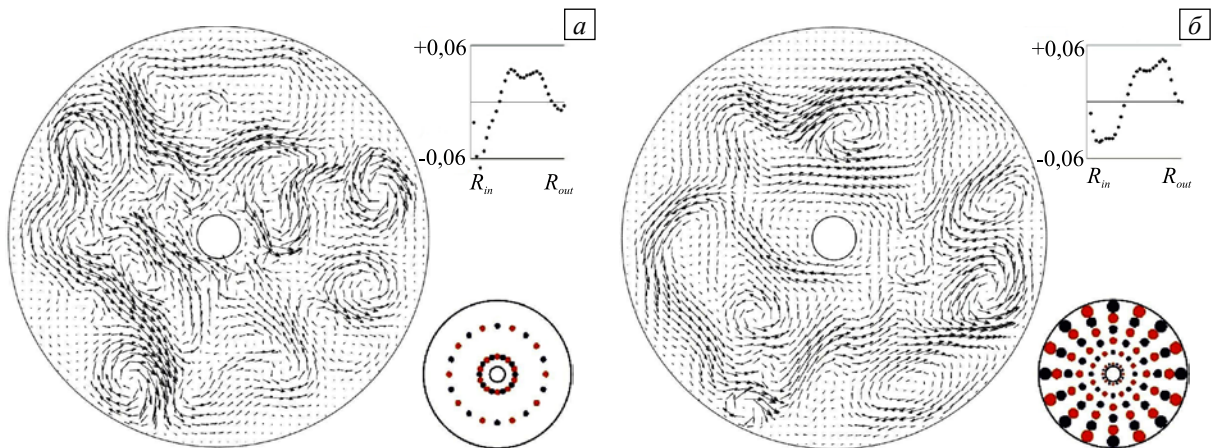


Рис. 6. Векторы поля скорости при МГД-генерации с разным числом колец постоянных магнитов: 2 (а);6 (б)

Рисунки 7 а, б отражают результаты расчетов, при которых распределенные по всей кювете крупномасштабные круговые вихри и струи не возникают. Вместо них появляется большое количество вихрей, перемещающихся по кювете. Их движение может быть рассчитано по формулам, приведенным в статьях [8, 9, 11, 14] и подтвержденных в лабораторных экспериментах. Следует заметить, что показанные на рисунке 7 вихревые картины движения наблюдаются при относительно небольшом числе возбуждающих течение элементов.

Переход к многотовревой картине течения может осуществляться путем разрушения непрерывных струйных потоков, таких как на рисунке 6, с интенсификацией вихревых движений по всей кювете. Это демонстрирует рисунок 8, причем на рисунке 8б между вихрями наблюдаются отдельные фрагменты струйных течений.

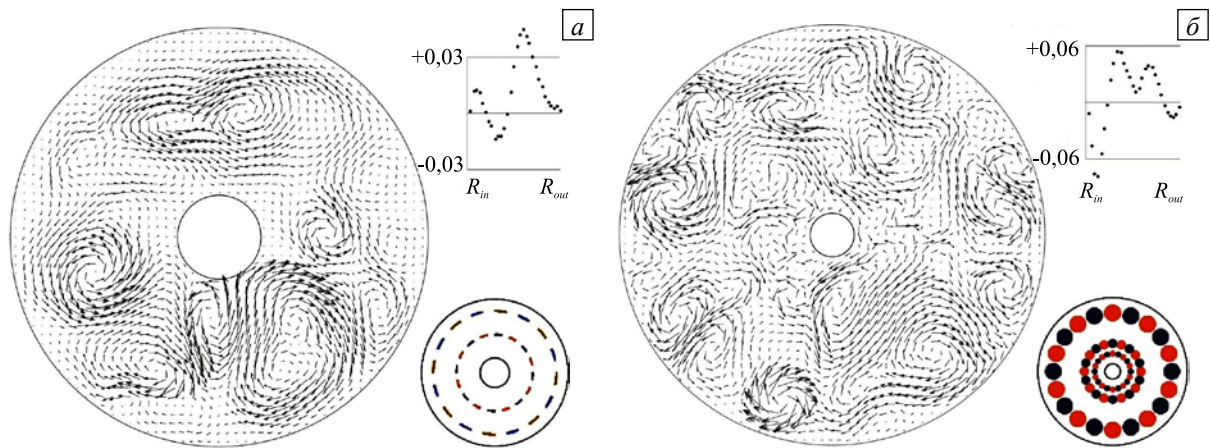


Рис. 7. Векторы поля скорости: источники–стоки (а); постоянные магниты (б)

На рисунке 9 показана многовихревая картина поля скорости и изолиний отклонения свободной поверхности от параболоида в системе крупных вихрей (размытость изолиний связана с сеткой и точностью восстановления линий). Стрелки показывают величину отклонения в сантиметрах, причем плюсовые значения отвечают антициклоническим вихрям в поле скорости (вращение по часовой стрелке), а минусовые — циклоническим вихрям (вращение против часовой стрелки). Следует отметить, что по абсолютной величине циклонические воронки отклонений являются более глубокими, чем возвышения над антициклонами. Например, углубление в циклоне на фрагменте составляет 0,065 см (см. на фрагменте справа взятые в рамку значения изолиний), а возвышение в антициклоне рядом равняется 0,020 см. Это соответствует известной циклон–антициклонной асимметрии, для которой такие отличия типичны. Подобная ситуация имеет место в численных экспериментах, в которых присутствуют крупные вихри обоих знаков. Кроме того, антициклоническое вращение, как правило, занимает большую, чем циклоническое, площадь.

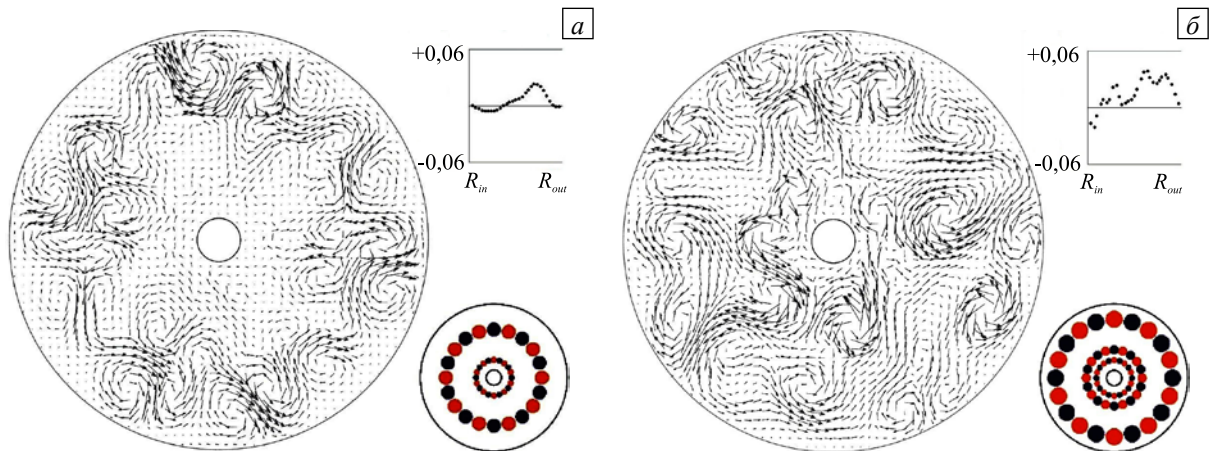


Рис. 8. Векторы поля скорости при МГД-генерации различным числом постоянных магнитов разной мощности: 2 (а); 3 (б)

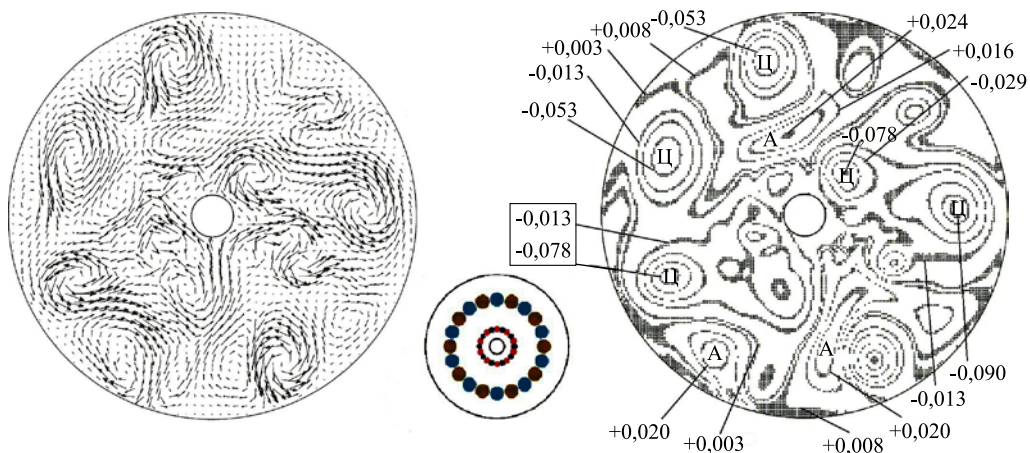


Рис. 9. Вид поля скорости (слева) и изолинии отклонения свободной поверхности от параболоида (справа) при МГД-генерации

В заключение следует отметить, что создать лабораторную установку для инициирования моделируемых выше течений с помощью метода источников–стоков затруднительно, поскольку это требует обеспечения чередующихся подводов и отводов жидкости через многочисленные отверстия с должным расходом. Численный эксперимент является эффективным способом хотя бы качественного изучения движений, генерируемых этим методом, и основе полученных результатов делает возможным выбор исходной экспериментальной конфигурации. В то же время МГД-метод, достаточно просто реализуемый в лабораторных условиях, позволяет создать большой спектр потоков и вихревых течений в кювете с использованием не очень большого числа постоянных магнитов и вариаций постоянного тока между концентрическими электродами. В простейших случаях это было осуществлено в работах [8, 9, 11].

Основной недостаток МГД-метода для кольцевых вращающихся каналов заключается в уменьшении плотности радиального электрического тока в слое электролита по мере удаления от центра. Это уменьшение компенсировалось в численных экспериментах увеличением магнитного поля постоянных магнитов за счет их укрупнения, как показано на рисунках. В результате удавалось достичь однородного по площади кюветы распределения скоростей, что приводило к однородной структуре вихрей в канале.

Автор благодарен профессору О.Г. Чхетиани за внимание к работе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-17-00806).

Литература

1. *Lesieur M.* Turbulence in Fluids. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 515 p.
2. *Weeks E.R., Tian Y., Urbach J.S., Ide K., Swinney H.L., Ghil M.* Transitions between blocked and zonal flows in a rotating annulus with topography // *Science*. – 1997. – Vol. 278, no. 5343. – P. 1598-1601. DOI
3. *Rhines P.B.* Jets and orography: idealized experiments with tip jets and Lighthill blocking // *J. Atmos. Sci.* – 2007. – Vol. 64. – P. 3627-3639. DOI
4. *Espa St., Lacorata G., Di Nitto G.* Anisotropic Lagrangian dispersion in rotating flows with a β effect // *J. Phys. Oceanogr.* – 2014. – Vol. 44. – P. 632-643. DOI
5. *Espa St., Bordi I., Frisius Th., Fraedrichs K., Cenedese A., Sutera A.* Zonal jets and cyclone-anticyclone asymmetry in decaying rotating turbulence: laboratory experiments and numerical simulations // *Geophys. Astro. Fluid.* – 2012. – Vol. 106, no. 6. – P. 557-573. DOI
6. *Galperin B., Sukoriansky S., Dikovskaya N., Read P., Yamazaki Y., Wordsworth R.* Anisotropic turbulence and zonal jets in rotating flows with a β -effect // *Nonlin. Processes Geophys.* – 2006. – Vol. 13. – P. 83-98. DOI
7. *Baroud C.N., Plapp B.B., Swinney H.L.* Scaling in three-dimensional and quasi-two-dimensional rotating turbulent flows // *Phys. Fluids*. – 2003. – Vol. 15, no. 8. – P. 2091-2104. DOI
8. *Гледзер А.Е., Гледзер Е.Б., Хапаев А.А., Черноусько Ю.Л.* Баротропное блокирование переноса вихрей в лабораторных экспериментах с вращающимся кольцевым каналом // *ДАН*. – 2012. – Т. 443, № 3. – С. 309-314. (English version DOI).
9. *Гледзер А.Е., Гледзер Е.Б., Хапаев А.А., Черноусько Ю.Л.* Зональные потоки, волны Россби и перенос вихрей в лабораторных экспериментах с вращающимся кольцевым каналом // *Известия РАН. ФАО*. – 2014. – Т. 50, № 2. – С. 143-155. (English version DOI).
10. *Должанский Ф.В.* Основы геофизической гидродинамики. – М.: Физматлит, 2011. – 264 с.
11. *Гледзер А.Е., Гледзер Е.Б., Хапаев А.А., Чхетиани О.Г.* Экспериментальное обнаружение блокирования переноса вихрей и волн Россби при МГД-возбуждении квазидвумерных течений во вращающемся цилиндрическом сосуде // *Письма в ЖЭТФ*. – 2013. – Т. 97, № 6. – С. 359-365. (English version DOI).
12. *Smith C.A., Speer K.G.* Multiple zonal jets in a differentially heated rotating annulus // *J. Phys. Oceanogr.* – 2014. – Vol. 44, P. 2273-2291. DOI
13. *Xia H., Shats M.G., Falkovich G.* Spectrally condensed turbulence in thin layer // *Phys. Fluids*. – 2009. – Vol. 21. – 125101.
14. *Гледзер А.Е.* Численная модель течений, генерируемых источниками и стоками в кольцевом вращающемся канале // *Известия РАН. ФАО*. – 2014. – Т. 50, № 3. – С. 331-343. DOI
15. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction. – Berlin: Springer-Verlag Heidelberg, 2009. – 718 p.
16. *Kurganov A., Levy D.* A third-order semidiscrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equations // *SIAM J. Sci. Comput.* – 2000. – Vol. 22, no. 4. – P. 1461-1488. DOI
17. *Kurganov A., Tadmor E.* New high-resolution semi-discrete central schemes for Hamilton–Jacobi equations // *J. Comput. Phys.* – 2000. – Vol. 160, no. 2. – P. 720-742. DOI
18. *Jiang G.S., Levy D., Lin C.T., Osher S., Tadmor E.* High-resolution nonoscillatory central schemes with nonstaggered grids for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. Numer. Anal.* – 1998. – Vol. 35, no. 6. – P. 2147-2168. DOI
19. *Kurganov A., Tadmor E.* New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // *J. Comput. Phys.* – 2000. – Vol. 160, no. 1. – P. 241-282. DOI
20. *Kurganov A., Noelle S., Petrova G.* Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton–Jacobi equations // *SIAM J. Sci. Comput.* – 2001. – Vol. 23, no. 3. – P. 707-740. DOI
21. *Harten A., Lax P.D., van Leer B.* On upstream differencing and Godunov-type schmes for hyperbolic conservation laws // *SIAM Rev.* – 1983. – Vol. 25, no. 1. – P. 35-61. DOI
22. *Kurganov A., Petrova G.* Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations // *SIAM J. Sci. Comput.* – 2009. – Vol. 31, no. 3. – P. 1742-1773. DOI
23. *Kurganov A., Petrova G.* Central-upwind schemes on triangular grids for hyperbolic systems of conservation laws // *Numer. Meth. Part. D. E.* – 2005. – Vol. 21, no. 3. – P. 536-552. DOI

24. Kurganov A., Petrova G. A third-order semi-discrete genuinely multidimensional central scheme for hyperbolic conservation laws and related problems // *Numerische Mathematik*. – 2001. – Vol. 88, no. 4. – P. 683-729. DOI
25. Kurganov A., Petrova G. A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the Saint-Venant system // *Commun. Math. Sci.* – 2007. – Vol. 5, no. 1. – P. 133-160. DOI
26. Singh J., Altinakar M.S., Ding Y. Two-dimensional numerical modeling of dam-break flows over natural terrain using a central explicit scheme // *Adv. Water Resour.* – 2011. – Vol. 34, no. 10. – P. 1366-1375. DOI
27. Bermudez A., Vazquez M.E. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms // *Comput. Fluids*. – 1994. – Vol. 23, no. 8. – P. 1049-1071. DOI

References

1. Lesieur M. *Turbulence in Fluids*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 515 p.
2. Weeks E.R., Tian Y., Urbach J.S., Ide K., Swinney H.L., Ghil M. Transitions between blocked and zonal flows in a rotating annulus with topography. *Science*, 1997, vol. 278, no. 5343, pp. 1598-1601. DOI
3. Rhines P.B. Jets and orography: idealized experiments with tip jets and Lighthill blocking. *J. Atmos. Sci.*, 2007, vol. 64, pp. 3627-3639. DOI
4. Espa St., Lacorata G., Di Nitto G. Anisotropic Lagrangian dispersion in rotating flows with a β effect. *J. Phys. Oceanogr.*, 2014, vol. 44, pp. 632-643. DOI
5. Espa St., Bordi I., Frisius Th., Fraedrichs K., Cenedese A., Sutera A. Zonal jets and cyclone-anticyclone asymmetry in decaying rotating turbulence: laboratory experiments and numerical simulations. *Geophys. Astro. Fluid*, 2012, vol. 106, no. 6, pp. 557-573. DOI
6. Galperin B., Sukoriansky S., Dikovskaya N., Read P., Yamazaki Y., Wordsworth R. Anisotropic turbulence and zonal jets in rotating flows with a β -effect. *Nonlin. Processes Geophys.*, 2006, vol. 13, pp. 83-98. DOI
7. Baroud C.N., Plapp B.B., Swinney H.L. Scaling in three-dimensional and quasi-two-dimensional rotating turbulent flows. *Phys. Fluids*, 2003, vol. 15, no. 8, pp. 2091-2104. DOI
8. Gledzer A.E., Gledzer E.B., Khapaev A.A., Chernous'ko Y.L. Barotropic blocking of the motion of vortices in laboratory experiments with a rotating circular channel. *Dokl. Earth Sci.*, 2012, vol. 444, no. 1, pp. 647-651. DOI
9. Gledzer A.E., Gledzer E.B., Khapaev A.A., Chernous'ko Y.L. Zonal flows, Rossby waves, and vortex transport in laboratory experiments with rotating annular channel. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2014, vol. 50, no. 2, pp. 122-133. DOI
10. Dolzhansky F.V. *Fundamentals of geophysical hydrodynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013. 272 p.
11. Gledzer A.E., Gledzer E.B., Khapaev A.A., Chkhetiani O.G. Experimental manifestation of vortices and Rossby wave blocking at the MHD excitation of quasi-two-dimensional flows in a rotating cylindrical vessel. *JETP Letters*, vol. 97, no. 6, pp. 316-321. DOI
12. Smith C.A., Speer K.G. Multiple zonal jets in a differentially heated rotating annulus. *J. Phys. Oceanogr.*, 2014, vol. 44, pp. 2273-2291. DOI
13. Xia H., Shats M.G., Falkovich G. Spectrally condensed turbulence in thin layer. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, 125101. DOI
14. Gledzer A.E. Numerical model of currents generated by sources and sinks in a circular rotating channel. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 292-303. DOI
15. Toro E.F. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. A practical introduction. Berlin: Springer-Verlag Heidelberg, 2009. 718 p.
16. Kurganov A., Levy D. A third-order semidiscrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2000, vol. 22, no. 4, pp. 1461-1488. DOI
17. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution semi-discrete central schemes for Hamilton–Jacobi equations. *J. Comput. Phys.*, 2000, vol. 160, no. 2, pp. 720-742. DOI
18. Jiang G.S., Levy D., Lin C.T., Osher S., Tadmor E. High-resolution nonoscillatory central schemes with nonstaggered grids for hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1998, vol. 35, no. 6, pp. 2147-2168. DOI
19. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *J. Comput. Phys.*, 2000, vol. 160, no. 1, pp. 241-282. DOI
20. Kurganov A., Noelle S., Petrova G. Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton–Jacobi equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2001, vol. 23, no. 3, pp. 707-740. DOI
21. Harten A., Lax P.D., van Leer B. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.*, 1983, vol. 25, no. 1, pp. 35-61. DOI
22. Kurganov A., Petrova G. Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2009, vol. 31, no. 3, pp. 1742-1773. DOI
23. Kurganov A., Petrova G. Central-upwind schemes on triangular grids for hyperbolic systems of conservation laws. *Numer. Meth. Part. D. E.*, 2005, vol. 21, no. 3, pp. 536-552. DOI
24. Kurganov A., Petrova G. A third-order semi-discrete genuinely multidimensional central scheme for hyperbolic conservation laws and related problems. *Numerische Mathematik*, 2001, vol. 88, no. 4, pp. 683-729. DOI
25. Kurganov A., Petrova G. A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the Saint-Venant system. *Commun. Math. Sci.*, 2007, vol. 5, no. 1, pp. 133-160. DOI
26. Singh J., Altinakar M.S., Ding Y. Two-dimensional numerical modeling of dam-break flows over natural terrain using a central explicit scheme. *Adv. Water Resour.*, 2011, vol. 34, no. 10, pp. 1366-1375. DOI
27. Bermudez A., Vazquez M.E. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Comput. Fluids*, 1994, vol. 23, no. 8, pp. 1049-1071. DOI

Поступила в редакцию 27.08.2015; опубликована в электронном виде 30.12.2015

Сведения об авторах

Гледзер Алексей Евгеньевич, кфмн, нс, Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, 119017, Москва, Пыжевский пер., д. 3; e-mail: aegledzer@gmail.com